519.24

# Применение и мощность параметрических критериев проверки однородности дисперсий. Ч. 4

Б. Ю. ЛЕМЕШКО, Т. С. САТАЕВА

*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия, e-mail: lemeshko@ami.nstu.ru*

*Рассмотрено применение параметрических критериев проверки однородности дисперсий (Бартлетта, Кокрена, Фишера, Хартли, Левене, Неймана—Пирсона, О'Брайена, Линка, Ньюмана, Блисса—Кокрена—Тьюки, Кадуэлла—Лесли—Брауна, Z-критерия Оверолла—Вудворда, модифицированного Z-критерия), в том числе в условиях нарушения стандартного предположения о нормальности. Приведены результаты сравнительного анализа мощности критериев. Вычислены оценки достигнутого уровня значимости в ситуации неизвестных распределений статистик применяемых критериев.*

***Ключевые слова:*** *критерий, статистика, однородность дисперсий, распределение статистики, мощность критерия.*

*The application of parametric criteria for checking the homogeneity of variances (Bartlett, Cochran, Fisher, Hartley, Levene, Neyman—Pearson, O'Brien, Link, Newman, Bliss—Cochran—Tukey, Cadwell—Leslie—Brown, Overall—Woodward Z-variance and modified Overall—Woodward Z-variance tests) is considered including a case when the standard assumption of the normality is violated. The results of comparative analysis of tests power are presented. The evaluations of p-value were carried out in the case of unknown distributions of statistics of applied tests.*

***Key words:*** *test, statistic, homogeneity of variances, distribution of statistics, power of test.*

В работе [1], являющейся развитием [2, 3], представлены результаты исследования распределений статистик параметрических критериев однородности дисперсий: Неймана—Пирсона [4], О'Брайена [5], Линка (отношения размахов) [6], Ньюмана (стьюдентизированного размаха) [7], Блисса—Кокрена—Тьюки [8], Кадуэлла—Лесли—Брауна [9], Z-критерия Оверолла—Вудворда [10] и модифицированного Z-критерия [11]. В [1] приведены результаты сравнительного анализа мощности критериев, включая оценки мощности для параметрических критериев Бартлетта [12], Кокрена [13], Фишера [14], Хартли [15], Левене [16] и непараметрических: Ансари—Бредли [17], Муда [18], Сижела—Тьюки [19]. В [1—3] описаны статистики всех упомянутых критериев, предназначенных для проверки гипотезы об однородности дисперсий $m$ выборок $H_0$: $\sigma_1^2=\sigma_2^2=...=\sigma_m^2$. В качестве конкурирующей обычно рассматривают гипотезу $H_1$: $\sigma_{i_1}^2\neq\sigma_{i_2}^2$, где неравенство выполняется, по крайней мере, для одной пары индексов $i_1$, $i_2$. Проведённые исследования позволяют констатировать следующее.

1. Параметрические критерии (во всяком случае, лучшие их представители) имеют явное преимущество в мощности по сравнению с непараметрическими.

2. Стандартным предположением, обусловливающим возможность применения параметрических критериев однородности дисперсий, является принадлежность анализируемых выборок нормальному закону распределения. В случае его нарушения распределения статистик критериев, соответствующие справедливости гипотезы $H_0$, существенно изменяются. Это исключает возможность использования классических результатов, полученных в предположении о нормальности. Исключение составляет группа устойчивых критериев (О'Брайена, Левене и модифицированный Z-критерий Оверолла—Вудворда). Однако и в этих случаях зависимость от вида закона, которому принадлежат анализируемые выборки, также прослеживается.

3. Даже если выполняется стандартное предположение, то возможность корректного применения ряда параметрических критериев ограничена, так как распределения статистик неизвестны и при проверке гипотезы приходится опираться на таблицы критических значений для некоторого ряда объёмов выборок, поэтому нельзя оценивать достигнутый уровень значимости $p$.

4. При ограниченных объёмах выборок распределения статистик параметрических критериев часто существенно отличаются от известных асимптотических распределений этих статистик, имеющих место при выполнении стандартного допущения.

5. На непараметрические критерии, в которых проверяется гипотеза о равенстве параметров масштаба, не накладывается предположения о нормальности. Однако требуется выполнение не менее сильного допущения об однородности законов анализируемых выборок [3].

6. Распределения нормализованных статистик непараметрических критериев (Ансари—Бредли, Муда, Сижела—Тьюки) являются дискретными. При малых объёмах выборок они существенно отличаются от стандартного нормального закона, используемого для их описания.

7. Параметрические критерии даже в случае принадлежности выборок законам, отличающимся от нормального, имеют очевидное преимущество в мощности перед непараметрическими [3].

**Зависимость мощности критериев от вида закона.** При нарушении стандартного предположения о нормальности распределения мощность критериев исследовали для ситу-

ации принадлежности выборок обобщённому нормальному закону с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_0}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_0)} \exp\left[-\left(|x - \theta_2|/\theta_1\right)^{\theta_0}\right], \qquad (1)$$

где параметр формы $\theta_0$ принимает различные значения.

Частные случаи этого семейства распределений — нормальный закон при $\theta_0 = 2$ и распределение Лапласа при $\theta_0 = 1$. Оценки мощности критериев, полученные в случае принадлежности выборок обобщённому нормальному закону (1) с разными значениями $\theta_0$ при объёмах выборок $n_i = 100$, $i = \overline{1, m}$, приведены в табл. 1, 2. Обозначение $De(\theta_0)$ соответствует распределению вида (1) при различных значениях параметра формы $\theta_0$. Чем меньше параметр формы $\theta_0$, тем тяжелее хвосты распределения $De(\theta_0)$, и наоборот — чем больше параметр, тем хвосты легче. В качестве конкурирующей гипотезы $H_1$ рассматривали ситуацию, когда $m - 1$ выборка принадлежала закону с некоторым $\sigma = \sigma_0$, а выборка с номером $m$ — закону с дисперсией $\sigma_m = 1{,}5\sigma_0$.

Критерии упорядочены по убыванию мощности, показанной ими при нормальном законе (см. табл. 1 при $De(2)$). Полужирным шрифтом выделены максимальные мощности, зафиксированные при соответствующем законе. Из оценок мощности следует, что порядок предпочтения критериев меняется в зависимости от тяжести хвостов. Можно отметить, что критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана—Пирсона и Z-критерий Оверолла—Вудворда остаются эквивалентными по мощности в ситуациях нарушения стандартного предположения о нормальности и принадлежности двух анализируемых выборок некоторому симметричному закону. Аналогично, эквивалентной по мощности остаётся группа критериев Блисса—Кокрена—Тьюки, Кадуэлла—Лесли—Брауна и Линка.

Если выборки принадлежат законам с более лёгкими (по сравнению с нормальным законом) хвостами, то критерии упорядочиваются по мощности так же, как и в случае нормального закона.

При (симметричных) законах с более тяжёлыми, чем у нормального закона хвостами порядок предпочтения меняется. В случае тяжёлых хвостов (см. табл. 1 при $De(0{,}5)$) критерии упорядочиваются следующим образом:

*Муда ≻ Левене ≻ Сижела—Тьюки ~ Ансари—Бредли ≻ О'Брайена ≻ Модифицированный Z-критерий ≻ группа критериев (Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана—Пирсона, Z-критерий Оверолла—Вудворда) ≻ Ньюмана ≻ группа критериев (Блисса—Кокрена—Тьюки, Кадуэлла—Лесли—Брауна, Линка).*

Следует отметить, что с увеличением тяжести хвостов снижается мощность всех рассматриваемых параметрических критериев. Критерии Ньюмана, Блисса—Кокрена—Тьюки, Кадуэлла—Лесли—Брауна, Линка для любых наблюдаемых законов (в данном случае, при $n_i = 100$) имеют преимущество перед непараметрическими, но только при очень лёгких хвостах наблюдаемых законов. С увеличением числа сравниваемых выборок ситуация меняется (см. табл. 2). Практически исчезают группы эквивалентных критериев. Исключение составляют лишь критерии Бартлетта и Неймана—Пирсона, которые в любой ситуации остаются эквивалентными по мощности.

В случае тяжёлых хвостов критерии по убыванию мощности располагаются в другом порядке:

*Левене ≻ О'Брайена ≻ Модифицированный Z-критерий ≻ Бартлетта ~ Неймана—Пирсона ≻ Z-критерий Оверолла—Вудворда ≻ Хартли ≻ Кокрена ≻ Кадуэлла—Лесли—Брауна ≻ Блисса—Кокрена—Тьюки.*

Результаты данного сравнительного анализа можно дополнить оценками мощности критериев Клотца [20] и Флайне—Киллина [21], представленными в [22].

**Вычисление достигнутого уровня значимости.** Принятие решения о результатах проверки гипотезы $H_0$ на основании достигнутого уровня значимости $p$ всегда более обосновано и информативно, чем при сравнении рассчитанного значения статистики $S^*$ с указанными критическими значениями, извлекаемыми из соответствующей таблицы процентных точек. В последнем случае неясно, насколько обосновано принимаемое решение. В случае правостороннего критерия $p$ определяется соотношением

$$p = P\left\{S > S^* | H_0\right\} = 1 - G\left(S^* | H_0\right), \qquad (2)$$

где $G\left(S|H_0\right)$ — функция распределения вероятностей статистики применяемого критерия при справедливости $H_0$.

В случае двустороннего критерия критическая область состоит из двух частей, а $p$ находится из выражения

$$p = 2\min\left\{G\left(S^*|H_0\right), 1 - G\left(S^*|H_0\right)\right\}. \qquad (3)$$

Вычисление $p$ в соответствии с (2) или (3) не вызывает труда при известном распределении статистики критерия. Если информация о распределении статистики критерия отсутствует и представлена лишь таблицей процентных точек, либо объёмы выборок относительно невелики и таковы, что распределение статистики существенно отличается от предельного (асимптотического), то корректное вычисление $p$ представляет собой некоторую проблему.

Распределения большинства параметрических критериев однородности дисперсий (даже в классической ситуации) существенно зависят от объёмов выборок. Поэтому при формировании решения о результатах проверки гипотезы $H_0$ приходится опираться на таблицы процентных точек, сформированные для ограниченных наборов $n_i$, часто подразумевающие равенство объёмов сравниваемых выборок. Однако и в подобных ситуациях можно повышать качество статистических выводов, находя оценки $p$.

В настоящее время из-за увеличения возможностей вычислительной техники в программных системах статистического анализа существенно возрастает роль компьютерных методов исследования закономерностей. Если распределение статистики критерия, используемого для проверки некоторой гипотезы, к моменту начала проверки (в силу разных причин) оказывается неизвестным (при данных объёмах $n_i$), то появляется возможность исследования распределения статистики в реальном времени, т. е. в интерактивном режиме [23—25]. В таком режиме, например, можно исследовать неизвестное распределение статистики любого критерия однородности дисперсий, зависящее от объёма выборки, при тех значениях $n_i$, которые соответствуют анализируемым выборкам, и по найденному в результате моделирования эмпирическому распределению статистики оценивать достигнутый уровень значимости. При таком подходе необходимое для проверки гипотезы эмпирическое распределение $G_N(S_n|H_0)$ статистики соответствующего критерия строится в результате статистического моделирования с точностью, зависящей от числа экспериментов $N$ в методе Монте—Карло [26]. Далее, по эмпирическому распре-

Таблица 1

**Мощность критериев относительно $H_1$ при $m = 2$**

| Критерий | *De* (0,5) | | | *De* (2) | | | *De* (5) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Уровень значимости α | | | | | | | | |
| | 0,100 | 0,050 | 0,010 | 0,100 | 0,050 | 0,010 | 0,100 | 0,050 | 0,010 |
| Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана—Пирсона, *Z*-критерий | 0,162 | 0,091 | 0,022 | **0,564** | **0,438** | **0,218** | **0,791** | **0,689** | **0,446** |
| Модифицированный *Z*-критерий | 0,167 | 0,096 | 0,024 | 0,555 | 0,427 | 0,205 | 0,790 | 0,688 | 0,446 |
| О'Брайена | 0,176 | 0,103 | 0,029 | 0,555 | 0,427 | 0,205 | 0,782 | 0,674 | 0,420 |
| Линка | 0,215 | 0,132 | 0,040 | 0,515 | 0,388 | 0,180 | 0,649 | 0,524 | 0,283 |
| Муда | **0,222** | **0,138** | **0,043** | 0,468 | 0,344 | 0,152 | 0,659 | 0,536 | 0,298 |
| Сижела—Тьюки, Ансари—Бредли | 0,213 | 0,131 | 0,041 | 0,405 | 0,287 | 0,119 | 0,542 | 0,416 | 0,204 |
| Ньюмана | 0,144 | 0,080 | 0,020 | 0,386 | 0,276 | 0,116 | 0,720 | 0,608 | 0,370 |
| Блисса—Кокрена—Тьюки, Кадуэлла—Лесли—Брауна, Линка | 0,128 | 0,069 | 0,016 | 0,289 | 0,190 | 0,068 | 0,650 | 0,527 | 0,292 |

Таблица 2

**Мощность критериев относительно $H_1$ при $m = 5$**

| Критерий | *De* (0,5) | | | *De* (2) | | | *De* (5) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Уровень значимости α | | | | | | | | |
| | 0,100 | 0,050 | 0,010 | 0,100 | 0,050 | 0,010 | 0,100 | 0,050 | 0,010 |
| Кокрена | 0,134 | 0,070 | 0,015 | **0,624** | **0,515** | **0,316** | **0,869** | **0,807** | **0,643** |
| О'Брайена | 0,160 | 0,092 | 0,026 | 0,575 | 0,460 | 0,258 | 0,815 | 0,731 | 0,533 |
| *Z*-критерий | 0,141 | 0,074 | 0,016 | 0,565 | 0,445 | 0,241 | 0,811 | 0,722 | 0,512 |
| Модифицированный *Z*-критерий | 0,148 | 0,081 | 0,019 | 0,554 | 0,433 | 0,228 | 0,810 | 0,721 | 0,514 |
| Бартлетта, Неймана—Пирсона | 0,142 | 0,075 | 0,016 | 0,557 | 0,434 | 0,227 | 0,806 | 0,713 | 0,495 |
| Хартли | 0,140 | 0,074 | 0,016 | 0,545 | 0,418 | 0,204 | 0,799 | 0,699 | 0,459 |
| Левене | **0,197** | **0,119** | **0,036** | 0,513 | 0,390 | 0,197 | 0,657 | 0,542 | 0,323 |
| Блисса—Кокрена—Тьюки | 0,114 | 0,059 | 0,013 | 0,262 | 0,170 | 0,061 | 0,704 | 0,601 | 0,384 |
| Кадуэлла—Лесли—Брауна | 0,119 | 0,062 | 0,013 | 0,253 | 0,158 | 0,052 | 0,638 | 0,513 | 0,280 |

делению $G_N(S_n|H_0)$ и найденному значению статистики $S^*$ критерия в соответствии с (2) или (3) определяют оценку $p$. Таким образом, результаты статистического моделирования, осуществляемого в процессе проводимого анализа, используются при формировании выводов по итогам проверки гипотезы. Реализация интерактивного режима требует развитого программного обеспечения, позволяющего в целях ускорения распараллеливать процессы моделирования и привлекать доступные вычислительные ресурсы [27]. В условиях распараллеливания время построения распределения $G_N(S_n|H_0)$ статистики критерия оказывается незначительным на фоне полного решения задачи анализа.

**Критерии в нестандартных условиях.** Использование интерактивного режима для исследования распределений статистик позволяет применять критерии в условиях нарушения стандартного предположения о принадлежности результатов измерений нормальному закону. Отклонение от нормальности приводит к существенным изменениям распределений $G(S|H_0)$ статистик критериев однородности дисперсий. В меньшей степени это касается критерия О'Брайена, модифицированного $Z$-критерия Оверолла—Вудворда и модификаций критерия Левене. За эту устойчивость критерии «платят» некоторым снижением мощности. Распределения $G(S|H_0)$ статистик перечисленных критериев, несмотря на устойчивость, настолько отклоняются от имеющих место при стандартных предположениях, что в случае принадлежности выборок законам с тяжелыми хвостами пренебрегать этим нельзя. Поэтому корректность выводов зависит от того, насколько точно знания о распределении $G(S|H_0)$ соответствуют реальным условиям, характеризующим результаты измерений.

Рассмотрим использование интерактивного режима исследования $G(S|H_0)$ и точность оценивания уровня значимости $p$ для данных критериев однородности дисперсий в зависимости от числа экспериментов $N$ при имитационном моделировании эмпирических распределений статистик, в том числе — при нарушении стандартного предположения о нормальности. Чтобы погрешность оценивания $p$ не превышала 0,01 с доверительной вероятностью 0,99, количество экспериментов $N$ должно быть порядка 16600, а чтобы погрешность не превышала 0,001 — $N$ должно составлять порядка 1660000 [26].

*Пример 1.* Пусть проверяется гипотеза о равенстве дисперсий двух следующих выборок объёмом $n_i = 40$, $i = \overline{1, 2}$, в предположении о принадлежности их нормальному закону:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,205 | 0,232 | –0,219 | 0,829 | 0,127 | 0,939 | 0,995 | 0,706 | –0,450 | –0,361 |
| –0,364 | –0,107 | 1,054 | –0,095 | –2,188 | 0,453 | –1,052 | 0,640 | –0,417 | –2,144 |
| –3,473 | –0,857 | –0,678 | 0,070 | –1,139 | 0,574 | 0,409 | 0,206 | 0,184 | 1,273 |
| –0,326 | –1,245 | 0,227 | 0,185 | 0,383 | 0,126 | 0,255 | 1,110 | –0,310 | –0,178 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,269 | –0,187 | –0,013 | –1,248 | –0,247 | –0,541 | 1,209 | –2,814 | 0,575 | –0,452 |
| –0,427 | 0,337 | 1,138 | –1,090 | –0,858 | –0,006 | –1,212 | –0,180 | 1,751 | –0,485 |
| –0,779 | –0,752 | 0,342 | –0,175 | 0,509 | 0,209 | 0,596 | 1,869 | 1,764 | 1,084 |
| 0,995 | 0,633 | 0,003 | –0,642 | –1,225 | –0,115 | –1,543 | 0,137 | –1,290 | 2,189 |

В табл. 3 приведены значения статистик, вычисленные при проверке однородности дисперсий, соответствующих этим двум выборкам, представлены оценки $p$, полученные по смоделированным распределениям статистик критериев при $N = 10^4$ и $N = 10^6$ в предположении о принадлежности случайных величин нормальному закону. Для критериев, относительно которых известны асимптотические распределения статистик, показаны также теоретические оценки $p$, вычисленные в соответствии с этими распределениями.

В данном случае проверяемая гипотеза $H_0$ справедлива, но обе выборки моделировались в соответствии с распределением Лапласа при $\sigma = 1$. Поэтому в последней колонке (см. табл. 3) представлены оценки $p$, вычисленные по распределениям статистик критериев, полученным при $N = 10^6$ в предположении о принадлежности случайных величин закону Лапласа. Наблюдается существенное различие оценок $p$ при законах Лапласа и нормальном, однако при устойчивых критериях Левене, О'Брайена и модифицированного $Z$-критерия оно минимально.

Если реальный закон распределения обладает более тяжёлыми хвостами по сравнению с нормальным, а при использовании параметрического критерия однородности дисперсий можно учитывать на классические результаты, связанные с выполнением предположения о нормальности, то это приведёт к увеличению (по сравнению с заданной) вероятности ошибки 1-го рода и уменьшению вероятности ошибки 2-го рода. Если же реальный закон имеет более лёгкие хвосты, то в аналогичной ситуации это приведёт к уменьшению вероятности ошибки 1-го рода и увеличению вероятности ошибки 2-го рода.

Таблица 3

**Оценки уровня значимости $p$ при анализе двух выборок и справедливости гипотезы $H_0$**

| Критерий | Значение статистики | $p$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Нормальный закон | | | Закон Лапласа |
| | | теоретическая оценка | $N = 10^4$ | $N = 10^6$ | $N = 10^6$ |
| Бартлетта | 0,268028 | 0,604658 | 0,605 | 0,6045 | 0,734 |
| Кокрена | 0,541643 | — | 0,605 | 0,6045 | 0,734 |
| Фишера | 0,846236 | 0,604671 | 0,596 | 0,6045 | 0,734 |
| Хартли | 1,181700 | — | 0,605 | 0,6045 | 0,734 |
| Неймана—Пирсона | 1,003490 | 0,607000 | 0,605 | 0,6045 | 0,734 |
| $Z$-критерий | 0,279266 | 0,597183 | 0,605 | 0,6045 | 0,734 |
| Модифицированный $Z$-критерий | 0,115111 | 0,734398 | 0,741 | 0,7348 | 0,732 |
| О'Брайена | 0,162623 | 0,687856 | 0,702 | 0,6971 | 0,722 |
| Левене | 0,604953 | — | 0,454 | 0,4451 | 0,459 |
| Ньюмана | 4,564110 | — | 0,780 | 0,7777 | 0,730 |
| Линка | 0,948631 | — | 0,806 | 0,8079 | 0,877 |
| Блисса—Кокрена—Тьюки | 0,513181 | — | 0,814 | 0,8084 | 0,878 |
| Кадуэлла—Лесли—Брауна | 1,054150 | — | 0,814 | 0,8084 | 0,878 |

*Пример 2.* Проверим гипотезу о равенстве дисперсий трёх выборок, две из которых взяты из предыдущего примера, а третья приведена ниже:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,254 | –0,254 | –0,017 | 0,002 | 1,937 | –2,476 | –0,092 | –0,543 | 2,588 | 1,970 |
| 1,869 | 0,453 | –0,616 | –2,806 | 2,382 | 0,476 | 0,641 | –2,581 | –0,659 | –0,027 |
| 1,775 | 2,154 | –1,801 | –0,774 | –0,522 | 1,413 | –0,042 | –0,175 | –0,929 | 0,664 |
| –0,298 | 0,409 | 0,040 | 0,418 | 0,478 | –0,052 | –4,354 | 1,521 | –2,126 | 1,177 |

Эта выборка также смоделирована в соответствии с распределением Лапласа, но при $\sigma = 1{,}5$.

В табл. 4 приведены значения статистик, вычисленные при проверке гипотезы об однородности дисперсий, соответствующих трём рассматриваемым выборкам. В предположении о принадлежности выборок нормальному закону представлены теоретические оценки $p$ и оценки, вычисленные по результатам статистического моделирования распределений статистик при $N = 10^6$. В предположении о принадлежности выборок закону Лапласа приведены только оценки $p$ при $N = 10^6$. Из приводимых результатов следует, что если проигнорировать факт нарушения стандартного предположения о нормальности, то по всем критериям (за исключением модифицированного $Z$-критерия) получим значения $p$ меньшие по сравнению с истинными, имеющими место при законе Лапласа. Если бы реальный закон обладал более лёгкими хвостами по сравнению с нормальным, то значения $p$, найденные в предположении о нормальности, превышали бы истинные значения.

Таблица 4

**Оценки уровня значимости $p$ при анализе трёх выборок ($\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3$ = 1:1:1,5)**

| Критерий | Значение статистики | $p$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Нормальный закон | | Закон Лапласа |
| | | теоретическая оценка | $N = 10^6$ | $N = 10^6$ |
| Бартлетта | 9,729430 | 0,0077 | 0,0079 | 0,1198 |
| Кокрена | 0,534165 | — | 0,0032 | 0,0667 |
| Хартли | 2,501720 | — | 0,0140 | 0,1508 |
| Неймана—Пирсона | 1,087740 | — | 0,0079 | 0,1198 |
| $Z$-критерий | 5,005400 | 0,0067 | 0,0065 | 0,1098 |
| Модифицированный $Z$-критерий | 2,315710 | 0,0987 | 0,0953 | 0,0897 |
| О'Брайена | 3,224100 | 0,0434 | 0,0396 | 0,0336 |
| Левене | 2,824730 | — | 0,0661 | 0,0713 |
| Блисса—Кокрена—Тьюки | 0,415913 | — | 0,0861 | 0,3301 |
| Кадуэлла—Лесли—Брауна | 1,462710 | — | 0,1899 | 0,5106 |

В сказанное выше (см. табл. 4) не укладывается результат для модифицированного $Z$-критерия Оверолла—Вудворда, что связано с приближенным характером построения модификации [1]. Приведённые примеры показывают, что параметрические критерии однородности дисперсий, обладающие наибольшей мощностью, можно корректно применять как при выполнении стандартного предположения о нормальности, так и в условиях его нарушения. И в том и другом случаях возможность вычисления оценок достигнутых уровней значимости повышает информативность статистических выводов.

Реализация такой процедуры применения критериев возможна с опорой на программное обеспечение, подобное [24]. Предварительным условием перехода к ней является идентификация вида закона распределения, наилучшим образом описывающего анализируемые выборки [28]. Решение о наиболее предпочтительной модели закона может лежать за рамками задачи проверки гипотезы об однородности. В противном случае, выбор модели закона может осуществляться в процессе анализа совокупности исследуемых выборок (или объединённой выборки). Если при этом в качестве наилучшей модели оказывается некоторое семейство распределений (например, обобщённый нормальный закон, семейства гамма- и бета-распределений и т. п.), в случае которого конкретный вид закона определяется значением параметра (или параметров) формы, то используемая модель закона должна быть идентифицирована с точностью до значения этого параметра (его оценка должна быть найдена и зафиксирована).

Исследования выполнены при поддержке Минобрнауки России в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» и проектной части государственного задания (проект 1.1009.2017/ПЧ).

Литература

1. **Лемешко Б. Ю., Сатаева Т. С.** Применение и мощность параметрических критериев проверки однородности дисперсий. Ч. 3 // Измерительная техника. 2017. № 1. С. 8—13.

2. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Горбунова А. А.** О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. 1. Параметрические критерии // Измерительная техника. 2010. № 3. С. 10—16.

3. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Горбунова А. А.** О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. 2. Непараметрические критерии // Измерительная техника. 2010. № 5. С. 11—18.

4. **Кобзарь А. И.** Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

5. **O'Brien R. G.** Robust techniques for testing heterogeneity of variance effects in factorial designs // Psychometrika. 1978. V. 43. No. 3. P. 327—342.

6. **Link R. F.** The sampling distribution of the ratio of two ranges from independent samples // The annals of mathematical statistics. 1950. V. 21. No. 1. P. 112—116.

7. **Newman D.** The distribution of range in samples from a normal population, expressed in terms of an independent estimate of standard deviation // Biometrika. 1939. V. 31. P. 20—30.

8. **Bliss C. I., Cochran W. G., Tukey J. W.** A rejection criterion based upon the range // Biometrika. 1956. V. 43. P. 418—422.

9. **Leslie R. T., Brown B. M.** Use of range in testing heterogeneity of variance // Biometrika. 1966. V. 53. P. 221—227.

10. **Overall J. E., Woodward J. A.** A simple test for heterogeneity of variance in complex factorial design // Psychometrika. 1974. V. 39. P. 311—318.

11. **Overall J. E., Woodward J. A.** A robust and powerful test for heterogeneity of variance // University of Texas Medical Branch Psychometric Laboratory. 1976.

12. **Bartlett M. S.** Properties of sufficiency of statistical tests // Proc. Roy. Soc. 1937. A. 160. P. 268—287.

13. **Cochran W. G.** The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total // Annals of Eugenics. 1941. V. 11. P. 47—52.

14. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.

15. **Hartley H. O.** The maximum F-ratio as a short-cut test of heterogeneity of variance // Biometrika. 1950. V. 37. P. 308—312.

16. **Levene H.** Robust tests for equality of variances // Contributions to Probability and Statistics: Essays in Honor of Harold Hotelling. 1960. P. 278—292.

17. **Ansari A. R., Bradley R. A.** Rank-tests for dispersions // The annals of mathematical statistics. 1960. V. 31. No. 4. P. 1174—1189.

18. **Mood A.** On the asymptotic efficiency of certain nonparametric tests // The annals of mathematical statistics. 1954. V. 25. P. 514—522.

19. **Siegel S., Tukey J. W.** A nonparametric sum of rank procedure for relative spread in unpaired samples // J. American Statistical Association. 1960. V. 55. No. 291. P. 429—445.

20. **Klotz J.** Nonparametric tests for scale // The annals of mathematical statistics. 1962. V. 33. P. 498—512.

21. **Fligner M. A., Killeen T. J.** Distribution-Free Two-Sample Tests for Scale // J. American Statistical Association. 1976. V. 71. No. 353. P. 210—213.

22. **Лемешко Б. Ю.** Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. (Научная мысль). DOI: 10.12737/6086.

23. **Gorbunova A. A., Lemeshko B. Yu.** Application of Variance Homogeneity Tests Under Violation of Normality Assumption // Proc. Int. Workshop «Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference» — AMSA'2011. Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. P. 28—36.

24. **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B., Rogozhnikov A. P.** Real-Time Studying of Statistic Distributions of Non-Parametric Goodness-of-Fit Tests when Testing Complex Hypotheses // Proc. Int. Workshop «Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference» — AMSA'2011. Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. P. 19—27.

25. **Lemeshko B. Yu., Gorbunova A. A., Lemeshko S. B., Rogozhnikov A. P.** Application of Nonparametric Goodness-of-fit tests for Composite Hypotheses in Case of Unknown Distributions of Statistics // Proc. Int. Workshop «Applied Methods of Statistical Analysis. Applications in Survival Analysis, Reliability and Quality Control» — AMSA'2013. Novosibirsk, Russia, 25-27 September, 2013. P. 8—24.

26. **Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.** Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей: учебное пособие. Новосибирск: НГТУ, 2004.

27. **ISW** — Программная система статистического анализа одномерных случайных величин. [Электрон. ресурс] http://www.ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm (дата обращения 23.05.2016).

28. **Лемешко Б. Ю.** О задаче идентификации закона распределения случайной составляющей погрешности измерений // Метрология. 2004. № 7. С. 8—17.

*Дата принятия: 27.07.2016.*