7. *Домбровский В. В., Чикунова Е. В.* Синтез динамических регуляторов пониженного порядка для систем со случайными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. №. 2. С. 97-101.
8. *Chen S., Yong J.* Stochastic linear guadratic optimal control problems // Applied Mathematics and Optimisation. 2001. Vol. 43. P. 21-45.

Б.Ю. Лемешко, С.С. Помадин

Корреляционный анализ многомерных случайных величин при нарушении предположений о нормальности [1]

1. Введение

В различных приложениях статистического анализа многомерных величин одну из ключевых позиций занимают задачи корреляционного анализа. В процессе их решения выявляются наличие и характер взаимосвязи величин, взаимозависимости величин при устранении влияния совокупности других или зависимости одной случайной величины от группы величин. Вычисляются оценки коэффициентов и матриц парной, частной и множественной корреляций, проверяются различные статистические гипотезы относительно параметров многомерного распределения и коэффициентов корреляции. На основании результатов корреляционного анализа может делаться вывод о наличии и характере функциональной зависимости или предпочтительности для описания исследуемого объекта регрессионной модели того или иного вида.

В основе классического аппарата корреляционного анализа лежит предположение о принадлежности наблюдаемого случайного вектора к многомерному нормальному закону. Базируясь на этом, получили предельные распределения статистик, используемых в корреляционном анализе. На практике предпосылки классического корреляционного анализа выполняются далеко не всегда. Поэтому возникает вопрос о справедливости выводов, сделанных при применении классического аппарата, при нарушении основного предположения.

Основной целью данной работы явилось стремление разобраться, что будет происходить с распределениями различных статистик корреляционного анализа, если наблюдаемый закон будет отличаться от

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00913)

многомерного нормального. Очевидно, что ответить на поставленный вопрос, используя чисто аналитические методы, чрезвычайно сложно из-за нетривиальности возникающих задач. Поэтому в основу проводимого исследования положена развиваемая методика компьютерного анализа статистических закономерностей.

Для ответа на поставленный вопрос было предусмотрено решение следующих подзадач:

– моделирование отличных от нормального многомерных законов распределения;

– исследование эмпирических распределений статистик корреляционного анализа при наблюдении многомерного нормального закона;

– исследование распределений статистик корреляционного анализа при законах распределения наблюдаемых многомерных величин, отличающихся от нормального.

Второй пункт данного перечня задач был предусмотрен для подтверждения работоспособности методики при совпадении результатов моделирования распределений статистик с классическими.

2. Моделирование многомерных случайных величин

Моделирование многомерного нормального закона. Многомерное нормальное распределение случайного вектора $\overline{X} = \|X_1, X_2, \ldots, X_m\|^\top$ размерности m полностью определяется вектором математических ожиданий $\overline{M} = \|M_1, M_2, \ldots, M_m\|^\top$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \|\sigma_{ij}\| = \|E[(X_i - M_i)(X_j - M_j)]\|$.

Функция плотности многомерного нормального закона имеет вид

$$f(\overline{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\overline{X}-\overline{M})^\top \Sigma^{-1} (\overline{X}-\overline{M})}.$$

Пусть мы имеем совокупность случайных величин $\{Z_i\}, i = \overline{1,m}$, где Z_i подчиняется стандартному нормальному закону с параметрами (0,1). Тогда вектор $\overline{X}$, распределенный по многомерному нормальному закону с параметрами $\overline{M}$ и Σ, получается через линейное преобразование вида [1]

$$\overline{X} = A\overline{Z} + \overline{M}. \tag{1}$$

Обычно предполагают, что A является нижней треугольной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix},$$

коэффициенты a_{ij} которой определяются рекуррентной процедурой

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} a_{ik}a_{jk}}{\sqrt{\sigma_{jj} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} a_{jk}^2}}, \quad 1 \le j \le i \le m. \tag{2}$$

Моделирование многомерного закона, отличного от нормального. Задача моделирования многомерных величин, распределенных по закону, отличному от нормального, с заданными математическим ожиданием и ковариационной матрицей в самой работе решается в соответствии с описанным выше алгоритмом. Однако совокупность $\{Z_i\}$, $i = \overline{1,m}$, формируется уже не по стандартному нормальному закону, а в соответствии с одним из одномерных законов распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Затем заданная матрица Σ раскладывается по формуле (2), и осуществляется преобразование (1). Тогда на выходе мы имеем некоторый многомерный закон, отличный от нормального, с известным математическим ожиданием и неизвестной ковариационной матрицей.

Для моделирования различных совокупностей $\{Z_i\}, i = \overline{1,m}$, было решено использовать двустороннее экспоненциальное распределение (экспоненциальное семейство распределений) с плотностью

$$f(x) = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\theta_1\Gamma(\frac{1}{\lambda})} \exp\left(-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\sqrt{2}\theta_1}\right)^{\lambda}\right),$$

где λ – параметр формы, так как оно охватывает целый класс симметричных распределений. Его частными случаями являются распределение Лапласа (параметр формы $\lambda = 1$), нормальное ($\lambda = 2$), предельными случаями – распределение Коши ($\lambda \to 0$) и равномерное ($\lambda \to +\infty$). Таким образом, с помощью параметра формы мы можем задавать непрерывное "удаление" наблюдаемого многомерного закона от нормального, как в сторону увеличения параметра ($\lambda > 2$), так и в сторону уменьшения параметра ($0 < \lambda < 2$). При параметре формы $\lambda = 2$ будут формироваться псевдослучайные векторы $\overline{X}$ в соответствии с нормальным законом.

Рис. 1 иллюстрирует изменение функции плотности семейства экспоненциальных распределений при изменении параметра формы от 0,5 до 10.

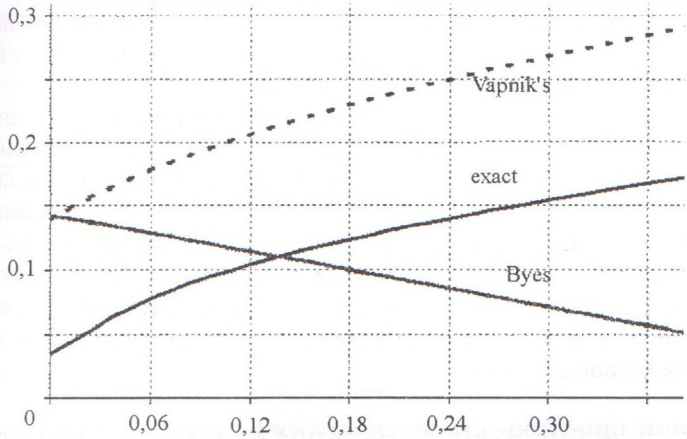

Рис. 1. Функции плотности двухстороннего экспоненциального распределения при различных параметрах формы

К сожалению, мы не можем моделировать многомерный закон с некоторой произвольной функцией распределения, с заданными математическим ожиданием и ковариационной матрицей, на "заданном" расстоянии (определяемом в смысле некоторой меры) от многомерного нормального. Однако мы можем построить распределение, отличающееся от нормального (в соответствии с процессом моделирования), с известными математическим ожиданием и ковариационной матрицей, определяемыми на основании исследования свойств полученного многомерного датчика (при заданных $\overline{M}$, Σ и λ). Для определения "истинной"

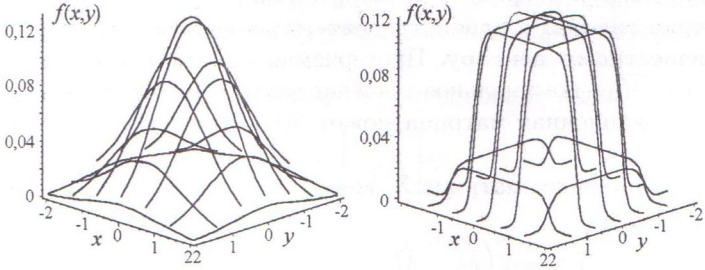

Рис. 2. Смоделированные плотности двумерного закона при $\lambda = 2$ (слева) и $\lambda = 10$ (справа)

ковариационной матрицы моделируемого многомерного закона использовались оценки максимального правдоподобия (ОМП), усредняемые по множеству проведенных экспериментов.

Таким образом решалась задача не по моделированию закона с заданными математическим ожиданием и ковариационной матрицей, а задача по моделированию закона с некоторыми параметрами $\overline{M}$ и Σ, истинные значения которых уточнялись в процессе исследования многомерного датчика. На рис. 2 приведен вид функций плотности, полученных при моделировании двумерных векторов при $\lambda = 2$ (плотность нормального закона, слева) и при $\lambda = 10$ (справа). Как видим, во втором случае полученное плосковершинное распределение существенно отличается от нормального.

3. Задачи проверки статистических гипотез классического корреляционного анализа

Пусть $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n$ – выборка m-мерного случайного вектора объема n; $\overline{M} = [M_i]_{i=1}^m$ – вектор математического ожидания случайного вектора $\overline{X}$; $\Sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1}^m$ – ковариационная матрица случайного вектора $\overline{X}$; $\widehat{\overline{M}}$ и $\widehat{\Sigma}$ – ОМП вектора математического ожидания и ковариационной матрицы, вычисляемые по негруппированным данным:

$$\widehat{\overline{M}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{X}_i, \quad \widehat{\Sigma} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X}_i - \widehat{\overline{M}}\right)\left(\overline{X}_i - \widehat{\overline{M}}\right)^{\top}.$$

Основное множество задач проверки статистических гипотез в классическом корреляционном анализе касается проверки гипотез о векторе математического ожидания, ковариационной матрице, парных, частных и множественных коэффициентах корреляции.

Проверка гипотез о равенстве математического ожидания некоторому известному вектору. Проверяемая гипотеза имеет вид H_0 : $\overline{M} = \overline{M}_0$, где $\overline{M}_0$ – номинальное значение вектора математических ожиданий. Ковариационная матрица может быть известной или неизвестной.

а) Ковариационная матрица Σ известна. В этом случае статистика [2, 3]

$$X_m^2 = n\left(\widehat{\overline{M}} - \overline{M}_0\right)^{\top}\Sigma^{-1}\left(\widehat{\overline{M}} - \overline{M}_0\right) \tag{3}$$

при справедливой гипотезе H_0 в качестве предельного распределения $G(X_m^2|H_0)$ имеет χ_m^2-распределение с числом степеней свободы m.

б) Ковариационная матрица Σ неизвестна. В этом случае используется статистика [2, 3]

$$T^2 = \frac{n(n-m)}{m(n-1)}(\widehat{\overline{M}} - \overline{M}_0)^\top \widehat{\Sigma}^{-1}(\widehat{\overline{M}} - \overline{M}_0), \tag{4}$$

которая при справедливости гипотезы H_0 имеет в пределе распределение Фишера с параметрами m и $n-m$: $G(T^2|H_0) = F_{m,n-m}$.

Проверка гипотез о коэффициентах парной корреляции. Взаимозависимость двух случайных величин характеризуется парным коэффициентом корреляции $r_{ij} = \sigma_{ij}/\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}$. Относительно парного коэффициента корреляции могут проверяться два вида гипотез: о значимости корреляции ($H_0 : r_{ij} = 0$) и равенстве коэффициента корреляции номинальному значению ($H_0 : r_{ij} = r_0$).

В случае проверки гипотезы $H_0 : r_{ij} = 0$ статистика [2, 3]

$$t = \frac{\sqrt{n-2}|\hat{r}_{ij}|}{\sqrt{1-\hat{r}_{ij}^2}}, \tag{5}$$

где $\hat{r}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}/\sqrt{\hat{\sigma}_{ii}\hat{\sigma}_{jj}}$ – оценка парного коэффициента, имеет в качестве предельного распределения $G(t|H_0)$ t_{n-2} – распределение Стьюдента с числом степеней свободы $n-2$.

При проверке гипотезы $H_0 : r_{ij} = r_0$ статистика [2, 3]

$$z_0 = \sqrt{n-3}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\hat{r}_{ij}}{1-\hat{r}_{ij}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r_0}{1-r_0}\right) - \left(\frac{r_0}{2(n-1)}\right)\right] \tag{6}$$

имеет в качестве предельного закона $G(z_0|H_0)$ стандартное нормальное распределение $N(0,1)$.

Проверка гипотез о коэффициентах частной корреляции. В случае частных корреляций рассматриваются условные корреляции между двумя величинами при фиксированных значениях некоторых других величин.

Представим случайный вектор $\overline{X}$ в следующем виде:

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{bmatrix},$$

где $\overline{X}_1 = (X_1, X_2, \ldots, X_l)^\top$, $\overline{X}_2 = (X_{l+1}, X_{l+2}, \ldots, X_m)^\top$, а вектор математических ожиданий и ковариационную матрицу

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} \overline{M}_1 \\ \overline{M}_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

Если случайный вектор $\overline{X}$ подчиняется нормальному закону с вектором средних $\overline{M}$ и ковариационной матрицей Σ, то условное распределение подвектора $\overline{X}_1$ при известном $\overline{X}_2$ является нормальным с математическим ожиданием $\overline{M}_1 + B(\overline{X}_2 - \overline{M}_2)$ и ковариационной матрицей $\Sigma_{11\bullet 2}$, где $B = \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$, $\Sigma_{11\bullet 2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$.

ОМП для частного коэффициента корреляции определяется соотношением

$$\hat{r}_{ij\bullet l+1,\ldots,m} = \frac{\hat{\sigma}_{ij\bullet l+1,\ldots,m}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii\bullet l+1,\ldots,m}\hat{\sigma}_{jj\bullet l+1,\ldots,m}}},$$

где $\hat{\sigma}_{ij\bullet l+1,\ldots,m}$ – элемент i-й строки и j-го столбца матрицы $\Sigma_{11\bullet 2}$, l – число компонент в условном распределении, $2 \le l \le m$. В данном случае при оценке взаимозависимости между компонентами X_i и X_j случайной величины $\overline{X}$ исключается влияние компонент $X_{l+1}, X_{l+2}, \ldots, X_m$.

При проверке гипотез вида

$$H_0 : r_{ij\bullet l+1,\ldots,m} = 0 \text{ и } H_0 : r_{ij\bullet l+1,\ldots,m} = r_0$$

используются те же самые статистики, что и для парного коэффициента корреляции. Но в данном случае в соответствующих соотношениях n заменяется на $n - m + l$.

Для проверки гипотезы $H_0 : r_{ij\bullet l+1,\ldots,m} = 0$ вычисляется статистика

$$t = \frac{\sqrt{n - m + l - 2}|\hat{r}_{ij\bullet l+1,\ldots,m}|}{\sqrt{1 - \hat{r}_{ij\bullet l+1,\ldots,m}}}. \tag{7}$$

При этом предельным распределением статистики $G(t|H_0)$ является $t_{n-m+l-2}$-распределение Стьюдента с числом степеней свободы $n - m + l - 2$.

При проверке гипотезы $H_0 : r_{ij\bullet l+1,\ldots,m} = r_0$ используется статистика

$$z_0 = \sqrt{n-3}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \hat{r}_{ij\bullet l+1,\ldots,m}}{1 - \hat{r}_{ij\bullet l+1,\ldots,m}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + r_0}{1 - r_0}\right) - \left(\frac{r_0}{2(n-1)}\right)\right], \tag{8}$$

предельным распределением $G(z_0|H_0)$ которой является стандартное нормальное распределение $N(0,1)$.

Проверка гипотезы о коэффициенте множественной корреляции. Множественный коэффициент корреляции является мерой зависимости компоненты многомерной случайной величины от некоторого множества компонент. Можно рассматривать корреляцию между одной компонентой случайного вектора и множеством всех остальных или каким-то подмножеством.

Если представить случайный вектор $\overline{X}$ в том виде, как это было показано выше, то ОМП множественного коэффициента корреляции между $X_i, i \leq l$ и множеством компонент $X_{l+1}, X_{l+2}, \ldots, X_m$ определяется соотношением

$$\hat{r}_{i \bullet l+1,\ldots,m} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{(i)} \Sigma_{22}^{-1} \hat{\sigma}_{(i)}^{\top}}{\hat{\sigma}_{ii}}},$$

где $\sigma_{(i)}$ – i-я строка матрицы Σ_{12}, σ_{ii} – элемент матрицы Σ_{11}.

Для проверки гипотезы $H_0 : r_{i \bullet l+1,\ldots,m} = 0$ вычисляется статистика [2, 3]

$$F = \frac{n-m+l-1}{m-l} \frac{\hat{r}^2_{i \bullet l+1,\ldots,m}}{1-\hat{r}^2_{i \bullet l+1,\ldots,m}}, \tag{9}$$

предельным распределением $G(F|H_0)$ которой является $F_{m-l,n-m+l-1}$-распределение Фишера с параметрами $m-l$ и $n-m+l-1$.

4. Моделирование и исследование распределений статистик критериев, используемых в корреляционном анализе

Подчеркнем, что указанные предельные распределения рассмотренных выше статистик имеют место при наблюдении многомерного нормального закона. Что произойдет с предельными распределениями статистик, насколько могут быть справедливы выводы, формулируемые на основании решения задач классического корреляционного анализа, если наблюдаемый многомерный закон отличается от нормального, заранее сказать нельзя.

Исследование распределений статистик при принадлежности наблюдений нормальному закону. На первом этапе методами статистического моделирования исследовались распределения статистик корреляционного анализа при условии, что наблюдения принадлежат многомерному нормальному закону. Близость получаемых эмпирических распределений статистик известным в данном случае предельным законам является доводом в пользу надежности методики при анализе достоверности результатов последующих исследований.

Моделирование и исследование эмпирических распределений статистик классического корреляционного анализа показали, что они очень хорошо согласуются с соответствующими теоретическими предельными распределениями. Например, на рис. 3 представлены эмпирическое распределение статистики X^2_m (3) и соответствующее предельное χ^2_m-распределение при $m = 2$ и объеме выборки $n = 45$. В ходе проведенных исследований объемы выборок значений статистик, формируемых

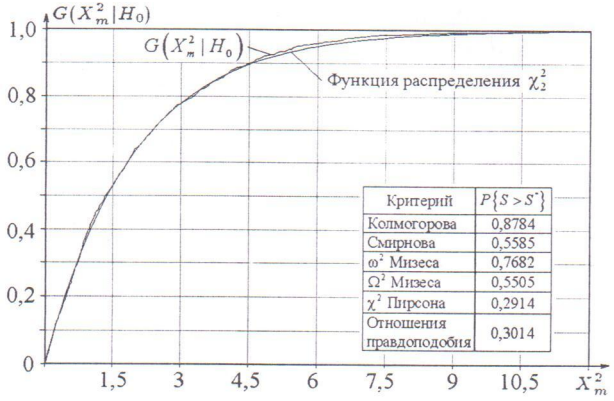

Рис. 3. Распределение статистики X_2^2 при нормальном законе ($m = 2$), $n = 45$

в результате моделирования, всегда задавались равными 1000. На рисунке отражены также результаты проверки согласия эмпирического распределения с теоретическим по критериям Колмогорова, Смирнова, ω^2 и Ω^2 Мизеса, χ^2 Пирсона и отношениям правдоподобия [4, 5]: по каждому из критериев приведен достигнутый уровень значимости $P\{S > S^*\} = 1 - G(S|H_0)$, где $G(S|H_0)$ – предельное распределений статистики S при справедливости проверяемой гипотезы H_0, S^* – значение статистики критерия согласия, вычисленное по анализируемой выборке. Исследование сходимости распределений статистик корреляционного анализа к предельным в зависимости от объема выборки n многомерного закона показало, что для тех статистик, параметры предельных распределений которых не зависят от объема выборки [статистики (3), (6) и (8)], эмпирические распределения статистик оказываются близки к предельным уже при выборках сравнительно небольшого объема. Так, у статистики X_m^2 высокий достигаемый уровень значимости по критериям согласия наблюдается с объемов выборки $n = 30 \div 45$, а для статистики z_0 (как для парного коэффициента корреляции, так и для частного) – с $n = 100 \div 150$. Распределения статистик T^2, t (для парного и частного коэффициента) и F, параметры предельных распределений которых зависят от объема выборки n, хорошо согласуются с предельными, начиная с объемов выборок $n = 15 \div 30$.

Существенного влияния размерности случайного вектора m на сходимость распределений соответствующих статистик к предельным при исследовании отмечено не было.

Исследование распределений статистик при многомерном законе, построенном по экспоненциальному семейству с параметром формы . В первую очередь отметим важную особенность, связанную с моделированием многомерного "ненормального" распределения, которую приходится учитывать при моделировании и исследовании рассматриваемых в данной работе статистик. Дело в том, что матрица Σ, задаваемая на этапе моделирования многомерного вектора, отличается от ковариационной матрицы получаемого псевдослучайного вектора. Это отличие является следствием того, что преобразуется случайный вектор, сформированный из компонент, распределенных по "ненормальному" закону (в нашем случае – по экспоненциальному семейству).

Но для исследования распределений статистик корреляционного анализа нам необходимы выборки псевдослучайных величин с известными (истинными) параметрами (математическим ожиданием и ковариационной матрицей), соответствующими проверяемой гипотезе. Для решения этой проблемы в качестве "истинной" ковариационной матрицы было предложено использовать среднее арифметическое ее оценок максимального правдоподобия, получаемых по ряду выборок большого размера при неизменном векторе математических ожиданий. Таким образом, мы (пока) не можем моделировать псевдослучайные векторы с "ненормальным" законом с заданной ковариационной матрицей, но можем моделировать с известной ковариационной матрицей. А этого достаточно для целей нашего исследования.

Эту особенность приходится учитывать только при исследовании статистики (3), при вычислении которой используется известная ковариационная матрица Σ. При вычислении остальных статистик, исследуемых в данной работе, используется оценка ковариационной матрицы.

Исследования распределений статистик проводились для многомерных законов, моделируемых на основании рассмотренной процедуры при параметрах $\lambda > 1$.

Это ограничение обусловлено тем, что предельным случаем экспоненциального семейства при $\lambda \to 0$ является распределение Коши, которое представляет собой пример "патологического" распределения: не существует математического ожидания и дисперсия расходится. Поэтому при параметре $\lambda < 1$ мы в результате моделирования получаем закон с вырожденной ковариационной матрицей.

Распределения статистик корреляционного анализа при многомерных законах, отличающихся от нормального и моделируемых в соответствии с описанной процедурой, базирующейся на экспоненциальном семействе с параметром формы λ, определяющим вид закона, иссле-

Рис. 4. Распределение статистики T^2 при многомерном законе ($m = 2$), $\lambda = 5$ и $n = 15$

довались при различных объемах выборок n и различной размерности случайных величин m. На рис. 4–8 приведены примеры эмпирических распределений исследуемых статистик с отражением соответствующих предельных распределений классических статистик. На рисунках представлены также значения достигнутых уровней значимости $P\{S > S^*\}$ по критериям Колмогорова, Смирнова, ω^2 и Ω^2 Мизеса, χ^2 Пирсона и отношения правдоподобия при проверке согласия, полученных в результате моделирования эмпирических распределений статистик предельным распределениям классических статистик.

На рис. 4 показан вид распределения статистики T^2 при законе, смоделированном по параметру $\lambda = 5$. Высокие достигнутые уровни значимости по всем критериям согласия и визуальная близость распределения статистики T^2 и предельного в случае многомерного нормального закона F-распределения Фишера позволяют утверждать, что вид предельного распределения статистики значимо не изменился.

На рис. 5, 6 приведены результаты моделирования распределения статистики z_0, вычисляемой по формуле (6) при проверке гипотез о номинальном значении коэффициента парной корреляции, при многомерных законах, моделируемых соответственно при параметрах нашей процедуры $\lambda = 5$ и $\lambda = 10$. И в данных случаях очень высокие достигнутые уровни значимости по всем критериям согласия свидетельствуют в пользу того, что вид предельного распределения статистики тот же, что и в классическом случае.

Результаты моделирования распределения статистики z_0, вычисля-

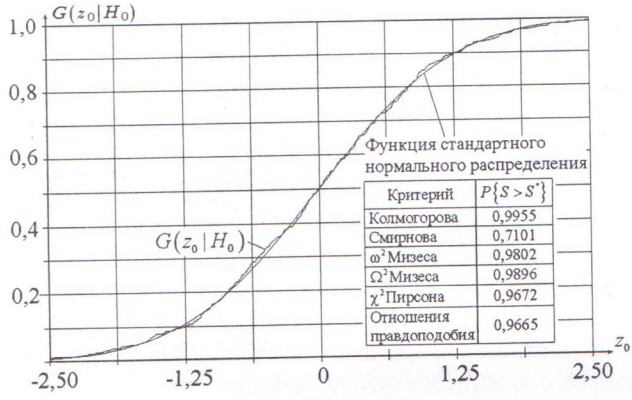

Рис. 5. Распределение статистики z_0 (для парного коэффициента корреляции) при многомерном законе ($m = 3$), $\lambda = 5$ и $n = 100$

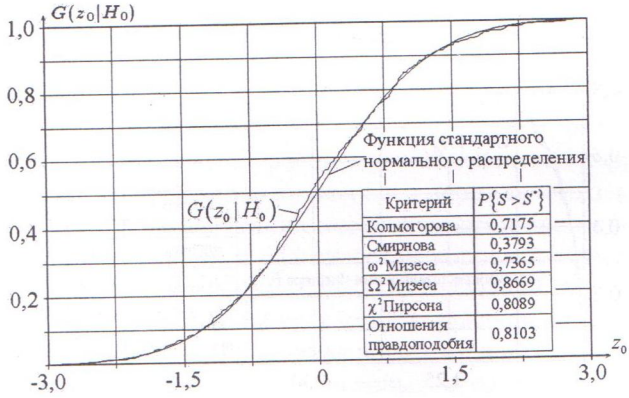

Рис. 6. Распределение статистики z_0 (для парного коэффициента корреляции) при многомерном законе ($m = 3$), $\lambda = 10$ и $n = 100$

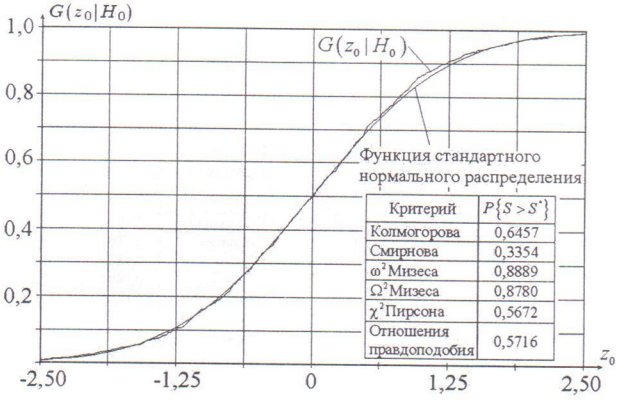

Рис. 7. Распределение статистики z_0 (для частного коэффициента корреляции) при многомерном законе ($m = 3$), $\lambda = 5$ и $n = 100$

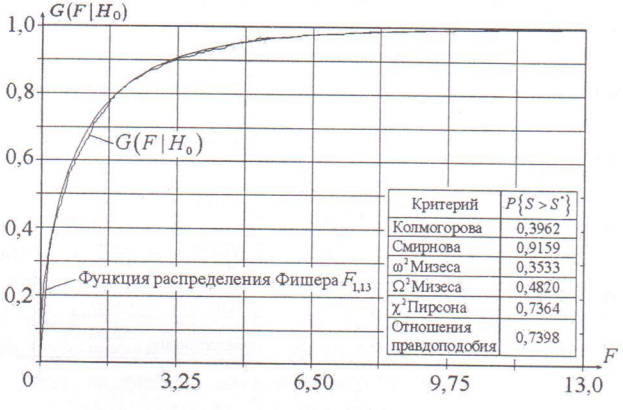

Рис. 8. Распределение статистики F при многомерном законе ($m = 3$), $\lambda = 10$ и $n = 15$

емой при проверке гипотез о частном коэффициенте корреляции, при законе, построенном по параметру $\lambda = 5$, отражены на рис. 7. На рис. 8 представлены результаты исследования распределения статистики F при многомерном законе, смоделированном по параметру $\lambda = 10$. И в этих случаях можно констатировать близость эмпирических распределений статистик и предельных законов, полученных в классическом корреляционном анализе.

Результаты проведенных исследований распределений рассмотренных статистик корреляционного анализа показывают, что в случае многомерных законов, достаточно существенно отличающихся от нормального (более островершинных или более плосковершинных, но симметричных), значимого изменения предельных распределений исследуемых статистик не происходит.

Это позволяет, по крайней мере, надеяться, что статистические выводы в задачах корреляционного анализа будут оставаться корректными и при нарушении предположений о нормальности наблюдаемого многомерного закона при условиях сохранения симметрии, существовании вектора математических ожиданий и невырожденности ковариационной матрицы.

5. Заключение

Основные результаты исследований могут быть сформулированы следующим образом.

Предложена универсальная процедура моделирования, позволяющая моделировать случайные векторы, подчиненные как многомерному нормальному (параметр формы $\lambda = 2$), так и отличному от него закону с "заданной" мерой отклонения.

Исследования эмпирических распределений статистик корреляционного анализа при наблюдении многомерного нормального закона показали, что они хорошо согласуются с теоретическими предельными распределениями, полученными в классическом корреляционном анализе, и подтвердили эффективность методики исследований.

Исследования распределений статистик корреляционного анализа в случае многомерных законов, отличающихся от нормального в достаточно широких пределах (смоделированных в соответствии с разработанной процедурой с параметром $\lambda \geq 1$), показали, что значимого изменения предельных распределений исследуемых статистик не происходит. Эмпирические распределения рассматриваемых статистик попрежнему хорошо описываются предельными распределениями, полученными в классическом корреляционном анализе в предположении о

нормальности наблюдаемого вектора. Это существенно расширяет сферу корректного применения методов классического корреляционного анализа в приложениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ермаков С. М., Михайлов Г. А.* Статистическое моделирование. Москва: Наука, 1982. 296 с.
2. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963. 500 с.
3. *Лемешко Б. Ю.* Корреляционный анализ многомерных наблюдений случайных величин: Программная система. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1995. 39 с.
4. *Денисов В. И., Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.* Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Методические рекомендации. Часть I. Критерии типа χ^2. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. 126 с.
5. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.* Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Методические рекомендации. Часть II. Непараметрические критерии. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999. 85 с.

А.Г. Медведев

Робастная версия GMM-оценки

Рассматривается робастная версия оценок обобщенного метода моментов (GMM), удобная для оценивания параметров многофакторных моделей временной структуры процентных ставок. Приводятся условия состоятельности и асимптотической нормальности робастных оценок.

1. Введение

При принятии решений на финансовых рынках инвестор нуждается в информации, позволяющей ему представлять динамику рыночных показателей, важнейшим из которых является временная структура процентных ставок, показывающая доходность безрисковых инструментов в зависимости от срока их погашения. В последнее время в качестве моделей динамики процентных ставок чаще всего используются стохастические дифференциальные уравнения, а в многофакторных моделях