

АППАРАТ КОНТРОЛЬНЫХ КАРТ ШУХАРТА ПРИ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ОТЛИЧАЮЩИХСЯ ОТ НОРМАЛЬНОГО

Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю.
Новосибирский государственный технический университет
E-mail: ira-veterok@mail.ru

Классические контрольные карты Шухарта [1] опираются на предположение о принадлежности измеряемых (контролируемых) случайных величин нормальному закону и служат средством статистического управления качеством контролируемого процесса. В реальных условиях приложений предположения о нормальности выполняются далеко не всегда. Цель данной работы заключается в реализации аппарата контрольных карт Шухарта как при выполнении предположения о принадлежности контролируемых случайных величин нормальному закону, так и в условиях нарушения стандартного предположения – при произвольном заданном законе распределения.

На практике используются следующие виды простых контрольных карт: карты средних значений – $\bar{x}$ -карты; медиан – $\tilde{x}$ -карты; текущих значений – x -карты; стандартных отклонений – s -карты; размахов – r -карты. Уровень средней линии M контрольной карты определяется некоторым требуемым значением μ_0 . Определение верхних и нижних контрольных границ (OEG и UEG) и верхних и нижних предупредительных границ (OWG и UWG) зависит от информации о рассеянии процесса, которая может быть задана в виде заданного значения σ_0 или ее оценки $\hat{\sigma}_0$. Границы для классических контрольных карт находятся в виде:

$$\left. \begin{matrix} OEG \\ UEG \end{matrix} \right\} = M \pm c^E \sigma_0, \quad \left. \begin{matrix} OWG \\ UWG \end{matrix} \right\} = M \pm c^W \sigma_0,$$

где коэффициенты c^E и c^W определяются таким образом, чтобы контролируемая величина при невозмущенном процессе могла оказаться за пределами интервалов (UEG, OEG) или (UWG, OWG), например, с вероятностями $\alpha = 0,01$ или $\alpha = 0,05$ соответственно (см. рис.1).

Коэффициенты c^E и c^W зависят от объема выборки и контролируемой величины. При их определении в классическом случае исходят из предположения о принадлежности контролируемого признака X нормальному закону с параметрами (μ_t, σ_0^2) .

В $\bar{x}$ -картах средних значений контролируемой величиной является выборочное среднее арифметическое $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$.

Если рассеяние процесса постоянно, то эта величина подчиняется нормальному закону с параметрами $(\mu_t, \sigma_0^2/n)$. Двусторонний доверительный интервал для $\bar{X}_n$ определяется уравнением

$$P\left\{\mu_0 - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_n \leq \mu_0 + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \mid \mu_t = \mu_0\right\} = 1 - \alpha,$$

где $z_{1-\alpha/2}$ – соответствующий квантиль стандартного нормального закона.



Рис. 1. Схема двусторонней контрольной карты для управления по уровню настройки

В **$\tilde{X}$ -картах медиан** в качестве контролируемой величины рассматривается медиана, вычисляемая по выборке объема n

$$\tilde{X}_n = \begin{cases} X_{(k+1;n)} & \text{при } n = 2k + 1, \\ \frac{X_{(k;n)} + X_{(k+1;n)}}{2} & \text{при } n = 2k. \end{cases}$$

В случае принадлежности X нормальному закону контролируемая величина $\tilde{X}_n$ распределена также нормально с математическим ожиданием $E[\tilde{X}_n] = \mu_t$ и дисперсией $D[\tilde{X}_n] = \sigma_0^2 c_n^2 / n$.

Двусторонний доверительный интервал для $\tilde{X}_n$ определяется уравнением

$$P\left\{\mu_0 - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sigma_0 c_n \leq \tilde{X}_n \leq \mu_0 + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sigma_0 c_n \mid \mu_t = \mu_0\right\} = 1 - \alpha,$$

где коэффициенты c_n – табулированы для случая нормального закона.

Распределения контролируемых величин в случае нормального закона известны, что дает возможность вычислить квантили, необходимые для задания контрольных и предупредительных границ. При произвольном законе распределения X наблюдаемой величины распределения контролируемых показателей ($\bar{X}_n$, $\tilde{X}_n$, стандартных отклонений, размахов) оказываются неизвестными, зависящими от закона распределения наблюдаемой величины и объема выборки n . Для определения границ контрольной карты, соответствующей контролируемому показателю S , необходимо по функции

распределения $F(S)$ этого показателя из уравнения $P S_{\alpha/2} \leq S \leq S_{1-\alpha/2} = 1 - \alpha$ найти квантили $S_{\alpha/2}$ и $S_{1-\alpha/2}$ при $\alpha = 0,01$ и $\alpha = 0,05$. Так как любой показатель S представляет собой функцию от случайной величины X , то нахождение распределения $F(S)$ аналитически, как правило, оказывается нетривиальной задачей. Для этого целесообразно воспользоваться статистическим моделированием распределения $F(S)$ при заданном законе распределения X , объеме выборки n и числе симуляций N , которое определяется требуемой точностью вычисления квантилей.

На рис. 2-3 иллюстрируется работа контрольных карт на примере $\bar{x}$ -карты средних значений и карты скользящего среднего в случае нормального закона, а на рис. 4-5 в случае двустороннего экспоненциального при $n=100$.

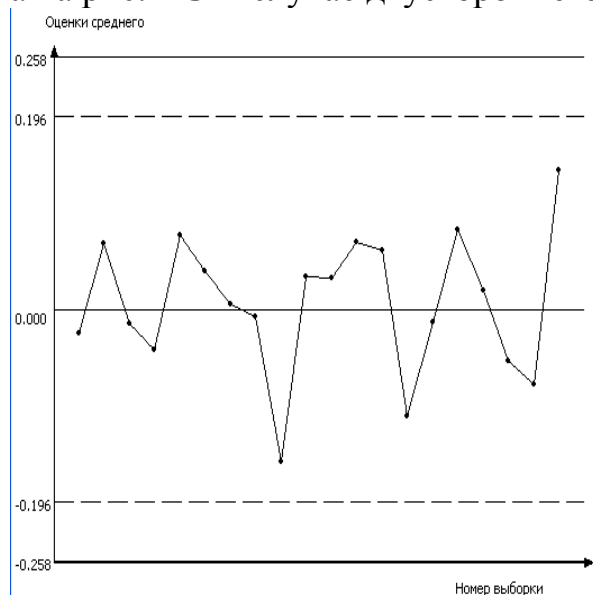


Рис. 2. Карта средних $N(0,1)$.

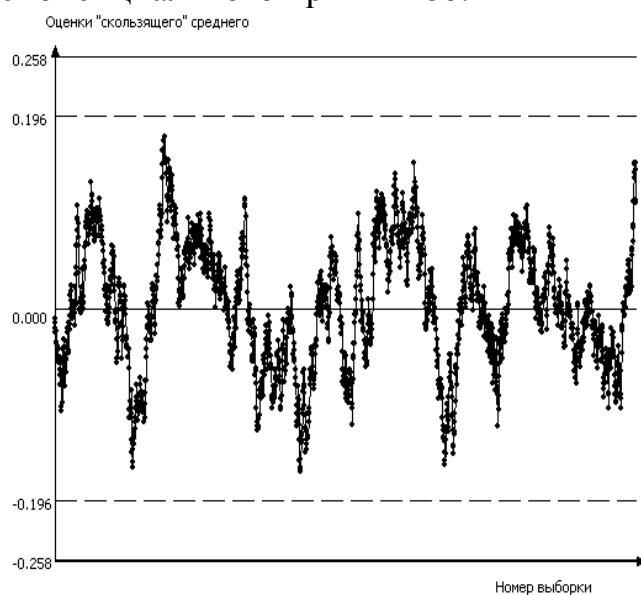


Рис. 3. Карта "скользящего" среднего $N(0,1)$.

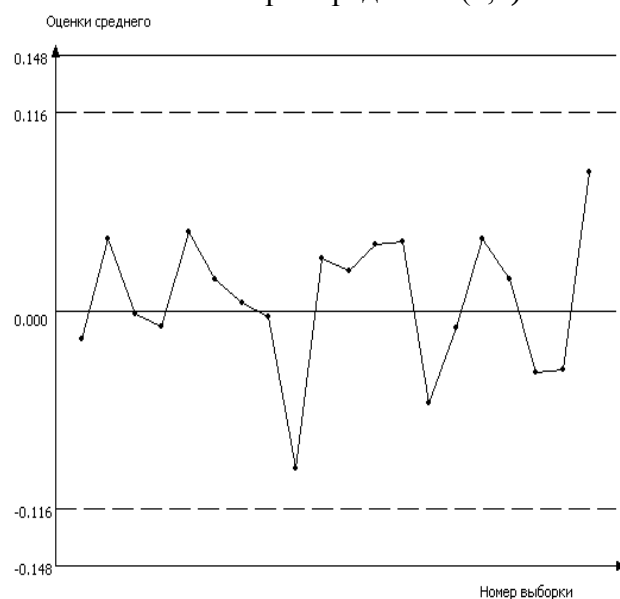


Рис. 4. – Карта средних $ДЭ(4;1,0)$

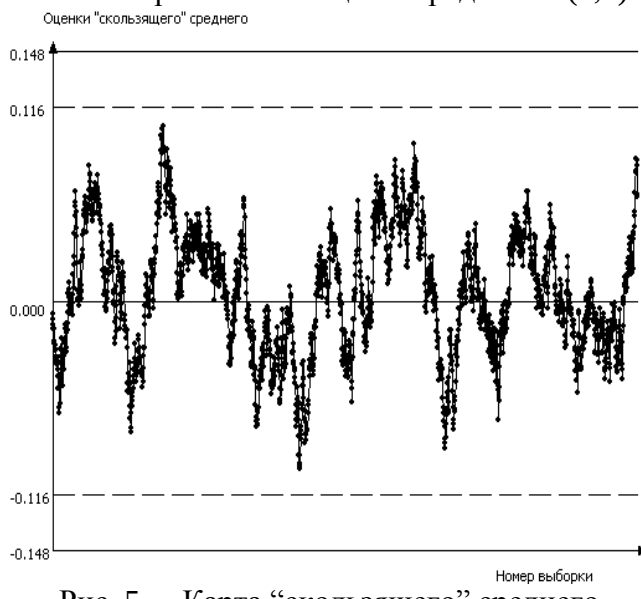


Рис. 5. – Карта "скользящего" среднего

В соответствии с целями работы разработан модуль, обеспечивающий вычисление всех характеристик, необходимых для построения карт Шухарта в случае нарушения предположения о нормальности выборочных данных.

Литература

1. Миттаг Х.-Й., Ринне Х. Статистические методы обеспечения качества. — М.: Машиностроение. 1995. — 600 с.