Сравнительный анализ некоторых критериев проверки показательности

П. Ю. Блинов, Б. Ю. Лемешко[1]
Новосибирский государственный технический университет

Рассматривается несколько специальных критериев, предназначенных для проверки гипотез о принадлежности наблюдений экспоненциальному закону. Исследуются распределения статистик критериев, мощность критериев относительно различных конкурирующих гипотез. Рассматриваемые критерии ранжируются по мощности. Показываются достоинства и недостатки отдельных критериев.

Ключевые слова: экспоненциальный закон, проверка гипотез, мощность критерия

1. Введение

Экспоненциальный закон распределения вероятностей является базовым законом, используемым в теории надежности. Его аналитическая простота делает его привлекательным для инженеров и исследователей. Однако всегда следует предварительно убедиться в том, что вероятностное поведение случайной величины (например, моментов отказов изделий) подчиняется «желательному» экспоненциальному закону. В ином случае выигрыш от простоты расчетов будет многократно «скомпенсирован» потерями от ошибочных выводов и заключений, вызванных отклонением реального распределения вероятностей случайной величины от экспоненциального закона.

Проверке гипотез о принадлежности выборки показательному закону распределения посвящено множество работ, в которых авторами предлагаются различные статистические критерии. Обилие критериев обусловлено частым использованием модели показательного закона в приложениях. А частота использования не в последнюю очередь определяется тем, что применение такой простой модели во многих ситуациях позволяет найти решение задачи с опорой только на аналитические методы.

В данной работе рассматриваемые критерии проверки экспоненциальности исследовались методами статистического моделирования. При исследовании распределений статистик критериев количество экспериментов, осуществляемых при статистическом моделировании, принималось равным 1 660 000.

2. Рассмотренные критерии

2.1. Критерий Шапиро–Уилка

Предположим, есть выборка $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ с неизвестной начальной точкой. Плотность вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\nu}\exp\left(\frac{x-\mu}{\nu}\right)$$

[1] Исследования выполнены при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» и проектной части государственного задания (проект № 1.1009.2017/ПЧ).

с неизвестным параметром μ.

Тогда статистика критерия описывается формулой [1,2]

$$W_E = \frac{n\left(\overline{x} - x_1\right)^2}{\left(n-1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}. \tag{1}$$

Если же параметр μ известен, при замене x_i на $x_i - \mu$ статистика Шапиро-Уилка принимает вид

$$W_{E_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Вместо статистики W_{E_0} можно воспользоваться также статистикой

$$\tilde{W}_{E_0} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n\left[\left(n+1\right)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]}. \tag{2}$$

Критические значения статистики $\tilde{W}_{E_0}$ совпадают с критическими значениями статистики W_E с учетом замены n на $\left(n+1\right)$ [1]. Критерии являются двусторонними, гипотеза показательности отвергается при малых и больших значениях статистик.

2.2. Критерий Фросини

Статистика критерия Фросини имеет вид [3]

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left|1 - \exp\left(-\frac{x_i}{\overline{x}}\right) - \frac{i-0,5}{n}\right|. \tag{3}$$

Во многом она схожа с формулой статистики критерия Фросини для проверки равномерности [8]. Распределение статистики довольно быстро сходиться к предельному распределению. Некоторые критические значения показаны в таблице 1.

Таблица 1. Критические значения статистики критерия Фросини

n	α			n	α		
	0,9	0,95	0,99		0,9	0,95	0,99
5	0.326	0.367	0.445	15	0.336	0.380	0.4715
6	0.327	0.370	0.455	20	0.337	0.3815	0.474
7	0.329	0.373	0.459	25	0.338	0.383	0.4755
8	0.331	0.375	0.462	30	0.338	0.383	0.476
9	0.333	0.377	0.464	40	0.338	0.384	0.477
10	0.333	0.377	0.466	50	0.339	0.384	0.478
11	0.334	0.378	0.468	100	0.340	0.385	0.480
12	0.334	0.379	0.469	150	0.340	0.385	0.480
13	0.335	0.379	0.470	200	0.340	0.3855	0.480
14	0.335	0.380	0.471	300	0.340	0.386	0.480

2.3. Корреляционный критерий экспоненциальности

Предположим, что имеет место закон распределения вероятностей $F(x)=1-\exp\left(\frac{x-\mu}{\nu}\right)$, где μ и ν - неизвестные параметры, оценки которых могут быть найдены из формул

$$\hat{\nu}=\frac{n(\overline{x}-x_1)}{n-1};\quad \hat{\mu}=x_1-\frac{\hat{\nu}}{n}.$$

Статистика критерия основана на коэффициенте корреляции r между нормированной переменной $z_i=\frac{x_i-\hat{\mu}}{\hat{\nu}}$ и математическим ожиданием $i-$й порядковой статистики из экспоненциального распределения, представленного выборкой объема n:

$$r(z,m)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})(m_i-\overline{m})}{\left[\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})^2\sum_{i=1}^{n}(m_i-\overline{m})^2\right]^{1/2}}$$

где $m_i=\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n-j+1}$.

Также для $n\geq 20$ используется аппроксимация $\tilde{m}_i=-\ln\left(1-\frac{i}{n+1}\right)$, а соответствующий коэффициент корреляции обозначается как $r(z,\tilde{m})$.

Статистики критериев используются в форме

$$K(z,m)=n\left[1-r^2(z,m)\right] \quad \text{и} \quad K(z,\tilde{m})=n\left[1-r^2(z,\tilde{m})\right]. \tag{4}$$

Критерии являются правосторонними и отклоняют проверяемую гипотезу при больших значениях статистик. Критические значения представлены в [1].

2.4. Критерий Кимбера–Мичела

Кимбер разработал критерий [4], основанный на линейной зависимости теоретической $F(x)$ и эмпирической $F_n(x)=\frac{i}{n}$ функций распределения вероятностей случайных величин. Для того чтобы стабилизировать зависимость и ослабить влияние неравных дисперсий, Мичел предложил следующие преобразования [5]:

$$s_i=\arcsin\sqrt{F(x)} \quad \text{и} \quad r_i=\arcsin\sqrt{\frac{i-0.5}{n}}.$$

Для случаев $F(z_i)=1-\exp(z_i)$, где $z_i=\frac{x_i}{\hat{\nu}}$, $\hat{\nu}=\frac{1}{n}\sum x_i$ – стандартизированная случайная экспоненциальная величина.

Сама статистика критерия имеет форму

$$D=\max_i|s_i-r_i|. \tag{5}$$

Критерий является правосторонним, гипотеза показательности выборки отвергается при больших значениях статистик.

2.5. Критерий Барлетта–Морана

Статистика критерия, вычисляемая по ряду значений $x_1, x_2, ..., x_n$, имеет вид [6]

$$B = \frac{2n\left[\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right]}{1+\frac{n+1}{6n}} = \frac{12n^2}{7n+1}\left[\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right]. \tag{6}$$

Статистика подразумевает в себе две составляющие: числитель Морана и знаменатель Бартлетта. При $n \geq 20$ распределение статистики (6) удовлетворительно аппроксимируется χ^2-распределением с $n-1$ степенями свободы [1]. Однако, несмотря на это, трудно назвать критерий правосторонним, иначе при некоторых конкурирующих гипотезах, о которых речь пойдет далее, критерий оказывается смещенным (см. рис.1). По этой причине мощность критерия исследовалась как для двустороннего критерия.

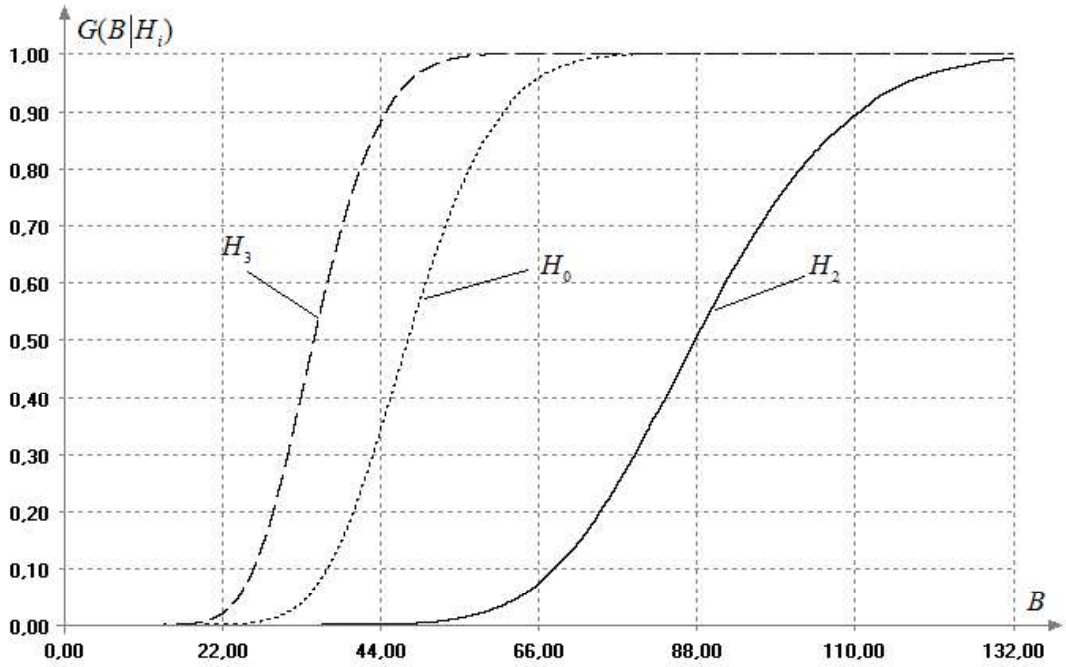

Рис. 1. Распределения $G(B|H_i)$ статистики критерия Барлетта-Морана

2.6. Критерий Шермана

Статистика критерия Шермана имеет вид

$$\omega_n = \frac{1}{2n}\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}|}{\overline{x}}. \tag{7}$$

По мнению некоторых источников [1,7], критические значения критерия показательности Шермана и критические значения равномерности критерия Шермана совпадают. Но на практике были получены немного иные значения. Также у критерия Шермана была замечена аналогичная проблема со смещенностью как и у критерия Барлетта-Морана. Рекомендовано использовать критерий как двусторонний.

3. Конкурирующие гипотезы

В качестве проверяемой гипотезы H_0 рассматривался показательный закон с плотностью $f(x) = \exp(-x)$. Показательному закону соответствует постоянная интенсивность отказов. В связи с этим в качестве конкурирующих гипотез рассматривались законы, принадлежащие к трем классам: с возрастающими, убывающими и немонотонными интенсивностями отказов.

Исследования были проведены для трех конкурирующих гипотез:

$H_1 : LN(1)$ с плотностью $f(x) = \left(\theta x\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \exp\left(-(\ln x)^2 / 2\theta^2\right)$, логнормальное распределение с параметром формы 1 в качестве закона с немонотонной интенсивностью отказов;

$H_2 : W(0.7)$ с плотностью $f(x) = \theta x^{\theta-1} \exp\left(-x^{\theta}\right)$, распределение Вейбулла с параметром формы 0.7 в качестве закона с убывающей интенсивностью отказов;

$H_3 : W(1.2)$, распределение Вейбулла с параметром формы 1.2 в качестве закона с возрастающей интенсивностью отказов.

Функции распределений соответствующие конкурирующим гипотезам представлены на рис. 2.

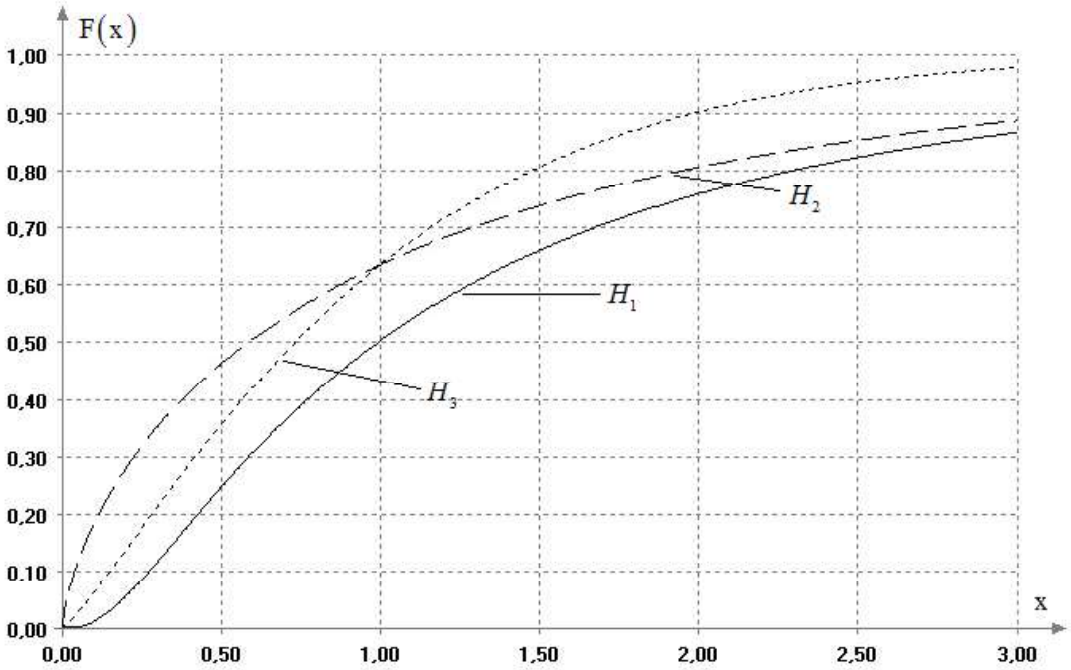

Рис. 2. Распределения, соответствующие конкурирующим гипотезам

4. Анализ мощностей

Мощность критериев сравнивалась на объемах выборок $n = 50$ и $n = 100$. Эмпирические распределения статистик критериев, по которым находились оценки мощности, соответствующие проверяемой и конкурирующим гипотезам, для получения приемлемой точности строились по 1 660 000 испытаниям. Рассмотренные специальные критерии проверки экспоненциальности упорядочены по убыванию мощности относительно соответствующих конкурирующих

гипотез в табл. 2 и 3 (по величине мощности $1-\beta$, проявленной при $n=50$ и $n=100$, при уровне значимости $\alpha=0.05$).

Таблица 2. Упорядоченность критериев показательности по мощности для $n=50$ относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Кимбер–Мичел (5)	0.516	Бартлетта–Моран (6)	0.890	Бартлетта–Моран (6)	0.315
2	Корреляционный критерий 2 (4)	0.377	Шерман (7)	0.804	Фросини (3)	0.291
3	Шапиро–Уилк (1)	0.359	Фросини (3)	0.804	Кимбер–Мичел (5)	0.279
4	Корреляционный критерий 1 (4)	0.344	Кимбер–Мичел (5)	0.706	Шермана (7)	0.277
5	Фросини (3)	0.310	Шапиро–Уилк (2)	0.657	Шапиро–Уилк (2)	0.266
6	Шапиро–Уилк (2)	0.290	Шапиро–Уилк (1)	0.621	Шапиро–Уилк (1)	0.223
7	Бартлетта–Моран (6)	0.143	Корреляционный критерий 2 (4)	0.311	Корреляционный критерий 1 (4)	0.053
8	Шерман (7)	0.140	Корреляционный критерий 1 (4)	0.276	Корреляционный критерий 2 (4)	0.016

Таблица 3. Упорядоченность критериев показательности по мощности для $n=100$ относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Кимбер–Мичел (5)	0.879	Бартлетта–Моран (6)	0.993	Бартлетта–Моран (6)	0.582
2	Фросини (3)	0.585	Фросини (3)	0.977	Фросини (3)	0.533
3	Корреляционный критерий 2 (4)	0.548	Шермана (7)	0.974	Шермана (7)	0.520
4	Шапиро–Уилк (1)	0.541	Кимбер–Мичел (5)	0.947	Шапиро–Уилк (2)	0.489
5	Корреляционный критерий 1 (4)	0.525	Шапиро–Уилк (2)	0.906	Кимбер–Мичел (5)	0.472
6	Шапиро–Уилк (2)	0.440	Шапиро–Уилк (1)	0.893	Шапиро–Уилк (1)	0.438
7	Бартлетта–Моран (6)	0.218	Корреляционный критерий 2 (4)	0.442	Корреляционный критерий 1 (4)	0.060
8	Шерман (7)	0.1665	Корреляционный критерий 1 (4)	0.422	Корреляционный критерий 2 (4)	0.019

Относительно гипотезы H_1 наилучший результат показывает критерий Кимбера–Мичела, значительно опережая другие критерии по мощности. Относительно других гипотез этот критерий также показал неплохие результаты

Относительно гипотез H_2 и H_3 наибольшую мощность показывает критерий Батлетта–Морана. Критерии Фросини и Шермана также показывают неплохие мощности в этих случаях, но при H_1 критерий Бартлетта–Морана и критерий Шермана демонстрируют посредственные результаты.

Критерии Шапиро–Уилка показали стабильные мощности относительно всех конкурирующих гипотез.

Хуже всего себя показали корреляционные критерии, особенно относительно гипотезы H_3. Темным цветом выделены ситуации, когда критерий обладает ярко выраженной

смещенностью. Стоит отметить, что при малых значениях объема выборок n первый корреляционный критерий также обладает смещенностью.

5. Заключение

Рассмотрев ряд критериев показательности можно сделать некоторые рекомендации об их применениях.

Среди рассмотренных критериев лучше всего использовать критерий Фросини, поскольку он показывает довольно большие мощности относительно всех конкурирующих гипотез. К преимуществам этого критерия стоит отнести еще тот факт, что статистика этого критерия довольно быстро сходится к предельному распределению.

Также вполне обоснован выбор критерия Кимбера–Мичела. Несмотря на то, что он уступает нескольким рассмотренным критериям при конкурирующих гипотезах H_2 и H_3, мощность его все еще довольно высока в этих случаях. С учетом того, что при конкурирующей гипотезе с немонотонной интенсивностью отказов он показал крайне высокую мощность, этот критерий рекомендуется к применению для проверки показательности.

Не рекомендуется использовать корреляционные критерии из–за смещенности в некоторых ситуациях.

Применение критерия Шермана и критерия Бартлетта–Морана весьма «рискованно», поскольку мощности при H_1 весьма невелики. И если применять эти критерии как правосторонние (как предложено авторами), у этих критериев тоже наблюдается смещенность. Однако у критериев есть преимущество: критерий Бартлетта–Морана хорошо аппроксимируется χ^2-распределением, а критерий Шермана – нормальным распределением.

Данную работу планируется продолжить, добавив в рассмотрение другие критерии показательности, а также сравнить эти критерии с известными непараметрическими критериями согласия в условиях проверки экспоненциальности.

Литература

1. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. М : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 816 с.
2. *Shapiro S. S., Wilk M.B.* An analysis of variance test for the exponential distribution (complete samples) // Technometrics. 1972. V. 14. P. 355-370.
3. *Frozini B. V.* On the distribution and power of a goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric applications, „Goodness-of-fit" / Ed. by Revesz P., Sarkadi K., Sen P. K., Amsterdam-Oxford-New York: North-Holland. Publ. Comp., 1987, P. 133-154.
4. *Kimber A. C.* Tests for the exponential, Weibull and Gumbel distributions based on the stabilized probability plot // Biometrika. 1985. V. 72, №3. P. 661-663.
5. *Michael J. R.* The stabilized probability plot // Biometrika. 1983. V. 70. P. 11-17.
6. *Moran P. A. P.* The random division of an interval, 11 // JRSS. 1951. V. 13. P. 147-150.
7. Sherman B. A random variable related to the spacing of sample values // AMS. 1950. V. 21, №3. P. 339-361.
8. *Лемешко Б. Ю., Блинов П. Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 183 с. – (Научная мысль). DOI: 10.12737/11304

Блинов Павел Юрьевич
аспирант кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20), e-mail: blindizer@ya.ru.

Лемешко Борис Юрьевич
д.т.н., профессор, г.н.с. кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20), e-mail: lemeshko@ami.nstu.ru.

The comparative analysis of some exponential tests

P. Yu. Blinov, B. Yu. Lemeshko

Some special tests intended for testing of exponentiality have been considered. Distributions of test statistics, the power of tests under different competing hypotheses have been studied. Considered tests have been ranked by the test power. Advantages and disadvantages of individual tests have been shown.

Keywords: exponential distribution, testing hypothesis, power of test.