

М. Г. Березовский, Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова

ОБЕСПЕЧЕНИЕ НАИБОЛЬШЕЙ МОЩНОСТИ ПРИМЕНЯЕМЫХ КРИТЕРИЕВ ТИПА χ^2

The power of criterion χ^2 is researched. The methods of Pirson's statistic calculation are presented, and dependence of criteria power from connection method is researched. The calculation results are shown.

Использование критериев согласия типа χ^2 предполагает, что неоднозначность при построении и вычислении статистик бывает связана с выбором числа интервалов и тем, каким образом область определения случайной величины разбивается на интервалы. Естественно, что такой «произвол» отражается на статистических свойствах применяемых критериев, в частности на их мощности при различении близких конкурирующих гипотез. Очевидно, что выбор числа интервалов и способа разбиения на интервалы следует осуществлять с позиций обеспечения максимальной мощности критерия.

Критерии согласия могут использоваться при проверке простых гипотез вида

$$H_0: F(x) = F_0(x, \theta),$$

где $F_0(x, \theta)$ – функция распределения вероятностей, с которой проверяется согласие наблюдаемой выборки независимых одинаково распределенных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$; θ – известное значение параметра (скалярного или векторного), и сложных гипотез

$$H_0: F(x) \in \{F_0(x, \theta), \theta \in \Theta\},$$

где Θ – пространство параметров. В процессе проверки сложной гипотезы оценка параметра $\hat{\theta}$ вычисляется по этой же самой выборке. Если оценка $\hat{\theta}$ вычислена по другой выборке, то гипотеза простая.

При использовании критериев согласия типа χ^2 область определения случайной величины разбивается на k интервалов граничными точками

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k.$$

Статистика X_n^2 Пирсона вычисляется в соответствии с соотношением

$$X_n^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(n_i / n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}, \quad (1)$$

где n_i – количество наблюдений, попавших в интервал; $P_i(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_0(x, \theta) dx$ – вероятность

попадания наблюдения в i -й интервал; $n = \sum_{i=1}^k n_i$, $\sum_{i=1}^k P_i(\theta) = 1$. При справедливой простой гипотезе H_0 предельное распределение статистики $G(X_n^2 | H_0)$ есть χ^2 -распределение с числом степеней свободы $k-1$. Если по выборке оценивалось m параметров закона в результате минимизации статистики X_n^2 , то статистика подчиняется χ^2 -распределению с $k-m-1$ степенями свободы.

При справедливой альтернативной гипотезе H_1 предельное распределение $G(X_n^2 | H_1)$ представляет собой нецентральное χ^2 -распределение с тем же числом степеней свободы и параметром нецентральности

$$s(\theta) = \sum_{i=1}^k \frac{c_i^2(\theta)}{P_i}, \quad (2)$$

где $c_i(\theta) = \sqrt{n} \int_{x_{i-1}(\theta)}^{x_i(\theta)} (f_1(x, \theta) - f_0(x, \theta)) dx$, $f_1(x, \theta)$ соответствует альтернативе.

В случае проверки сложных гипотез и оценивания по выборке параметров наблюдаемого закона использование в качестве предельных χ_{k-m-1}^2 -распределений справедливо лишь при определении оценок минимизацией статистики X_n^2 или при вычислении по сгруппированным данным оценок максимального правдоподобия (ОМП).

Статистика типа χ^2 Никулина [1...4] отличается от статистики X_n^2 только при сложных гипотезах. Предельное распределение этой статистики есть обычное распределение χ_{k-1}^2 (количество степеней свободы не зависит от числа оцениваемых параметров). Неизвестные параметры распределения $F(x, \theta)$ в этом случае должны оцениваться по негруппированным данным методом максимального правдоподобия, причем вектор вероятностей попадания в интервал $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_k)^T$ предполагается заданным и граничные точки интервалов определяются соотношениями $x_i(\theta) = F^{-1}(P_1 + \dots + P_i)$, $i = \overline{1, (k-1)}$.

Данная статистика имеет вид [1]

$$Y_n^2(\theta) = X_n^2 + n^{-1} \mathbf{a}^T(\theta) \mathbf{\Lambda}(\theta) \mathbf{a}(\theta), \quad (3)$$

где X_n^2 вычисляется в соответствии с (1). Элементы и размерность матрицы

$$\mathbf{\Lambda}(\theta) = \left[J(\theta_l, \theta_j) - \sum_{i=1}^k \frac{w_{\theta_l i} w_{\theta_j i}}{P_i} \right]_{m \times m}^{-1}$$

определяются оцениваемыми компонентами вектора параметров θ , $J(\theta_l, \theta_j)$ – элементы информационной матрицы $\mathbf{J}(\theta)$;

$$\mathbf{J}(\theta) = \left[\int \left(\frac{\partial \ln f_0(x, \theta)}{\partial \theta_l} \frac{\partial \ln f_0(x, \theta)}{\partial \theta_j} \right) f_0(x, \theta) dx \right]_{m \times m}.$$

$a(\theta_l) = w_{\theta_l 1} n_1 / P_1 + \dots + w_{\theta_l k} n_k / P_k$ – элементы вектора $\mathbf{a}(\theta)$, величины $w_{\theta_l i}$ определяются соотношением

$$w_{\theta_l i} = -f_0[x_i(\theta), \theta] \frac{\partial x_i(\theta)}{\partial \theta_l} + f_0[x_{i-1}(\theta), \theta] \frac{\partial x_{i-1}(\theta)}{\partial \theta_l}.$$

При верной конкурирующей гипотезе статистика Y_n^2 имеет в качестве предельного $G(Y_n^2 | H_1)$ нецентральное χ_{k-1}^2 -распределение с параметром нецентральности

$$s(\theta) = \sum_{i=1}^k \frac{c_i^2(\theta)}{P_i} + \mathbf{d}^T(\theta) \mathbf{\Lambda}(\theta) \mathbf{d}(\theta), \quad (4)$$

где элементы вектора $\mathbf{d}(\theta)$ определяются как $d(\theta_l) = w_{\theta_l 1} c_1(\theta) / P_1 + \dots + w_{\theta_l k} c_k(\theta) / P_k$.

Зависимость мощности от способа группирования. Как упоминалось выше, целенаправленно воздействовать на мощность критериев типа χ^2 можно за счет двух факторов: выбора граничных точек интервалов и выбора числа интервалов.

Особенно сильное влияние способ группирования оказывает на предельное распределение $G(X_n^2 | H_1)$. В работах [5...9] показано, что критерии согласия χ^2 Пирсона и отношения правдоподобия при проверке как простых, так и сложных гипотез имеют максимальную

мощность по сравнению с близкими альтернативами, если использовать такое разбиение области определения случайной величины на интервалы, при котором потери в информации Фишера о параметрах закона, соответствующего гипотезе H_0 , минимальны (асимптотически оптимальное группирование). Чем меньше потери в информации Фишера, связанные с группированием данных, тем больше параметр нецентральности, определяемый соотношением (2). В [5; 9] для конкретных законов распределения представлен достаточно широкий состав построенных таблиц асимптотически оптимального группирования (АОГ-группирования), минимизирующего потери в информации Фишера. Использование АОГ-группирования при заданном числе интервалов обеспечивает максимальную мощность при близких гипотезах.

Исследование распределений статистики Y_n^2 Никулина, которая отличается от статистики X_n^2 только при сложных гипотезах, показало, что как $G(Y_n^2 | H_0)$, так и $G(Y_n^2 | H_1)$ несущественно зависят от способа группирования. Более того, наши исследования, проведенные на основе методов статистического моделирования, показали, что с позиций наибольшей мощности разбиение на интервалы равной вероятности (РВГ-группирование) оказывается наиболее предпочтительным. Подчеркнем, что критерий типа χ^2 Никулина мощнее, чем критерии χ^2 Пирсона и отношения правдоподобия.

Зависимость мощности от числа интервалов k . Зная предельные распределения $G(S | H_0)$ и $G(S | H_1)$ статистики S , для любого заданного уровня значимости α можно оценить мощность соответствующего критерия, рассматривая ее как функцию от числа интервалов k при заданном объеме выборки n . Исследование мощности критериев Пирсона и Никулина как функции от n и k проводилось аналитически и методами статистического моделирования. Причем результаты аналитических вычислений полностью подтверждаются оценками мощности, полученными на основании моделирования.

Величина мощности для критериев типа χ^2 может быть вычислена в соответствии с выражением [10]

$$1 - \beta = P(s | r, \alpha) = e^{-s/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j}{j! 2^{2j-1+r/2} \Gamma(j+r/2)} \times \int_{\sqrt{x(\alpha, r)}}^{\infty} y^{2j-1+r} e^{-y^2/2} dy, \quad (5)$$

где S – параметр нецентральности, определяемый соотношениями (2) и (4); $x(\alpha, r)$ представляет собой $(1 - \alpha)$ -процентную точку χ_r^2 -распределения с r степенями свободы (α – заданная вероятность ошибки первого рода, β – вероятность ошибки второго рода). Все приводимые ниже функции мощности строились при уровне значимости $\alpha = 0,1$.

Функции мощности критерия χ^2 Пирсона, в зависимости от числа k равновероятных интервалов при различных n при проверке простой гипотезы о согласии с экспоненциальным законом ($H_0: f_0(x) = \theta \exp\{-\theta x\}$ при $\theta = 1$; $H_1: f_1(x) = \theta \exp\{-\theta x\}$ при $\theta = 1,05$) представлены на рис. 1, а аналогичные функции при использовании АОГ-группирования – на рис. 2 [5; 9]. И в том, и в другом случае с ростом k мощность падает, но в случае асимптотически оптимального группирования она выше, чем при равновероятном.

Функции мощности критерия χ^2 Пирсона в случае РВГ-группирования при проверке простой гипотезы о согласии с нормальным законом $H_0: f_0(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2}\right\}$ при $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 1$ (в качестве альтернативы был использован нормальный закон H_1 при $\theta_0 = 0,05$, $\theta_1 = 1,05$) приведены на рис. 3; аналогичные функции мощности в случае использования АОГ-группирования – на рис. 4 [5; 9].

Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке гипотез о согласии с распределением Вейбулла приведены на рис. 5...8. Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке

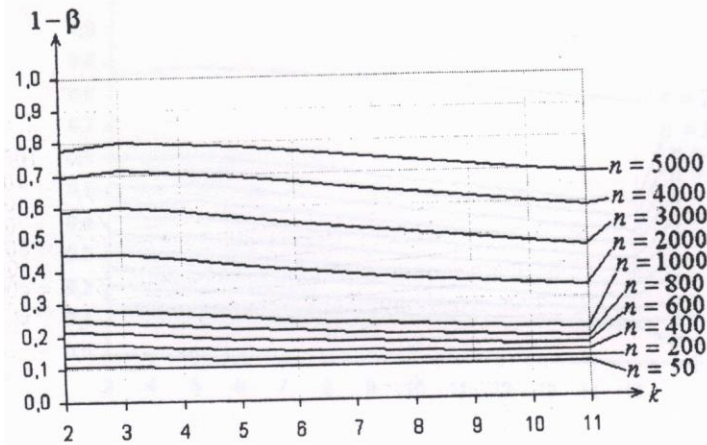


Рис. 1. Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с экспоненциальным законом при РВГ-группировании

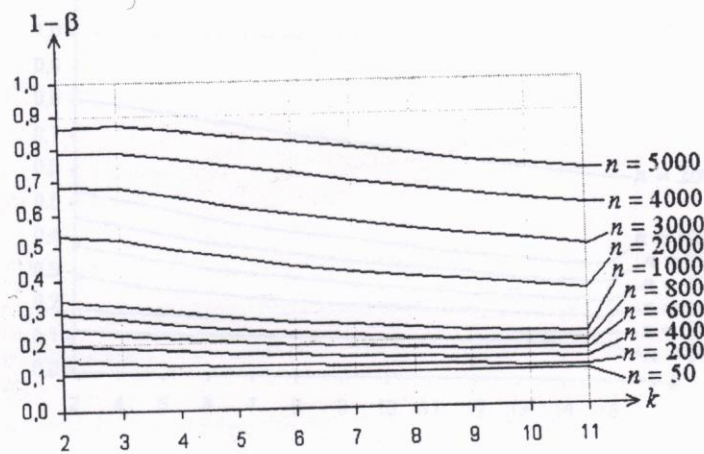


Рис. 2. Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с экспоненциальным законом при АОГ-группировании

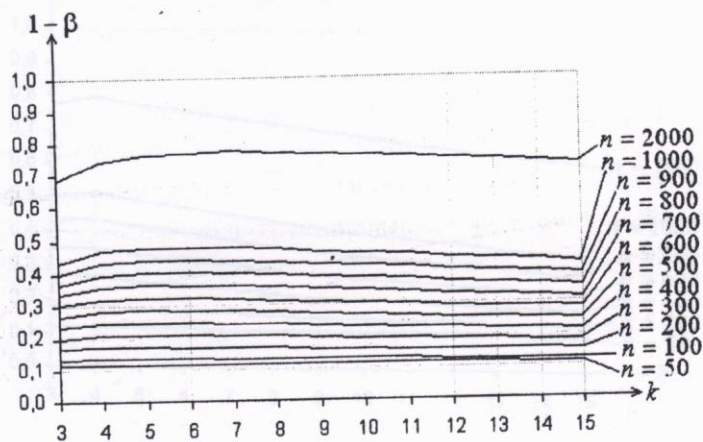


Рис. 3. Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с нормальным законом при равновероятном группировании

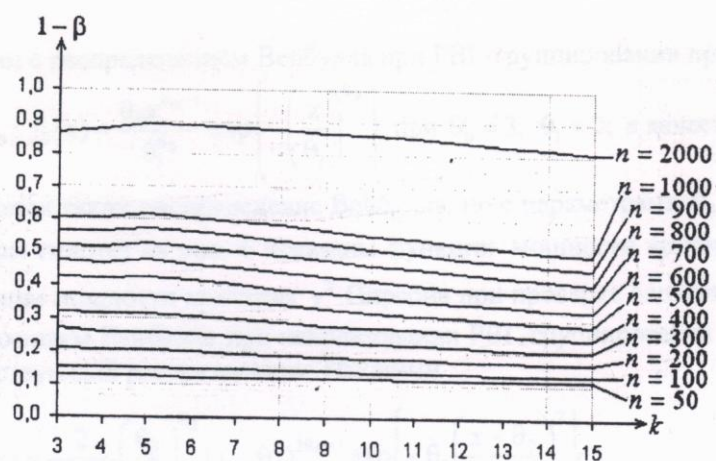


Рис. 4. Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с нормальным законом при АОГ-группировании

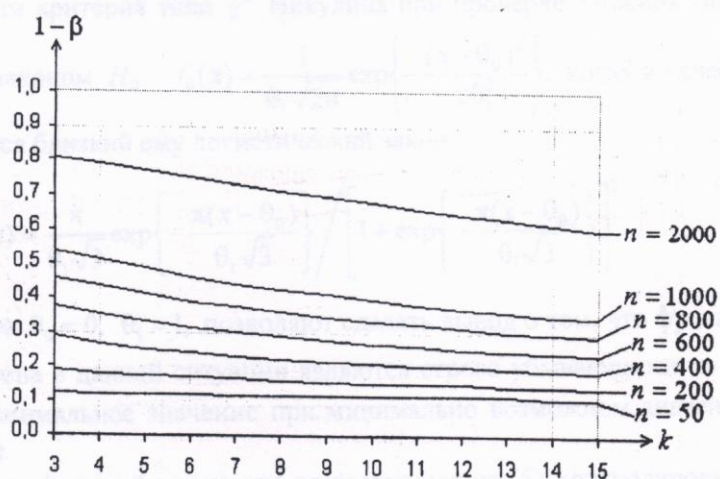


Рис. 5. Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с распределением Вейбулла при РВГ-группировании

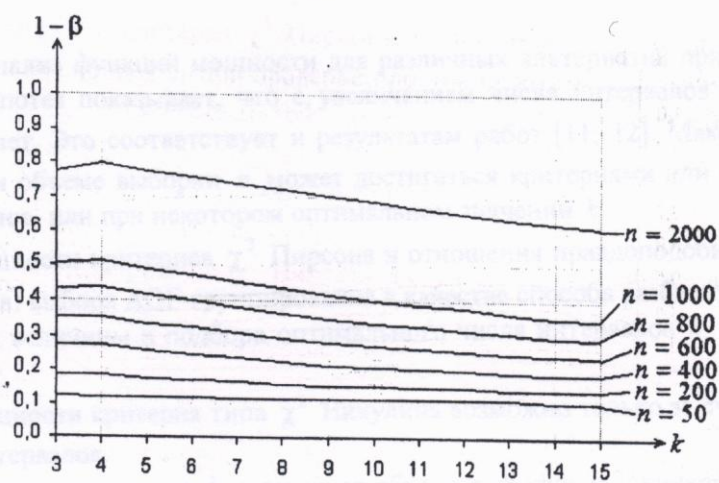


Рис. 6. Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с распределением Вейбулла при АОГ-группировании

простой гипотезы о согласии с распределением Вейбулла при РВГ-группировании представлены на рис. 5 (гипотеза $H_0: f_0(x) = \frac{\theta_0 x^{\theta_0-1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right\}$ при $\theta_0 = 3, \theta_1 = 2$; в качестве альтернативы H_1 рассматривается также распределение Вейбулла, но с параметрами $\theta_0 = 3,05, \theta_1 = 2,05$). Для этой же пары гипотез на рис. 6 показаны функции мощности критерия для АОГ-группирования. Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке сложной гипотезы о согласии с распределением Вейбулла при использовании РВГ-группирования и близкой альтернативы, соответствующей распределению Накагами

$$H_1: f_1(x) = \frac{2}{\Gamma(\theta_0)} \left(\frac{\theta_0}{\theta_1^2}\right)^{\theta_0} (x - \theta_2)^{2\theta_0-1} \exp\left\{-\theta_0 \left(\frac{x - \theta_2}{\theta_1}\right)^2\right\}$$

при $\theta_0 = 1,5485, \theta_1 = 1,7595; \theta_2 = 0,1605$, приведены на рис. 7. Функции мощности для той же пары гипотез для случая АОГ-группирования иллюстрирует рис. 8.

Функции мощности критерия типа χ^2 Никулина при проверке сложной гипотезы о согласии с нормальным законом $H_0: f_0(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2}\right\}$, когда в качестве альтернативы рассматривается близкий ему логистический закон

$$H_1: f_1(x) = \frac{\pi}{\theta_1 \sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}}\right\} \left/ \left[1 + \exp\left\{-\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}}\right\} \right] \right|^2$$

при значениях параметров $\theta_0 = 0, \theta_1 = 1$, позволяют сделать вывод о том, что функции мощности критерия χ^2 Пирсона в данной ситуации являются строго убывающими по k функциями и принимают максимальное значение при минимально возможном значении числа интервалов $k = 4$ (рис. 9).

Результаты расчета функций мощности по соотношению (5) контролировались статистическим моделированием функций мощности, при котором строились эмпирические функции распределений $G(S_n | H_0)$ и $G(S_n | H_1)$ для статистик S рассматриваемых критериев, и находились оценки мощности. Результаты моделирования оказались очень близкими к расчетным.

Заключение. Анализ функций мощности для различных альтернатив при проверке простых и сложных гипотез показывает, что с увеличением числа интервалов мощность критериев типа χ^2 падает. Это соответствует и результатам работ [11; 12]. Максимальная мощность при заданном объеме выборки n может достигаться критериями или при минимальном числе интервалов, или при некотором оптимальном значении k .

Увеличение мощности критериев χ^2 Пирсона и отношения правдоподобия возможно за счет двух факторов: выбора АОГ-группирования в качестве способа разбиения области определения случайной величины и подбора оптимального числа интервалов k при заданном объеме выборки n .

Увеличение мощности критерия типа χ^2 Никулина возможно только за счет выбора оптимального числа интервалов.

Оптимальное число интервалов k зависит от объема выборки n и конкретной пары конкурирующих гипотез H_0 и H_1 . Чаще всего оптимальное значение k оказывается существенно меньше значений, рекомендуемых различными регламентирующими документами и задаваемых множеством эмпирических формул, широкий перечень которых приводится, например, в [13].

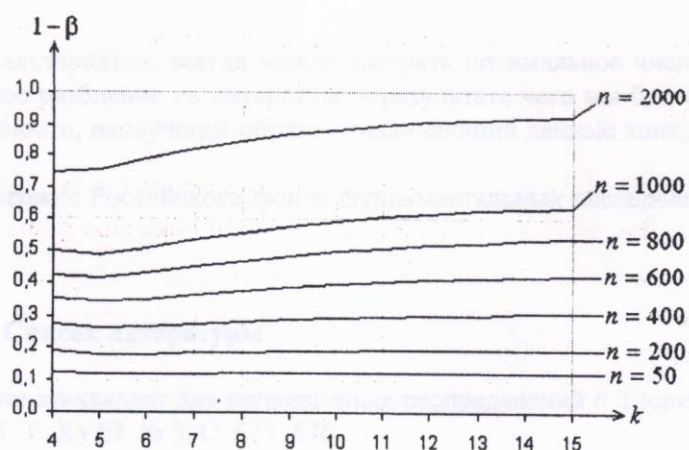


Рис. 7. Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке сложной гипотезы о согласии с распределением Вейбулла при РВГ-группировании и альтернативе, соответствующей распределению Накагами

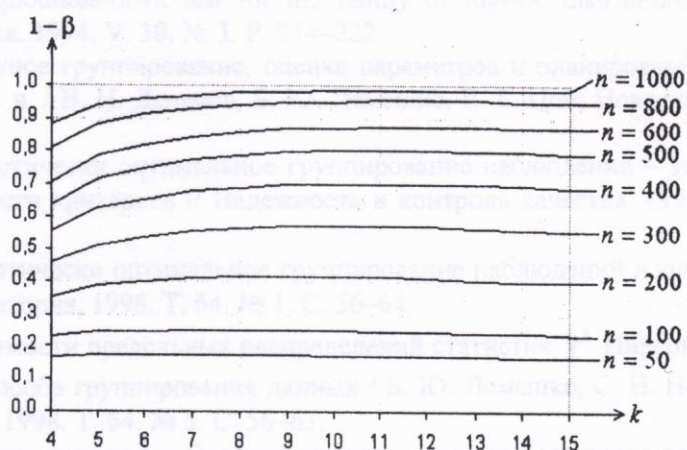


Рис. 8. Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке сложной гипотезы о согласии с распределением Вейбулла при АОГ-группировании и альтернативе, соответствующей распределению Накагами

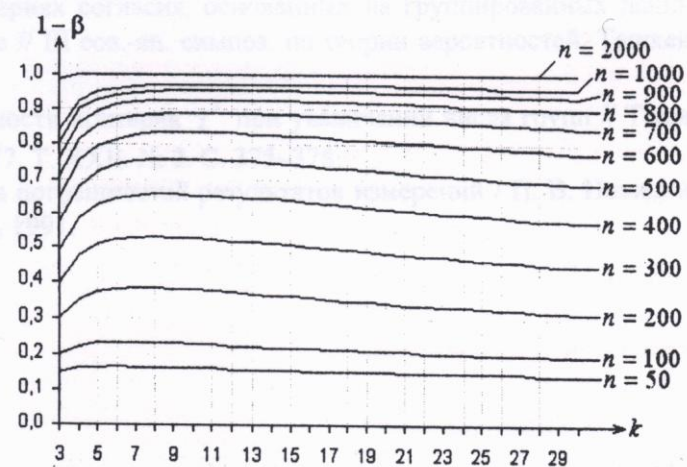


Рис. 9. Функции мощности критерия типа χ^2 Никулина при проверке сложной гипотезы о согласии с нормальным законом при РВГ-группировании и альтернативе, соответствующей логистическому закону

Таким образом, имея пару альтернатив, всегда можно выбрать оптимальное число интервалов и подобрать оптимальное разбиение на интервалы, в результате чего мы будем иметь критерий максимальной мощности, наилучшим образом различающий данные конкурирующие гипотезы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 00-01-00913).

Список литературы

1. Никулин М. С. О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. XVIII. № 3. С. 675–676.
2. Никулин М. С. Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. XVIII. № 3. С. 583–591.
3. Мирвалиев М. Критерии согласия типа хи-квадрат / М. Мирвалиев, М. С. Никулин // Заводская лаборатория. 1992. Т. 58. № 3. С. 52–58.
4. Aguirre N. Chi-squared goodness-of-fit test for the family of logistic distributions / N. Aguirre, M. Nikulin // Kybernetika. 1994. V. 30. № 3. P. 214–222.
5. Денисов В. И. Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов: В 2 ч. / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко, Е. Б. Цой; Новосиб. гос. техн. ун-т. Новосибирск, 1993.
6. Лемешко Б. Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений – это обеспечение максимальной мощности критериев // Надежность и контроль качества. 1997. № 8. С. 3–14.
7. Лемешко Б. Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия // Заводская лаборатория, 1998. Т. 64. № 1. С. 56–64.
8. Лемешко Б. Ю. О зависимости предельных распределений статистик χ^2 Пирсона и отношения правдоподобия от способа группирования данных / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Заводская лаборатория. 1998. Т. 64. № 5. С. 56–63.
9. Денисов В. И. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим: Метод. рекомендации. Ч. I. Критерии типа χ^2 / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998.
10. Большев Л. Н. Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. М.: Наука, 1983.
11. Чибисов Д. М. О критериях согласия, основанных на группированных данных / Д. М. Чибисов, Л. Г. Гванцеладзе // III сов.-яп. симпоз. по теории вероятностей. Ташкент: Фан, 1975. С. 183–185.
12. Боровков А. А. О мощности критерия χ^2 при увеличении числа групп // Теория вероятностей и ее применение. 1977. Т. XXII. № 2. С. 375–378.
13. Новицкий П. В. Оценка погрешностей результатов измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. Л.: Энергоатомиздат, 1991.