Измерительная техника. 2018. – № 7. – С. 3-7. **DOI:** *10.32446/0368-1025it-2018-7-3-7*

УДК 519.24

Мощность *k*-выборочных критериев проверки однородности законов

Б.Ю. Лемешко, И.В. Веретельникова
Новосибирский государственный технический университет

Построены модели предельных распределений k-выборочного критерия однородности Андерсона–Дарлинга. Предложены новые k-выборочные критерии однородности, базирующиеся на использовании двухвыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга. Построены модели предельных распределений для предложенных критериев. Проведен сравнительный анализ мощности множества k-выборочных критериев, включая критерии Жанга.

Ключевые слова: k-выборочные критерии, критерии однородности, статистика критерия, распределение статистики, мощность критерия

Power of k-sample tests for homogeneity of law

B.Yu. Lemeshko, I.V. Veretelnikova
Novosibirsk State Technical University

Models of limiting distributions of the k-sample Anderson–Darling homogeneity test have been made. New k-sample homogeneity tests based on the Smirnov, Lehmann–Rosenblatt and Anderson–Darling two-sample test have been proposed. Models of the limiting distributions for the proposed test have been made. Comparative analysis of the power of the set of k-sample tests, including the Zhang test, has been carried out.

Key words: k-samples tests, homogeneity tests, test statistic, distribution of statistics, power of test

С необходимостью решения задач проверки гипотез о принадлежности двух (или более) выборок случайных величин одной и той же генеральной совокупности (проверки однородности) сталкиваются в различных областях. Такая задача естественно возникает при сличении результатов лабораторных измерений, или аттестации средств измерений, когда пытаются убедиться в том, что закон распределения случайных ошибок не претерпел существенных изменений по истечении некоторого интервала времени.

Задача проверки однородности k выборок формулируется следующим образом. Пусть x_{ij} j-е наблюдение i-й выборки $j = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, k}$. Предположим, что i-й выборке соответствует непрерывная функция распределения $F_i(x)$. Необходимо проверить гипотезу вида $H_0 : F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x)$ без указания общего для них закона распределения.

Общий подход к построению k-выборочных критериев однородности законов, являющихся аналогами двухвыборочных критериев Колмогорова–Смирнова и Крамера–Мизеса (Лемана–Розенблатта), рассматривался в работе [1]. При этом подходе статистика критерия представляет собой меру отклонения эмпирических распределений, соответствующих конкретным выборкам, от эмпирического распределения, построенного по совокупности анализируемых выборок. О k-выборочном варианте критерия Колмогорова–Смирнова, построенного по этому принципу, упоминается в [2, 3]. k-выборочный вариант критерия Андерсона–Дарлинга предложен в [6]. Построенные Жангом в [5, 6, 7] критерии однородности являются развитием критериев однородности Смирнова [8], Лемана–Розенблатта [9, 10] и Андерсона–Дарлинга [11] и позволяют анализировать $k \geq 2$ выборок.

Применение k-выборочных критериев на практике сдерживается тем, что, в лучшем случае, известны лишь критические значения статистик для соответствующих k, как в случае критерия Андерсона–Дарлинга [6], а возможность использования критериев Жанга упирается в необходимость для формирования вывода о результатах проверки гипотезы искать распределения статистик критериев с использованием статистического моделирования.

В настоящей работе для ряда k-выборочных критериев однородности мы приведём построенные модели предельных распределений статистик, что даст возможность при использовании этих критериев осуществлять корректные и информативные выводы с вычислением достигнутого уровня значимости (p_{value}).

k**-выборочный критерий Андерсона–Дарлинга** [4]. Обозначим эмпирическую функцию распределения, соответствующую i-й выборке, как $F_{in_i}(x)$, а эмпирическую функцию распределения, соответствующую объединённой выборке объёмом $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, как $H_n(x)$. Статистика k-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга (AD) определяется выражением

$$A_{kn}^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i \int_{B_n} \frac{[F_{in_i}(x) - H_n(x)]^2}{\left(1 - H_n(x)\right) H_n(x)} dH_n(x),$$

где $B_n = \{x \in R: H_n(x) < 1\}$. В предположении о непрерывности $F_i(x)$ по упорядоченной объединённой выборке $X_1 \le X_2 \le \ldots \le X_n$ в [4] получено простое выражение для вычисления статистики:

$$A_{kn}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\left(nM_{ij} - jn_i\right)^2}{j(n-j)},$$

где M_{ij} – число элементов в i-й выборке, которые не больше чем X_j. Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики.

Окончательно в работе [4] статистика приобретает следующий вид:

$$T_{kn} = \frac{A_{kn}^2 - (k-1)}{\sqrt{D[A_{kn}^2]}}, \tag{1}$$

где дисперсия определяется выражением [4]

$$D\left[A_{kn}^2\right] = \frac{an^3 + bn^2 + cn + d}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

при

$a = (4g-6)(k-1) + (10-6g)H$,

$b = (2g-4)k^2 + 8hk + (2g-14h-4)H - 8h + 4g - 6$,

$c = (6h+2g-2)k^2 + (4h-4g+6)k + (2h-6)H + 4h$,

$d = (2h+6)k^2 - 4hk$,

где

$$H = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i},\quad h = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i},\quad g = \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\frac{1}{(n-i)j}.$$

Асимптотические (предельные) распределения статистики (1) зависят от числа сравниваемых выборок k и не зависят от n_i. С ростом k распределение статистики (1) медленно сходится к стандартному нормальному закону.

В [4] для статистики (1) для ряда k построена таблица критических значений. На основании результатов статистического моделирования нами были построены модели предельных распределений статистики (4) для $k = 2 \div 11$ [12, 13, 14]. Хорошими моделями оказались законы семейства бета-распределений III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 \mathrm{B}(\theta_0, \theta_1)}\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0 - 1}\left(1 - \frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1 - 1} \Bigg/ \left[1 + (\theta_2 - 1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}, \tag{2}$$

представленные в таблице 1 в виде $\mathrm{B}_{\mathrm{III}}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ при конкретных значениях параметров этого закона. Приведенные модели построены по смоделированным выборкам статистик при числе имитационных экспериментов $N = 10^6$ и $n_i = 10^3$.

Критерии Жанга [5, 6, 7] позволяют сравнивать $k \ge 2$ выборок.

Пусть $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}$ упорядоченные выборки непрерывных случайных величин с функциями распределения $F_i(x)$, ($i = \overline{1,k}$) и, как и ранее, $X_1 < X_2 < \ldots < X_n$, где $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, объединённая упорядоченная выборка. Обозначим R_{ij} ранг j-го упорядоченного наблюдения x_{ij} i-й выборки в объединённой выборке. Пусть $X_0 = -\infty$, $X_{n+1} = +\infty$, а ранги $R_{i,0} = 1$, $R_{i,n_i+1} = n+1$.

Таблица 1. Модели предельных распределений статистики (1)

k	Модель
2	B_{III} (3.1575, 2.8730, 18.1238, 15.0000, –1.1600)
3	B_{III} (3.5907, 4.5984, 7.8040, 14.1310, –1.5000)
4	B_{III} (4.2657, 5.7035, 5.3533, 12.8243, –1.7500)
5	B_{III} (6.2992, 6.5558, 5.6833, 13.010, –2.0640)
6	B_{III} (6.7446, 7.1047, 5.0450, 12.8562, –2.2000)
7	B_{III} (6.7615, 7.4823, 4.0083, 11.800, –2.3150)
8	B_{III} (5.8057, 7.8755, 2.9244, 10.900, –2.3100)
9	B_{III} (9.0736, 7.4112, 4.1072, 10.800, –2.6310)
10	B_{III} (10.2571, 7.9758, 4.1383, 11.186, –2.7988)
11	B_{III} (10.6848, 7.5950, 4.2041, 10.734, –2.8400)
∞	N(0.0, 1.0)

В критериях используется модификация эмпирической функции распределения $\hat{F}(t)$, принимающая в точках разрыва X_m, $m = \overline{1,n}$, значения $\hat{F}(X_m) = (m - 0.5)/n$ [5].

Статистика Z_{K} критерия однородности Жанга имеет вид [5]:

$$Z_{\text{K}} = \max_{1 \le m \le n} \left\{ \sum_{i=1}^{k} n_i \left[F_{i,m} \ln \frac{F_{i,m}}{F_m} + \left(1 - F_{i,m}\right) \ln \frac{1 - F_{i,m}}{1 - F_m} \right] \right\}, \tag{3}$$

где $F_m = \hat{F}(X_m)$, так что $F_m = (m-0.5)/n$, а вычисление $F_{i,m} = \hat{F}_i(X_m)$ осуществляется следующим образом. В начальный момент значения $j_i = 0$, $i = \overline{1,k}$. Если $R_{i,j_i+1} = m$, то $j_i := j_i + 1$ и $F_{i,m} = (j_i - 0.5)/n_i$, в противном случае если $R_{i,j_i} < m < R_{i,j_i+1}$, то $F_{i,m} = j_i/n_i$.

Критерий *правосторонний*: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при *больших* значениях статистики (3).

Статистика Z_{A} **критерия однородности** k выборок определяется выражением [5]:

$$Z_{\text{A}} = -\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{F_{i,m}\ln F_{i,m} + \left(1-F_{i,m}\right)\ln\left(1-F_{i,m}\right)}{(m-0.5)(n-m+0.5)}, \qquad (4)$$

где F_m и $F_{i,m}$ вычисляются, как определено выше.

Критерий *левосторонний*: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при *малых* значениях статистики (4). Распределения статистики (4) также зависят от объема выборок и числа сравниваемых выборок.

Статистика Z_C **критерия** однородности k выборок определяется выражением [5]:

$$Z_C = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\left(\frac{n_i}{j-0.5}-1\right)\ln\left(\frac{n}{R_{i,j}-0.5}-1\right). \qquad (5)$$

Этот критерий также *левосторонний*: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при *малых* значениях статистики (5).

Зависимость распределений статистик (3) – (5) от объёмов выборок осложняет использование критериев Жанга, так как возникают проблемы с вычислением оценки p_{value}.

В тоже время, отсутствие информации о законах распределения статистик и таблиц критических значений в современных условиях не является серьёзным недостатком критериев, так как в программном обеспечении, осуществляющем поддержку применения критериев, несложно организовать вычисление достигнутых уровней значимостей p_{value}, используя методы статистического моделирования.

Другой подход к построению k-выборочных критериев. Для анализа k выборок можно к каждой паре применить двухвыборочный критерий со статистикой S (всего $(k-1)k/2$ пар), а решение о принятии или отклонении гипотезы H_0 принимать по совокупности результатов. В качестве статистики такого k-выборочного критерия (в случае использования правостороннего двухвыборочного критерия) можно рассмотреть, например, статистику вида

$$S_{\max} = \max_{\substack{1\le i\le k\\ i<j\le k}} \{S_{i,j}\}, \qquad (6)$$

где $S_{i,j}$ – значения статистик используемого двухвыборочного критерия, полученные при анализе i-й и j-й выборок.

Проверяемая гипотеза H_0 будет отклоняться при **больших** значениях статистики $S_{\max}$. Преимуществом такого рода критерия является и то, что в результате будет определена пара выборок, различие между которыми окажется наиболее значимым с позиций используемого двухвыборочного критерия.

В качестве $S_{i,j}$ можно использовать статистики двухвыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблата, Андерсона–Дарлинга. В этом случае распределения соответствующих статистик $S_{\max}$ сходятся к некоторым предельным, модели которых могут быть найдены по результатам статистического моделирования.

Используемая в критерии Смирнова статистика D_{n_2,n_1} вычисляется в соответствии с соотношениями [8]:

$$D^{+}_{n_2,n_1} = \max_{1\le r\le n_2}\left[\frac{r}{n_2} - F_{1n_1}(x_{2r})\right] = \max_{1\le s\le n_1}\left[F_{2n_2}(x_{2s}) - \frac{s-1}{n_1}\right],$$

$$D^{-}_{n_2,n_1} = \max_{1\le r\le n_2}\left[F_{1n_1}(x_{2r}) - \frac{r-1}{n_2}\right] = \max_{1\le s\le n_1}\left[\frac{s}{n_1} - F_{2n_2}(x_{1s})\right],$$

$$D_{n_2,n_1} = \max\left(D^{+}_{n_2,n_1}, D^{-}_{n_2,n_1}\right).$$

При справедливости гипотезы H_0 и неограниченном увеличении объемов выборок статистика

$$S_{\mathrm{C}} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} D_{n_2,n_1} \tag{7}$$

в пределе подчиняется распределению Колмогорова $K(S)$ [8].

В случае k**-выборочного варианта критерия Смирнова** в качестве $S_{i,j}$ в (6) предпочтительней использовать модификацию статистики Смирнова

$$S_{\mathrm{mod}} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}\left(D_{n_2,n_1} + \frac{n_1+n_2}{4.6 n_1 n_2}\right), \tag{8}$$

распределение которой всегда ближе к предельному распределению Колмогорова $K(S)$ [15]. Статистику $S_{\max}$ в этом случае будем обозначать как $S^{Sm}_{\max}$.

Модели асимптотических распределений статистики $S^{Sm}_{\max}$ при числе сравниваемых выборок $k = 3 \div 11$, построенные в настоящей работе по результатам статистического моделирования, представлены в таблице 2.

При равных объёмах сравниваемых выборок распределения статистики $S^{Sm}_{\max}$ (как и в двухвыборочном варианте) обладают существенной дискретностью и отличаются от асимптотических (предельных) распределений. Если есть такая возможность, то предпочтительней в качестве n_i выбирать взаимно простые числа, тогда распределения $G(S|H_0)$ статистики $S^{Sm}_{\max}$ практически не отличаются от асимптотических.

Статистика двухвыборочного критерия Лемана–Розенблатта, предложенного в работе [9], используется в форме [8]

$$T = \frac{1}{(n_1+n_2)}\left[n_2 \sum_{i=1}^{n_2} (r_i - i)^2 + n_1 \sum_{j=1}^{n_1} (s_j - j)^2 \right] - \frac{4n_1 n_2 - 1}{6(n_1+n_2)}, \qquad (9)$$

где r_i – порядковый номер (ранг) x_{2i}; s_j – порядковый номер (ранг) x_{1j} в объединенном вариационном ряде. В [9] было показано, что статистика (9) в пределе распределена как $a1(t)$ [8].

Таблица 2. Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{Sm}$

k	Модель
2	$K(S)$
3	B_{III} (6.3274, 6.6162, 2.8238, 2.4073, 0.4100)
4	B_{III} (7.2729, 7.2061, 2.6170, 2.3775, 0.4740)
5	B_{III} (7.1318, 7.3365, 2.4813, 2.3353, 0.5630)
6	B_{III} (7.0755, 8.0449, 2.3163, 2.3818, 0.6320)
7	B_{III} (7.7347, 8.6845, 2.3492, 2.4479, 0.6675)
8	B_{III} (7.8162, 8.9073, 2.2688, 2.4161, 0.7120)
9	B_{III} (7.8436, 8.8805, 2.1696, 2.3309, 0.7500)
10	B_{III} (7.8756, 8.9051, 2.1977, 2.3280, 0.7900)
11	B_{III} (7.9122, 9.0411, 2.1173, 2.2860, 0.8200)

В случае k **-выборочного варианта критерия Лемана–Розенблатта** в качестве $S_{i,j}$ в статистике $S_{\max}^{LR}$ вида (6) используется статистика (9).

Построенные модели асимптотических (предельных) распределений статистики $S_{\max}^{LR}$ при числе сравниваемых выборок $k = 3 \div 11$ представлены в таблице 3. В данном случае наилучшими моделями оказались распределения Sb–Джонсона с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_1 \theta_2}{\sqrt{2\pi}(x-\theta_3)(\theta_2+\theta_3-x)} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x-\theta_3}{\theta_2+\theta_3-x} \right]^2 \right\}$$

при конкретных значениях параметров этого закона, обозначенного в таблице 3 как $Sb(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$. Представленные модели позволяют по значениям статистики $S_{\max}^{LR}$ при соответствующем числе k сравниваемых выборок находить оценки p_{value}.

Двухвыборочный **критерий Андерсона–Дарлинга** рассмотрен в работе [11]. Статистика критерия определяется выражением

$$A^2 = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1+n_2-1} \frac{\left(M_i(n_1+n_2) - n_1 i\right)^2}{i(n_1+n_2-i)}, \qquad (10)$$

где M_i – число элементов первой выборки, меньших или равных i-му элементу вариационного ряда объединенной выборки. Предельным распределением статистики (10) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 является распределение $a2(t)$ [8].

Таблица 3. Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{LR}$

k	Модель
2	$a1(t)$
3	Sb(3.2854, 1.2036, 3.0000, 0.0215)
4	Sb(2.5801, 1.2167, 2.2367, 0.0356)
5	Sb(3.1719, 1.4134, 3.1500, 0.0320)
6	Sb(2.9979, 1.4768, 2.9850, 0.0380)
7	Sb(3.2030, 1.5526, 3.4050, 0.0450)
8	Sb(3.2671, 1.6302, 3.5522, 0.0470)
9	Sb(3.4548, 1.7127, 3.8800, 0.0490)
10	Sb(3.4887, 1.7729, 3.9680, 0.0510)
11	Sb(3.4627, 1.8168, 3.9680, 0.0544)

В случае **k-выборочного варианта критерия Андерсона–Дарлинга** в качестве $S_{i,j}$ в статистике $S_{\max}^{AD}$ вида (6) используется статистика (10).

Для распределений $G(S_{\max}^{AD} | H_0)$ также построены модели асимптотических (предельных) распределений статистики $S_{\max}^{AD}$ для числа сравниваемых выборок $k = 3 \div 11$, которые представлены в таблице 4. В этом случае лучшими моделями оказались бета-распределения 3-го рода (2), которые в виде $\mathrm{B}_{\mathrm{III}}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ с конкретными значениями параметров приведены в таблице 4 и могут использоваться для оценки p_{value} при k сравниваемых выборках.

Сравнительный анализ мощности. Одной из основных характеристик статистического критерия является его мощность относительно заданной конкурирующей гипотезы H_1. Мощность представляет собой разность $1-\beta$, где β – вероятность ошибки 2-го рода (принять гипотезу

H_0 при справедливости H_1) при заданной вероятности α ошибки 1-го рода (отклонить H_0 при её справедливости).

Таблица 4. Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{AD}$

k	Модель
2	$a2(t)$
3	B_{III} (4.4325, 2.7425, 12.1134, 8.500, 0.1850)
4	B_{III} (5.2036, 3.2160, 10.7792, 10.000, 0.2320)
5	B_{III} (5.7527, 3.3017, 9.7365, 10.000, 0.3000)
6	B_{III} (5.5739, 3.4939, 7.7710, 10.000, 0.3750)
7	B_{III} (6.4892, 3.6656, 8.0529, 10.500, 0.3920)
8	B_{III} (6.3877, 3.8143, 7.3602, 10.800, 0.4800)
9	B_{III} (6.7910, 3.9858, 7.1280, 11.100, 0.5150)
10	B_{III} (6.7533, 4.2779, 6.6457, 11.700, 0.5800)
11	B_{III} (7.1745, 4.3469, 6.6161, 11.800, 0.6100)

Мощность k-выборочных критериев исследовалась при разных k для ситуаций, когда в качестве проверяемой гипотезы H_0 рассматривалась принадлежность всех выборок стандартному нормальному закону, в качестве конкурирующей гипотезы H_1 – принадлежность всех выборок кроме последней стандартному нормальному закону, а последней – нормальному закону с параметром сдвига $\theta_0 = 0.1$ и параметром масштаба $\theta_1 = 1$, в качестве гипотезы H_2 – принадлежность последней выборки нормальному закону с параметром сдвига $\theta_0 = 0$ и параметром масштаба $\theta_1 = 1.1$, в качестве конкурирующей гипотезы H_3 – принадлежность последней выборки логистическому закону с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\} \Bigg/ \left[1 + \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\}\right]^2$$

и параметрами $\theta_0 = 0$ и $\theta_1 = 1$.

Оценки мощности находились по результатам моделирования распределений статистик при справедливости проверяемой $G(S|H_0)$ и конкурирующих гипотез $G(S|H_1)$, $G(S|H_2)$ и $G(S|H_3)$ при равных объёмах n_i сравниваемых выборок. В качестве примера в таблице 5 приведены оценки мощности критериев при $\alpha = 0.1$ для $k = 4$.

Проведенный анализ мощности k-выборочных критериев позволяет сделать определённые выводы.

Таблица 5. Оценки мощности критериев относительно альтернатив H_1, H_2 и H_3 ($k=4$, $n_i=n$)

Критерий	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 10^3
Относительно альтернативы H_1						
$S_{\max}^{AD}$	0.112	0.131	0.165	0.302	0.438	0.706
AD	0.112	0.131	0.164	0.301	0.433	0.701
$S_{\max}^{LR}$	0.113	0.130	0.162	0.293	0.425	0.686
$S_{\max}^{Sm}$	0.111	0.125	0.151	0.261	0.366	0.605
Z_C	0.111	0.126	0.155	0.260	0.368	0.595
Z_{A}	0.111	0.127	0.153	0.255	0.360	0.579
Z_{K}	0.109	0.121	0.141	0.219	0.300	0.502
Относительно альтернативы H_2						
Z_C	0.106	0.122	0.158	0.306	0.468	0.761
Z_{A}	0.107	0.124	0.158	0.305	0.463	0.745
Z_{K}	0.106	0.120	0.145	0.249	0.367	0.606
AD	0.104	0.110	0.123	0.180	0.254	0.474
$S_{\max}^{AD}$	0.101	0.104	0.111	0.145	0.195	0.381
$S_{\max}^{Sm}$	0.102	0.105	0.108	0.128	0.153	0.221
$S_{\max}^{LR}$	0.102	0.103	0.105	0.118	0.135	0.197
Относительно альтернативы H_3						
Z_{A}	0.103	0.107	0.116	0.179	0.274	0.566
Z_C	0.103	0.107	0.115	0.173	0.257	0.555
Z_{K}	0.103	0.107	0.114	0.161	0.222	0.410
AD	0.102	0.106	0.113	0.143	0.179	0.291
$S_{\max}^{Sm}$	0.103	0.104	0.112	0.138	0.166	0.257
$S_{\max}^{AD}$	0.101	0.103	0.107	0.124	0.147	0.229
$S_{\max}^{LR}$	0.102	0.102	0.105	0.116	0.130	0.183

Относительно конкурирующих гипотез, соответствующих изменению параметра сдвига, критерии можно упорядочить по мощности следующим образом:

$$S_{\max}^{AD} \succ \text{AD} \succ S_{\max}^{LR} \succ S_{\max}^{Sm} \succ Z_C \succ Z_{\text{A}} \succ Z_{\text{K}}.$$

Относительно изменения параметра масштаба –

$$Z_C \succ Z_{\text{A}} \succ Z_{\text{K}} \succ \text{AD} \succ S_{\max}^{AD} \succ S_{\max}^{Sm} \succ S_{\max}^{LR}.$$

При этом критерии Жанга со статистиками Z_{A} и Z_C практически эквивалентны по мощности, а критерий Андерсона–Дарлинга заметно уступает критериям Жанга.

Относительно ситуации, когда три выборки принадлежат нормальному закону, а четвёртая – логистическому, критерии располагаются по мощности в следующем порядке:

$$Z_{\text{A}} \succ Z_C \succ Z_{\text{K}} \succ \text{AD} \succ S_{\max}^{Sm} \succ S_{\max}^{AD} \succ S_{\max}^{LR}.$$

Можно отметить, что с ростом количества сравниваемых выборок тех же объёмов мощность критерия относительно аналогичных конкурирующих гипотез, как правило, снижается, что абсолютно естественно. Например, сложнее выделить ситуацию и отдать предпочтение конкурирующей гипотезе, когда лишь одна из анализируемых выборок принадлежит некоторому другому закону.

Нельзя не отметить, что критерии Жанга со статистиками Z_{K}, Z_{A}, Z_C относительно некоторых альтернатив обладают заметным преимуществом в мощности.

Построенные модели предельных распределений статистик для k-выборочных критериев однородности (Андерсона–Дарлинга и предложенных в работе) дают возможность при использовании критериев осуществлять корректные и информативные выводы с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value}. При этом можно воспользоваться доступным программным обеспечением [16].

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» (№ 1.4574.2017/6.7) и проектной части государственного задания (№ 1.1009.2017/4.6).

Литература

1. **Kiefer J.** K-Sample Analogues of the Kolmogorov-Smirnov and Cramer-v. Mises Tests // Annals of Mathematical Statistics. 1959. Vol. 30. No. 2. – P. 420-447.

2. **Conover W.J.** Several k-sample Kolmogorov-Smirnov tests // *T*he Annals of Mathematical Statistics. 1965. Vol. 36, No. 3. – P.1019-1026.

3. **Conover W.J.** Practical Nonparametric Statistics. – 3d ed. – Wiley, 1999. – 584 p.

4. **Scholz F.W., Stephens M.A.** K-Sample Anderson–Darling Tests // Journal of the American Statistical Association. 1987. Vol. 82. No. 399. – P. 918-924.

5. **Zhang J.** Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests // PhD Thesis. York University, Toronto. 2001. – 113 p. URL: http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/NQ66371.pdf (дата обр. 28.01.2013).

6. **Zhang J.** Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio // Technometrics. 2006. V. 48. No. 1. – P.95-103.
7. **Zhang J., Wu Y.** k-Sample tests based on the likelihood ratio // Computational Statistics & Data Analysis. 2007. V. 51. No. 9. – P. 4682-4691.
8. **Большев Л.Н., Смирнов Н.В.** Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев,– М. : Наука, 1983. – 416 с.
9. **Lehmann E. L.** Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests // Ann. Math. Statist. 1951. Vol. 22, № 1. – P. 165–179.
10. **Rosenblatt M.** Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic // Ann. Math. Statist. 1952. Vol. 23. – P. 617–623.
11. **Pettitt A.N.** A two-sample Anderson-Darling rank statistic // Biometrika. 1976. Vol. 63. No.1. P. 161-168.
12. **Лемешко Б.Ю.** Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению. М: ИНФРА–М, 2017. – 207 с.
13. **Лемешко Б.Ю.** О применении критериев проверки однородности законов распределения / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, И.В. Веретельникова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 41. – С. 24-31.
14. **Lemeshko B.Y.** Application of Homogeneity Tests: Problems and Solution / B.Y. Lemeshko, I.V. Veretelnikova, S.B. Lemeshko, A.Y. Novikova // In: Rykov V., Singpurwalla N., Zubkov A. (eds) Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017. Lecture Notes in Computer Science. : monograph. – Cham : Springer, 2017. – 10684. – P. 461-475.
15. **Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.** О сходимости распределений статистик и мощности критериев однородности Смирнова и Лемана–Розенблатта // Измерительная техника. 2005. № 12. – С. 9–14.
16. ISW–Программная система статистического анализа одномерных наблюдений. https://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm. (дата обр. 17.03.2018)