519.24

Применение и мощность параметрических критериев проверки однородности дисперсий. Ч. 3

Б. Ю. ЛЕМЕШКО, Т. С. САТАЕВА

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия, e-mail: lemeshko@ami.nstu.ru

Исследованы распределения статистик параметрических критериев (Неймана—Пирсона, О'Брайена, Линка, Ньюмана, Блисса—Кокрена—Тьюки, Кадуэлла—Лесли—Брауна, Z-критерия Оверолла—Вудворда и модифицированного Z-критерия) проверки однородности дисперсий, в том числе при нарушении стандартного предположения о нормальности. Проведён сравнительный анализ мощности множества параметрических критериев.

Ключевые слова: *критерий, статистика, однородность дисперсий, распределение статистики, мощность критерия.*

Distribution of statistics of classical tests of homogeneity of variances (Neyman—Pearson, O'Brien, Link, Newman, Bliss—Cochran—Tukey, Cadwell—Leslie—Brown, Overall—Woodward Z-variance and modified Overall—Woodward Z-variance tests) is investigated, including the case when the common assumption of normality is violated. The comparative analysis of power of the classical tests is carried out.

Key words: *test, statistic, homogeneity of variances, distribution of statistics, power of test.*

Статья продолжает цикл работ по исследованию критериев проверки однородности дисперсий и оценке мощности критериев при различных законах распределения и относительно небольших объёмах выборок методами компьютерного моделирования. Критерии проверки гипотез об однородности дисперсий используют при анализе результатов измерений. В области метрологии их применение часто связывают с задачами сличения лабораторных испытаний. Проверяемая гипотеза об однородности дисперсий в случае анализа m выборок имеет вид

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_m^2. \qquad (1)$$

В качестве конкурирующей обычно рассматривают гипотезу

$$H_1 : \sigma_{i_1}^2 \neq \sigma_{i_2}^2, \qquad (2)$$

где неравенство выполняется, по крайней мере, для одной пары индексов i_1, i_2. Часть этих критериев можно использовать только при $m = 2$.

Качество статистических выводов, осуществляемых по результатам проверки, обеспечивается корректностью применения критериев с бóльшей мощностью. Стандартным предположением, обусловливающим возможность применения классических параметрических критериев, является принадлежность анализируемых выборок нормальному закону. На непараметрические критерии подобного ограничения не накладывается.

В [1—4] проведён сравнительный анализ мощности и исследованы свойства параметрических (Бартлетта, Кокрена, Фишера, Хартли, Левене) и непараметрических (Ансари—Бредли, Муда, Сижела—Тьюки, Кейпена, Клотца) критериев, в том числе, в условиях нарушения стандартного предположения. Было показано, что при $m = 2$ параметрические критерии Бартлетта, Кокрена, Фишера и Хартли эквивалентны, а при $m > 2$ преимущество оказывается за критерием Кокрена. При этом мощность параметрических критериев существенно выше непараметрических аналогов, что заставляет задумываться о возможности корректного применения параметрических критериев в условиях нарушения предположения о нормальности [3, 5]. Сфера применения непараметрических критериев ограничена допущением о принадлежности анализируемых выборок одному и тому же закону [2, 3].

В данной работе выводы, изложенные в [1—4], дополнены результатами исследований следующих параметрических критериев однородности дисперсий: Неймана—Пирсона [6], О'Брайена [7], Линка (отношения размахов) [8], Ньюмана (стьюдентизированного размаха) [9], Блисса—Кокрена—Тьюки [10], Кадуэлла—Лесли—Брауна [11], Z-критерия Оверолла—Вудворда [12] и модифицированного Z-критерия [13].

Исследования распределений статистик и оценку мощности критериев относительно разных конкурирующих гипотез осуществляли методами статистического моделирования с помощью программной системы ISW [14, 15]. Количество статистических экспериментов при моделировании выборок статистик составляло $N = 10^6$. Как правило, при таких N разность между истинным законом распределения статистики и смоделированным эмпирическим не превышает по модулю 10^{-3}.

При нарушении предположения о нормальности распределения статистик критериев исследовали для случая принадлежности выборок обобщённому нормальному закону с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_0}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_0)}\exp\left[-\left(|x-\theta_2|/\theta_1\right)^{\theta_0}\right], \qquad (3)$$

где $\theta_0, \theta_1 \in (0, \infty)$, $\theta_2 \in (-\infty, \infty)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Распределение статистик критериев оценивали при различных значениях параметра θ_0. Частными случаями этого семейства распределений являются нормальный закон при $\theta_0 = 2$ и распределение Лапласа при $\theta_0 = 1$. Чем меньше параметр формы θ_0, тем тяжелее хвосты распределения (3), и наоборот — чем больше параметр, тем хвосты легче. Проведённый анализ распределений статистик параметрических критериев однородности дисперсий показал их сильную зависимость от вида наблюдаемого закона. Определённую устойчивость, наряду с критерием Левене [2], проявили лишь критерий О'Брайена и модифицированный Z-критерий.

Критерий Неймана—Пирсона (критерий отношения правдоподобия). Статистика критерия определяется отношением среднего арифметического всех оценок s_i^2 дисперсий к их геометрическому среднему [6]:

$$h=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}s_i^2\Bigg/\left(\prod_{i=1}^{m}s_i^2\right)^{1/m}, \qquad (4)$$

где m — количество выборок; n_i — объёмы выборок; $s_i^2 = \frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2$ — оценки выборочных дисперсий; $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}$ — выборочные средние значения; x_{ij} — j-й элемент i-й выборки. Предполагается, что $n_1 = n_2 = ... = n_m = n$. Проверяемая гипотеза H_0 (см. (1)) отклоняется при больших значениях статистики (4), когда $h > h_{1-\alpha}$ (α — заданный уровень значимости).

Уточнённые по результатам исследований значения процентных точек (при выполнении предположения о нормальности) и зависимость распределения (4) от n, m приведены в [16]. Критерий со статистикой (4), как и любой из рассмотренных далее, можно использовать и при неравных n_i, однако в этом случае распределения статистик (при справедливости гипотезы (1)) будут отличаться от распределений статистик при равных n_i. Критерий крайне чувствителен к нарушению предположения о нормальности.

Критерий О'Брайена. При вычислении статистики критерия [7] каждый j-й элемент i-й выборки x_{ij} преобразуется в соответствии с формулой

$$V_{ij}=\left[(n_i-1{,}5)n_i\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2-0{,}5s_i^2(n_i-1)\right]\Big/\left[(n_i-1)(n_i-2)\right],$$

где $\bar{x}_i$ — среднее значение.

Статистика критерия имеет вид

$$V=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}n_i\left(\bar{V}_i-\bar{\bar{V}}_i\right)^2\Bigg/\frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(V_{ij}-\bar{V}_i\right)^2, \qquad (5)$$

где $\bar{V}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}V_{ij}$; $\bar{\bar{V}}_i=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}V_{ij}$; $N=\sum_{i=1}^{m}n_i$.

Критерий правосторонний, и проверяемая гипотеза H_0 (см. (1)) отклоняется при больших значениях статистики (5). Предельным распределением статистики критерия О'Брайена при справедливости H_0 является $F_{m-1,\,N-m}$-распределение Фишера с m–1 и N–m степенями свободы [7]. Проведённые исследования показали, что распределения статистики (5) достаточно медленно сходятся к $F_{m-1,\,N-m}$-распределениям. Например, в случае $m = 2$ отличием реального распределения $G(V|H_0)$ статистики (5) от $F_{1,\,N-m}$-распределения можно пренебречь лишь при $n_1 = n_2 = n \geq 80$. При малых объёмах выборок существенное отличие распределения $G(V|H_0)$ статистики от $F_{m-1,\,N-m}$-распределения наблюдается при больших значениях V. Поэтому использование процентных точек $F_{m-1,\,N-m}$-распределения приводит к увеличению вероятности β ошибок второго рода.

При N–$m \leq 80$ распределения $G(V|H_0)$ при значениях статистики V таких, что $1 - G(V|H_0) < 0{,}1$, оказываются ближе к $F_{m-1,\,\infty}$-распределению, чем к $F_{m-1,\,N-m}$-распределению. При N–$m \leq 80$ корректность выводов можно повысить, если применять $F_{m-1,\,\infty}$-распределение для оценки достигнутого уровня значимости $p_{\text{value}} = 1-F_{m-1,\,\infty}(V)$, или же опираться на верхние критические значения статистики (при различных m для $n_1 = n_2 = n \leq 80$) [16].

Распределения статистики критерия О'Брайена (как и критерия Левене [2]) достаточно устойчивы к нарушению стандартного предположения о нормальности. Отклонения в сторону законов с более лёгкими чем у нормального закона хвостами практически не влияют на распределение статистики. При законах с более тяжелыми хвостами отклонения от распределений, имеющих место при нормальном законе, не настолько велики, как в случае других параметрических критериев.

Критерий Линка (отношения размахов). Критерий является аналогом критерия Фишера. Его используют только при анализе двух выборок. Статистика критерия определяется соотношением [8]:

$$F^*=\omega_{n_1}/\omega_{n_2}, \qquad (6)$$

где $\omega_{n_1} = x_{1\max}-x_{1\min}$, $\omega_{n_2} = x_{2\max}-x_{2\min}$ — размахи; $x_{1\max}$, $x_{2\max}$, $x_{1\min}$, $x_{2\min}$ — соответственно максимальные и минимальные элементы сравниваемых выборок.

Проверяемая гипотеза отклоняется с уровнем значимости α, если $F^*>F^*_{1-\alpha/2}$ или $F^*<F^*_{\alpha/2}$, где $F^*_{1-\alpha/2}$, $F^*_{\alpha/2}$ — верхнее и нижнее критические значения статистики. Распределение статистики критерия существенно зависит от объёмов сравниваемых выборок. Уточнённые нижние и верхние процентные точки для статистики (6) в случае принадлежности выборок нормальному закону при n_1, $n_2 \leq 20$ представлены в [16]. Критерий крайне чувствителен к любым отклонениям от нормальности.

Критерий Ньюмана (стьюдентизированного размаха). Статистика критерия имеет вид [9]:

$$q = \omega_{n_1} / s_{n_2}, \qquad (7)$$

где $\omega_{n_1} = x_{1\max} - x_{1\min}$; $s_{n_2} = \left[\frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(x_{2i} - \bar{x}_2\right)^2\right]^{1/2}$.

Проверяемая гипотеза (1) о равенстве дисперсий отклоняется, если $q < q_{\alpha/2}$ или $q > q_{1-\alpha/2}$, где $q_{\alpha/2}$, $q_{1-\alpha/2}$ — соответственно нижнее и верхнее критические значения статистики при заданном уровне значимости α. Уточнённые нижние и верхние критические значения статистики (7) приведены в [16]. У критерия те же недостатки, что и у критерия Линка.

Критерий Блиса—Кокрена—Тьюки. Статистика критерия [10], предложенного в качестве аналога критерия Кокрена, имеет вид

$$c = \max_{1 \le i \le m} \omega_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} \omega_i,$$

где $\omega_i = \max_{1 \le j \le n_i} x_{ij} - \min_{1 \le j \le n_i} x_{ij}$ — размах i-й выборки.

Если статистика $c > c_{1-\alpha}$, где $c_{1-\alpha}$ — верхнее критическое значение при заданном уровне значимости α, то проверяемая гипотеза H_0 о равенстве дисперсий отклоняется. Значения верхних критических значений статистики при некоторых объёмах $n_1 = n_2 = n \le 20$ и $m \le 10$ при выполнении предположения о нормальности приведены в [16].

Распределения статистики критерия сильно зависят от объёма, количества сравниваемых выборок и меняются при нарушении предположения о нормальности.

Критерий Кадуэлла—Лесли—Брауна. Статистика критерия, предложенного в качестве аналога критерия Хартли, задана как [11]

$$K = \max_{1 \le i \le m} \omega_i \Big/ \min_{1 \le i \le m} \omega_i. \qquad (8)$$

Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при $K > K_{1-\alpha}$, где $K_{1-\alpha}$ — верхнее критическое значение статистики. Уточнённые критические значения $K_{1-\alpha}$ статистики (8) для количества выборок $m \le 10$ при равных объёмах выборок $n_1 = n_2 = n \le 20$, $i = \overline{1, m}$ приведены в [16]. Свойства критерия аналогичны предыдущему.

***Z*-критерий Оверолла—Вудворда.** Статистика критерия имеет следующий вид [12]:

$$Z = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} Z_i^2, \qquad (9)$$

где $Z_i = \left[c_i\left(n_i - 1\right)s_i^2 / MSE\right]^{1/2} - \left[c_i\left(n_i - 1\right) - c_i/2\right]^{1/2}$; $MSE = \frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2$; $c_i = 2 + 1/n_i$; $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$.

При справедливости проверяемой гипотезы (1) и принадлежности анализируемых выборок нормальному закону предельным распределением статистики (9) является $F_{m-1,\,\infty}$-распределение Фишера. Однако при малых n_i распределение (9) заметно отличается от $F_{m-1,\,\infty}$-распределения. Различием между реальным распределением статистики и $F_{m-1,\,\infty}$-распределением можно пренебречь при $n_i \ge 50$. При $n_i \le 50$ можно воспользоваться таблицей верхних критических значений $Z_{1-\alpha}$, представленной в [16]. Распределение статистики (9) Z-критерия очень чувствительно к нарушению предположения о нормальности.

Модифицированный *Z*-критерий. Для построения более устойчивого критерия в [13] предложена модификация статистики, отличающаяся вычислением c_i:

$$c_i = 2{,}0\left[K_i^{-1}\left(2{,}9 + 0{,}2/n_i\right)\right]^{1{,}6\left(n_i - 1{,}8K_i + 14{,}7\right)/n_i}, \qquad (10)$$

где $K_i = \frac{1}{n_i - 2}\sum_{j=1}^{n_i} G_{ij}^4$ — оценка коэффициента эксцесса i-й выборки; $G_{ij} = \left(x_{ij} - \bar{x}_i\right) \Big/ \left[s_i^2\left(n_i - 1\right)/n_i\right]^{1/2}$.

Исследования показали, что распределение модифицированной статистики с ростом n_i очень медленно сходится к $F_{m-1,\,\infty}$-распределению. Даже при больших объёмах выборок распределение модифицированной статистики не согласуется с $F_{m-1,\,\infty}$-распределением, хотя в области больших значений её отличие от $F_{m-1,\,\infty}$-распределения несущественно. Для корректного применения критерия при малых объёмах выборок можно использовать таблицу критических значений [16].

Распределение статистики модифицированного Z-критерия действительно обладает бóльшей устойчивостью к нарушению стандартного предположения о нормальности. Однако соотношение (10) не обладает необходимой точностью, так как в случае модифицированного Z-критерия нарушается общий для всех параметрических критериев монотонный характер зависимости распределений статистик от степени отклонения наблюдаемого закона от нормального.

Анализ мощности критериев. Мощность отдельных критериев рассмотрена в [1—3, 17—19]. В данной статье при сравнительном анализе в качестве конкурирующих к проверяемой гипотезе H_0 рассмотрены ситуации, когда m–1 выборка принадлежит закону с некоторым $\sigma = \sigma_0$, а одна из выборок, например, с номером m — закону с другим σ ($H_1 : \sigma_m = 1{,}1\sigma_0$; $H_2 : \sigma_m = 1{,}5\sigma_0$). Кроме рассмотренных сравнивали критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Левене, а также непараметрические критерии Муда, Ансари—Бредли и Сижела—Тьюки, оценки мощности которых взяты из [2, 3]. Оценки мощности всего множества критериев при выполнении предположения о нормальности (для α = 0,1; 0,05; 0,01 и m = 2) представлены в табл. 1, 2, где критерии упорядочены по убыванию мощности.

Критерий Неймана—Пирсона и Z-критерий Оверолла—Вудворда по мощности оказались эквивалентны критериям Бартлетта, Кокрена, Хартли и Фишера. Различие в мощности модифицированного Z-критерия и критерия О'Брайена заметно только относительно достаточно далёкой конкурирующей гипотезы H_2 (см. (2)). При этом они имеют преимущество в мощности по сравнению с критерием Левене.

Критерий Ньюмана с ростом объёмов выборок всё заметнее уступает в мощности критерию Левене. В то же время он имеет явное преимущество (за исключением выборки объёмом n = 10) перед критериями Блисса—Кокрена—Тьюки, Кадуэлла—Лесли—Брауна и Линка, эквивалентными по мощности.

Группа «устойчивых» критериев (модифицированный Z-критерий, О'Брайена и Левене) при малых объёмах выборок (см. при n = 10) уступает в мощности критериям Ньюмана, Линка, Блисса—Кокрена—Тьюки и Кадуэлла—Лесли—Брауна, но с ростом n имеет явное преимущество и перед последними, и перед непараметрическими критериями. Внутри этой группы некоторое преимущество остаётся за критерием О'Брайена.

Критерии Ньюмана, Блисса—Кокрена—Тьюки, Кадуэлла—Лесли—Брауна и Линка имеют некоторое преимущество в мощности над непараметрическими критериями только при малых объёмах выборок (n=10...20), а при их увеличении заметно уступают непараметрическим.

Критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли, Левене, Неймана—Пирсона, О'Брайена, Блисса—Кокрена—Тьюки, Кадуэлла—Лесли—Брауна, Z-критерий Оверолла—Вудворда, модифицированный Z-критерий можно применять при $m > 2$. При этом критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли, Неймана—Пирсона и Z-критерий Оверолла—Вудворда уже не образуют группу эквивалентных критериев с одинаковой мощностью. Исключение составляют лишь критерии Бартлетта и Неймана—Пирсона, которые остаются практически эквивалентными по мощности.

В табл. 3, 4 приведены оценки мощности многовыборочных критериев (при m = 3, m = 5 и при n_i = 100, $i=\overline{1,m}$) относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 (при отличающейся дисперсии одной из выборок) в случае принадлежности анализируемых выборок нормальным законам. Критерии упорядочены по убыванию мощности, что позволяет судить о предпочтительности применения того или другого.

Таблица 1

Мощность критериев относительно гипотезы H_1 : $\sigma_2 = 1{,}1\sigma_0$

Критерий	α	Объём выборки n				
		10	20	40	60	100
Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана—Пирсона, Z-критерий	0,10	0,112	0,128	0,157	0,188	0,246
	0,05	0,058	0,068	0,090	0,111	0,156
	0,01	0,012	0,016	0,023	0,032	0,051
Модифицированный Z-критерий, О'Брайена	0,10	0,109	0,125	0,154	0,184	0,243
	0,05	0,056	0,066	0,087	0,108	0,153
	0,01	0,012	0,015	0,022	0,030	0,049
Линка	0,10	0,110	0,123	0,150	0,176	0,228
	0,05	0,056	0,065	0,084	0,103	0,141
	0,01	0,012	0,014	0,021	0,028	0,044
Ньюмана	0,10	0,111	0,123	0,143	0,159	0,186
	0,05	0,570	0,066	0,080	0,091	0,112
	0,01	0,012	0,015	0,020	0,025	0,033
Блисса—Кокрена—Тьюки, Кадуэлла—Лесли—Брауна, Линка	0,10	0,111	0,119	0,133	0,141	0,154
	0,05	0,057	0,063	0,072	0,078	0,087
	0,01	0,012	0,014	0,018	0,019	0,023
Муда	0,10	0,111	0,120	0,430	0,166	0,211
	0,05	0,057	0,064	0,080	0,096	0,128
	0,01	0,012	0,014	0,020	0,026	0,039
Ансари—Бредли	0,10	0,101	0,125	0,135	0,154	0,190
	0,05	0,052	0,064	0,074	0,087	0,113
	0,01	0,011	0,014	0,019	0,023	0,033
Сижела—Тьюки	0,10	0,106	0,121	0,135	0,154	0,190
	0,05	0,055	0,062	0,075	0,087	0,113
	0,01	0,011	0,010	0,018	0,023	0,033

Таблица 2

Мощность критериев относительно гипотезы H_2 : $\sigma_2 = 1{,}5\sigma_0$

Критерий	α	Объём выборки n				
		10	20	40	60	100
Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана—Пирсона, Z-критерий	0,10	0,312	0,532	0,806	0,926	0,991
	0,05	0,201	0,402	0,705	0,871	0,980
	0,01	0,064	0,182	0,463	0,692	0,924
О'Брайена	0,10	0,266	0,490	0,783	0,917	0,990
	0,05	0,155	0,344	0,664	0,849	0,976
	0,01	0,039	0,127	0,379	0,628	0,903
Модифицированный Z-критерий	0,10	0,265	0,489	0,781	0,916	0,990
	0,05	0,158	0,348	0,666	0,849	0,976
	0,01	0,043	0,138	0,397	0,639	0,906
Линка	0,10	0,269	0,471	0,746	0,888	0,981
	0,05	0,163	0,338	0,628	0,812	0,960
	0,01	0,045	0,131	0,364	0,590	0,866
Ньюмана	0,10	0,296	0,473	0,682	0,796	0,901
	0,05	0,190	0,348	0,566	0,699	0,840
	0,01	0,060	0,153	0,326	0,473	0,667
Блисса—Кокрена—Тьюки, Кадуэлла—Лесли—Брауна, Линка	0,10	0,285	0,425	0,584	0,674	0,776
	0,05	0,181	0,305	0,458	0,554	0,671
	0,01	0,057	0,127	0,237	0,314	0,430
Муда	0,10	0,255	0,425	0,688	0,841	0,964
	0,05	0,158	0,302	0,565	0,751	0,931
	0,01	0,045	0,121	0,319	0,518	0,802
Ансари—Бредли	0,10	0,242	0,393	0,608	0,768	0,926
	0,05	0,150	0,270	0,484	0,659	0,869
	0,01	0,041	0,104	0,254	0,413	0,693
Сижела—Тьюки	0,10	0,246	0,383	0,609	0,768	0,926
	0,05	0,155	0,261	0,484	0,659	0,869
	0,01	0,043	0,056	0,251	0,414	0,693

Таблица 3

Мощность *m*-выборочных критериев относительно гипотезы H_1

Критерий	m = 3 при различных α			m = 5 при различных α		
	0,10	0,05	0,01	0,10	0,05	0,01
Кокрена	0,250	0,161	0,056	0,241	0,156	0,056
О'Брайена	0,243	0,153	0,051	0,230	0,144	0,048
Z-критерий	0,243	0,153	0,051	0,227	0,141	0,046
Неймана—Пирсона, Бартлетта	0,242	0,152	0,049	0,224	0,138	0,044
Модифицированный *Z*-критерий	0,240	0,150	0,048	0,223	0,137	0,044
Хартли	0,239	0,148	0,046	0,219	0,133	0,040
Левене	0,225	0,139	0,043	0,209	0,127	0,039
Кадуэлла—Лесли—Брауна	0,149	0,083	0,021	0,139	0,075	0,018
Блисса—Кокрена—Тьюки	0,147	0,082	0,021	0,136	0,075	0,019

Таблица 4

Мощность *m*-выборочных критериев относительно гипотезы H_2

Критерий	m = 3 при различных α			m = 5 при различных α		
	0,10	0,05	0,01	0,10	0,05	0,01
Кокрена	0,997	0,994	0,974	0,998	0,997	0,987
О'Брайена	0,996	0,990	0,961	0,997	0,994	0,976
Z-критерий	0,996	0,991	0,964	0,997	0,993	0,974
Неймана—Пирсона, Бартлетта	0,996	0,990	0,962	0,996	0,992	0,970
Модифицированный *Z*-критерий	0,995	0,989	0,955	0,996	0,991	0,967
Хартли	0,995	0,988	0,947	0,995	0,989	0,955
Левене	0,990	0,979	0,926	0,991	0,982	0,944
Кадуэлла—Лесли—Брауна	0,820	0,728	0,501	0,829	0,742	0,524
Блисса—Кокрена—Тьюки	0,795	0,691	0,444	0,783	0,675	0,432

На первой позиции с явным преимуществом в мощности, как и в [2], находится критерий Кокрена. На втором месте оказывается критерий О'Брайена, однако в случае анализа трёх выборок и близких конкурирующих гипотез он не имеет заметного преимущества по сравнению с *Z*-критерием Оверолла—Вудворда, Неймана—Пирсона и Бартлетта. В то же время критерий О'Брайена мощнее модифицированного *Z*-критерия и критерия Левене, также устойчивых к нарушению стандартного предположения о нормальности. С удалением конкурирующих гипотез критерий Блисса—Кокрена—Тьюки демонстрирует более высокую мощность по сравнению с критерием Кадуэлла—Лесли—Брауна.

Заключение. Необходимость применения критериев проверки гипотез об однородности дисперсий возникает при обработке групп результатов измерений, в том числе при анализе результатов межлабораторных сличений. На приведённые данные можно опираться при выборе наиболее подходящего критерия.

Использование рассмотренного множества параметрических критериев корректно при выполнении предположения о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону. При нарушении этого предположения корректность применения можно обеспечить, воспользовавшись методикой, рекомендуемой в [16].

Исследования выполнены при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» и проектной части государственного задания (проект № 2.541.2014К).

Литература

1. **Лемешко Б. Ю., Миркин Е. П.** Критерии Бартлетта и Кокрена в измерительных задачах при вероятностных законах, отличающихся от нормального // Измерительная техника. 2004. № 10. С. 10—16.

2. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Горбунова А. А.** О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. I. Параметрические критерии // Измерительная техника. 2010. № 3. С. 10—16.

3. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Горбунова А. А.** О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. II. Непараметрические критерии // Измерительная техника. 2010. № 5. С. 11—18.

4. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Постовалов С. Н., Чимитова Е. В.** Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: Монография. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011.

5. **Gorbunova A. A., Lemeshko B. Yu.** Application of Parametric Homogeneity of Variances Tests under Violation of Classical Assumption // Proc. 2nd Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis International Conf. 5—8 June 2012, Chania, Greece. P. 253—260.

6. **Кобзарь А. И.** Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

7. **O'Brien R. G.** Robust techniques for testing heterogeneity of variance effects in factorial designs // Psychometrika. 1978. V. 43. N. 3. P. 327—342.

8. **Link R. F.** The sampling distribution of the ratio of two ranges from independent samples // The annals of mathematical statistics. 1950. V. 21. N. 1. P. 112—116.

9. **Newman D.** The distribution of range in samples from a normal population, expressed in terms of an independent estimate of standard deviation // Biometrika. 1939. V. 31. P. 20—30.

10. **Bliss C. I., Cochran W. G., Tukey J. W.** A rejection criterion based upon the range // Biometrika. 1956. V. 43. P. 418—422.

11. **Leslie R. T., Brown B. M.** Use of range in testing heterogeneity of variance // Biometrika. 1966. V. 53. P. 221—227.

12. **Overall J. E., Woodward J. A.** A simple test for heterogeneity of variance in complex factorial design // Psychometrika. 1974. V. 39. P. 311—318.

13. **Overall J. E., Woodward J. A.** A robust and powerful test for heterogeneity of variance. Texas: University of Texas Medical Branch Psychometric Laboratory, 1976.

14. **Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.** Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей: учебное пособие. Новосибирск: НГТУ, 2004.

15. **ISW-Программная** система статистического анализа одномерных случайных величин. [Электрон. версия] http://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm (дата обращения 23.01.2016).

16. **Лемешко Б. Ю.** Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2017.

17. **Lee H. B., Katz G. S., Restori A. F.** A Monte Carlo Study of Seven Homogeneity of Variance Tests // J. Mathematics and Statistics. 2010. V. 6. N. 3. P. 359—366.

18. **Conover W. J., Johnson M. E., Johnson M. M.** A comparative study of tests for homogeneity of variances, with applications to the outer continental shelf bidding data // Technometrics. 1981. V. 23. N. 4. P. 351—361.

19. **Lim T. S., Loh W. Y.** A comparison of tests of equality of variances // Computational Statistics & Data Analysis. 1996. V. 22. N. 5. P. 287—301.

Дата принятия: 27.07.2016.