Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.Ю. ЛЕМЕШКО

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

Руководство по применению

МОСКВА
«ИНФРА–М»
2014

УДК 519.23(076.5)
ББК 22172я7
Л 442

Рецензенты:
А.А. Попов – д-р техн. наук, профессор;
В.А. Селезнев – д-р физ.-мат. наук, профессор

Лемешко Б.Ю.
Л 44 Непараметрические критерии согласия. Руководство по применению. – М.: ИНФРА–М, 2014. – 163с.

ISBN 978-5-16-010003-6 (ИНФРА-М, print)
ISBN 978-5-16-101674-9 (ИНФРА-М, online)

Книга рассчитана на специалистов, сталкивающихся в своей деятельности с вопросами статистического анализа данных или с необходимостью выбора модели закона распределения, адекватно описывающего наблюдаемые случайные величины.

В руководстве рассматриваются вопросы применения непараметрических критериев согласия (Колмогорова, Купера, Крамера–Мизеса–Смирнова, Ватсона, Андерсона–Дарлинга, Жанга) при проверке простых и сложных гипотез.

В приложении приводятся таблицы, содержащие процентные точки и модели распределений статистик, необходимые для корректного применения критериев при проверке простых и, главное, различных сложных гипотез.

Следование рекомендациям обеспечит корректность статистических выводов при анализе данных с использованием непараметрических критериев согласия.

Книга будет полезна инженерам, научным сотрудникам, специалистам различного профиля (медикам, биологам, социологам, экономистам, и др.), сталкивающимся в своей деятельности с необходимостью статистического анализа результатов экспериментов. Руководство будет полезно преподавателям вузов, аспирантам и студентам.

ББК 22172я7

ISBN 978-5-16-010003-6 (ИНФРА-М, print)
ISBN 978-5-16-101674-9 (ИНФРА-М, online)

Оглавление

Предисловие 5
1. Введение.. 7
2. Непараметрические критерии согласия при проверке простых гипотез.. 12
2.1. Критерий Колмогорова.. 12
2.2. Критерий Смирнова.. 13
2.3. Критерий Крамера-Мизеса-Смирнова 14
2.4. Критерий Андерсона-Дарлинга 16
2.5. Критерий Купера.. 16
2.6. Критерий Ватсона 18
2.7. Критерии Жанга 21
2.8. Проверка простых гипотез 22
2.8.1. Порядок проверки простой гипотезы.. 22
2.8.2. Проверка простой гипотезы по критерию Колмогорова..... 23
2.8.3. Проверка простой гипотезы по критерию Смирнова 23
2.8.4. Проверка простой гипотезы по критерию ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова 23
2.8.5. Проверка простой гипотезы по критерию Ω^2 Андерсона–Дарлинга.. 24
2.8.6. Проверка простой гипотезы по критерию Купера.............. 24
2.8.7. Проверка простой гипотезы по критерию Ватсона 25
2.8.8. Проверка простой гипотезы по критериям Жанга.............. 25
3. Непараметрические критерии согласия при проверке сложных гипотез.. 27
3.1. Факторы, влияющие на распределения статистик критериев при проверке сложных гипотез 27
3.2. Методы оценивания параметров распределений и зависимость от них распределений статистик критериев 28
3.3. Зависимость распределений статистик непараметрических критериев от вида закона.. 31
3.4. Зависимость распределений статистик непараметрических критериев от числи и типа оцениваемых параметров 32

3.5. Зависимость распределений статистик непараметрических критериев от конкретных значений параметра 34
3.6. Выводы.. 42
4. Проверка сложных гипотез 44
4.1. Порядок проверки сложной гипотезы....................................... 44
4.2. Перечень распределений, для которых регламентирована проверка сложных гипотез 46
4.3. Примеры применения критериев согласия при простых и сложных гипотезах... 53
4.4. Некоторые замечания к применению 70
4.4.1. О мощности критериев 70
4.4.2. О типичных ошибках применения 72
5. О решении проблем проверки сложных гипотез 74
5.1. Развитие ситуации.. 74
5.2. Методика компьютерного анализа статистических закономерностей 76
5.3. Интерактивный подход к проверке гипотез в нестандартных условиях 79
6. Заключение 83
Библиографический список 85
Приложение А. Таблицы распределений статистик непараметрических критериев согласия при простых и сложных гипотезах 94

Предисловие

История применения непараметрических критериев согласия насчитывает ровно 80 лет, начиная с работы А.Н. Колмогорова [18], после которой был предложен еще ряд непараметрических критериев, ставших классическими, статистики которых обладают замечательным свойством “свободы от распределения” при проверке простых гипотез. Это свойство предопределило широкое использование этих критериев в приложениях при решении задач статистического анализа.

Через 20 с небольшим лет стало известно о проблеме [17]. Если по анализируемой выборке оцениваются параметры закона распределения вероятностей, а затем по ней же проверяется согласие с данным законом с применением непараметрического критерия, то свойство “свободы от распределения” статистики этого критерия теряется. Распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез оказываются совсем другими, нежели при проверке простых, и нельзя использовать классические результаты.

С тех пор математическая статистика в своем развитии ушла далеко вперед, а проблема применения непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез осталась.

При этом множество специалистов, имеющих отношение к математической статистике и применению методов статистического анализа, условно можно разбить на два подмножества. К первому отнести специалистов в области математической статистики, которые знают о проблеме применения непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез, но поглощенные своими задачами, не занимаясь анализом данных в приложениях, не используют эти критерии в своей деятельности. К другому подмножеству, которое несравненно больше, отнести тех, кто не знает об этой проблеме, но в своей практической деятельности, сталкиваясь с необходимостью статистического анализа результатов экспериментальных исследований, применяет непараметрические критерии согласия. При этом применяет, как правило, в условиях проверки сложных гипотез, опираясь на классические результаты, а, следовательно, не корректно. Эти два подмножества специалистов практически не пересекаются. Более того, складывается ощущение, что доля первого подмножества относительно сокращается и это связано с тем, что в университетских курсах математической статистики о проблеме не упоминается.

17 лет назад, когда нам стала известно о существовании этой проблемы и степени её решения, мы относились ко второму подмножеству, к той его части, которая не понимала, почему оценивая параметры и применяя непараметрические критерии согласия, мы никак не учитываем этого факта при принятии решения о результатах проверки гипотезы. Было откровением, что проблема давно известна, но далека от разрешения.

Тогда, используя свои возможности и методы статистического моделирования, мы убедились, что можно строить приближенные модели, которые с достаточной точностью описывают распределения статистик критериев согласия при проверке различных сложных гипотез. На базе этих результатов были подготовлены рекомендации [93], а затем рекомендации по стандартизации Р 50.1.037–2002 [111]. Готовя рекомендации по стандартизации [111], мы очень надеялись, что следование им позволит снизить уровень некорректного применения критериев в приложениях. Ожидания не очень оправдались, но надежда остается.

Данное руководство, которое на базе последующих исследований существенно уточняет и расширяет прежние результаты, призвано заменить рекомендации по стандартизации [111].

Я очень признателен своим ученикам и коллегам (Постовалову С.Н., Чимитовой Е.В., Лемешко С.Б., Волковой В.М., Рогожникову А.П., Горбуновой А.А.), сделавшим много для исследования распределений статистик критериев в условиях нарушения стандартных предположений и вносящим вклад в развитие компьютерных технологий исследования статистических закономерностей.

Б.Ю. Лемешко

Январь 2014

1. Введение

Целью первичной обработки экспериментальных наблюдений обычно является выбор закона распределения, наиболее хорошо описывающего случайную величину, выборку которой наблюдают. Насколько хорошо наблюдаемая выборка описывается теоретическим законом, проверяют с помощью различных критериев согласия. Цель проверки гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим – это стремление удостовериться в том, что данная модель теоретического закона не противоречит наблюдаемым данным, и использование ее не приведет к существенным ошибкам при вероятностных расчетах. Некорректное использование критериев согласия может приводить к необоснованному принятию (чаще всего) или необоснованному отклонению проверяемой гипотезы.

Проверка статистических гипотез о согласии эмпирических данных с теоретическим законом распределения обычно осуществляется с применением критериев типа χ^2 или непараметрических критериев.

В данном руководстве говорится только о применении непараметрических критериев согласия, в частности, о применении критериев Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлинга, Купера, Ватсона, Жанга. К сожалению, практика применения такого рода критериев в приложениях богата большим числом примеров некорректного использования. Нередко с такими примерами можно столкнуться в литературных источниках учебного характера. Наиболее распространенные ошибки применения связаны с использованием классических результатов, имеющих место при проверке простых гипотез, для ситуаций, соответствующих проверке сложных гипотез [72, 27].

При проверке согласия различают простые и сложные гипотезы. Простая проверяемая гипотеза имеет вид H_0: $F(x) = F(x, \theta)$, где $F(x,\theta)$ – функция распределения вероятностей, с которой проверяют согласие наблюдаемой выборки, а θ – известное значение параметра (скалярного или векторного).

Сложная проверяемая гипотеза имеет вид $H_0: F(x) \in \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$, где Θ – область определения параметра θ.

Следует отметить, что если процесс вычисления оценки $\hat{\theta}$ скалярного или векторного параметра закона не опирается на ту же самую выборку, по которой проверяют гипотезу о согласии, то алгоритм применения критерия согласия при проверке сложной гипотезы не отличается от проверки простой гипотезы.

Проблемы возникают, если при проверке сложной гипотезы оценку $\hat{\theta}$ параметра распределения вычисляют по той же самой выборке, по которой проверяют согласие. Далее, говоря о проверке сложных гипотез, мы, как правило, будем предполагать, что оценка параметра $\hat{\theta}$ вычисляется по той же выборке.

Очевидно, что на практике при обработке результатов измерений с проблемой проверки сложных гипотез чаще всего сталкиваются именно в такой ситуации, поскольку сначала оценивают по выборке параметры модели, чтобы лучше подогнать ее к наблюдаемым данным, а потом проверяют адекватность полученной модели.

Схема проверки гипотезы заключается в следующем.

В соответствии с применяемым критерием согласия вычисляют значение S^* статистики критерия S как некоторой функции от выборки и теоретического закона распределения с плотностью $F(x,\theta_0)$ [или $F(x,\hat{\theta})$ при сложной гипотезе]. Для используемых на практике критериев асимптотические (предельные) распределения $G(S|H_0)$ соответствующих статистик при условии истинности гипотезы H_0 обычно известны. Как правило, для ситуаций проверки простых и сложных гипотез эти распределения *различаются*.

В ситуации проверки простых гипотез предельные распределения статистик классических непараметрических критериев согласия известны и не зависят от вида наблюдаемого закона распределения и, в частности, от его параметров. Говорят, что эти критерии являются «свободными от распределения». Это достоинство предопределило широкое использование данных критериев в различных приложениях.

Далее в принятой практике статистического анализа обычно полученное значение статистики S^* сравнивают с критическим значением S_α при заданном уровне значимости α. Нулевую гипотезу отвергают, если $S^* > S_\alpha$ (рис. 1.1).

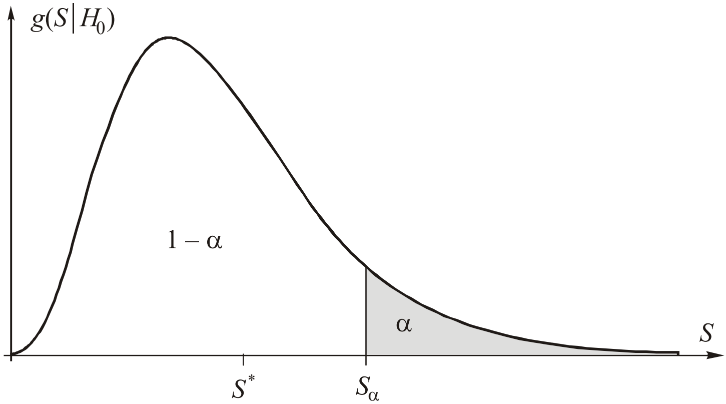

Рис. 1.1. Плотность распределения статистики при истинной гипотезе H_0

Критическое значение S_α, определяемое в случае одномерной статистики из уравнения

$$\alpha = \int_{S_\alpha}^{\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G(S_\alpha|H_0), \tag{1.1}$$

где $g(s|H_0)$ − условная плотность распределения статистики, обычно берут из соответствующей статистической таблицы или вычисляют.

Больше информации о степени согласия можно почерпнуть из «достигаемого уровня значимости»: величины вероятности возможного превышения полученного значения статистики при истинности нулевой гипотезы

$$P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{\infty} g(s|H_0)\,ds = 1 - G(S^*|H_0). \tag{1.2}$$

Именно эта вероятность позволяет судить о том, насколько хорошо выборка согласуется с теоретическим распределением, так как по существу представляет собой вероятность истинности нулевой гипотезы (рис. 1.2). Гипотезу о согласии не отвергают, если $P\{S > S^{*}\} > \alpha$.

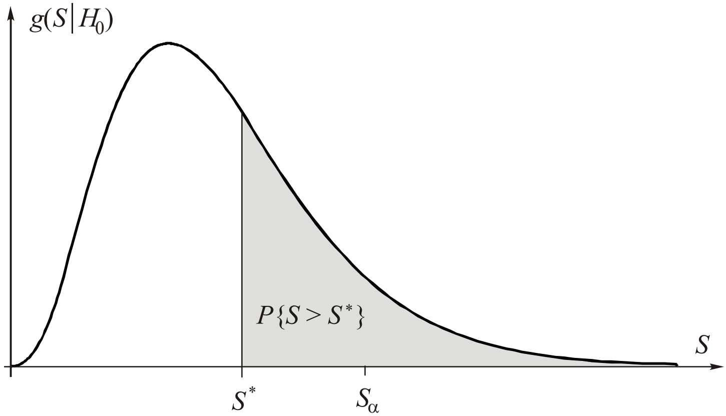

Рис. 1.2. Плотность распределения статистики при истинной гипотезе H_0 и достигаемый уровень значимости

Задачи оценивания параметров и проверки гипотез опираются на выборки независимых случайных величин. Случайность самой выборки предопределяет, что возможны и ошибки в результатах статистических выводов. С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов: ошибка первого рода состоит в том, что отклоняют гипотезу H_0, когда она верна; ошибка второго рода состоит в том, что принимают гипотезу H_0, в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Уровень значимости α задает вероятность ошибки первого рода. Обычно в критериях согласия не рассматривают конкретную конкурирующую гипотезу. И тогда можно считать, что конкурирующая гипотеза имеет вид H_1: $F(x) \neq F(x, \theta_0)$.

Если же гипотеза H_1 задана и имеет, например, вид H_1: $F(x) = F_1(x, \theta_1)$, то задание величины α для используемого критерия проверки гипотез определяет и вероятность ошибки второго рода β

$$\beta = \int_0^{S_\alpha} g(s|H_1)ds . \quad (1.3)$$

На рис. 1.3 $g(s \mid H_0)$ отображает плотность распределения статистики S при истинности гипотезы H_0, а $g(s \mid H_1)$ – плотность распределения при справедливости H_1.

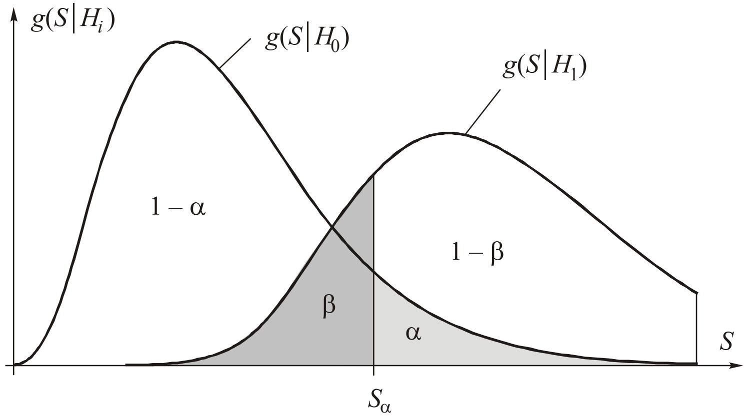

Рис. 1.3. Плотности распределения статистик при справедливости гипотез H_0 и H_1

Мощность критерия представляет собой величину $1-\beta$. Очевидно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении α, тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1. Особенно важно, чтобы этот критерий хорошо различал близкие конкурирующие гипотезы. Графически требование максимальной мощности критерия означает, что на рис. 1.3 плотности $g(s \mid H_0)$ и $g(s \mid H_1)$ должны быть максимально «раздвинуты».

2. Непараметрические критерии согласия при проверке простых гипотез

2.1. Критерий Колмогорова

Критерий Колмогорова опирается на статистику

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} \left| F_n(x) - F(x, \theta) \right|, \qquad (2.1)$$

где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения; $F(x, \theta)$ – теоретическая функция распределения; n – объем выборки. Предельное распределение этой статистики для случая проверки простой гипотезы было получено Колмогоровым в [18]. При $n \to \infty$ функция распределения статистики $\sqrt{n} \cdot D_n$ сходится равномерно к функции распределения Колмогорова

$$K(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 s^2} . \qquad (2.2)$$

При проверке гипотез с применением критерия Колмогорова рекомендуется использовать статистику с поправкой Большева [63, 64] в форме [65]

$$S_K = \sqrt{n} D_n + \frac{1}{6\sqrt{n}} = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \qquad (2.3)$$

где

$$D_n = \max\left(D_n^+, D_n^-\right), \qquad (2.4)$$

$$D_n^+ = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i, \theta) \right\}; \qquad (2.5)$$

$$D_n^- = \max_{1 \le i \le n} \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{i-1}{n} \right\}, \qquad (2.6)$$

n – объем выборки; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ здесь и далее – упорядоченные по возрастанию выборочные значения; $F(x, \theta)$ – функция закона распределения, согласие с которым проверяют. Распределение величины S_K при простой гипотезе в пределе подчиняется закону Колмогорова с функцией распределения $K(S)$.

Если для вычисленного по выборке значения статистики S_K^* выполняется неравенство

$$P\left\{S > S_K^*\right\} = 1 - K\left(S_K^*\right) > \alpha,$$

то нет оснований для отклонения гипотезы H_0.

В случае использования поправки Большева зависимостью распределения статистики (2.3) от объема выборки можно практически пренебречь при $n > 25$ и в качестве распределения статистики использовать предельное распределение $K(S)$.

Следует отметить, что в зарубежных публикациях упоминаний о применении данной поправки не встречается, и в критерии Колмогорова, как правило, используют статистику вида $\sqrt{n}D_n$, вследствие чего вынуждены учитывать зависимость распределения данной статистики от объема выборки и отличие его от $K(S)$.

2.2. Критерий Смирнова

В критерии Смирнова используют статистику

$$D_n^+ = \sup_{|x|<\infty} \left(F_n(x) - F(x, \theta)\right) \tag{2.7}$$

или статистику

$$D_n^- = -\inf_{|x|<\infty} \left(F_n(x) - F(x, \theta)\right), \tag{2.8}$$

значения которых вычисляют по эквивалентным соотношениям (2.5), (2.6).

Реально в критерии обычно используют статистику [65]

$$S_m = \frac{\left(6nD_n^+ + 1\right)^2}{9n}, \qquad (2.9)$$

которая при простой гипотезе в пределе подчиняется распределению χ^2 с числом степеней свободы, равным 2.

Гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики S_m^*

$$P\left\{S_m > S_m^*\right\} = \int_{S_m^*}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = e^{-S_m^*/2} > \alpha .$$

Данный критерий редко используют, предпочитая критерий Колмогорова. Причина заключается в следующем. Если в критерии используется статистика (2.9), то критерий не заметит большого сдвига $F_n(x)$ от $F(x,\theta)$ вправо. Если же в (2.9) подставить D_n^- вместо D_n^+, то не заметит сдвига влево.

2.3. Критерий Крамера-Мизеса-Смирнова

В критериях типа ω^2 расстояние между гипотетическим и истинным распределениями рассматривают в квадратичной метрике.

Проверяемая гипотеза H_0 имеет вид [65]

$$H_0 : \int_{-\infty}^{\infty} \left\{E\left[F_n(x)\right] - F(x)\right\}^2 \psi\left(F(x)\right) dF(x) = 0 \qquad (2.10)$$

при конкурирующей гипотезе

$$H_1 : \int_{-\infty}^{\infty} \left\{E\left[F_n(x)\right] - F(x)\right\}^2 \psi\left(F(x)\right) dF(x) > 0, \qquad (2.11)$$

где $E[\cdot]$ – оператор математического ожидания; $\psi(t)$ – заданная на отрезке $0 \le t \le 1$ неотрицательная функция, относительно которой предполагают, что $\psi(t)$, $t\psi(t)$, $t^2\psi(t)$ интегрируемы на отрезке $0 \le t \le 1$ [6]. Статистику критерия [65] выражают соотношением

$$\omega_n^2\left[\psi(F)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{E\left[F_n(x)\right] - F(x)\right\}^2 \psi\left(F(x)\right) dF(x) =$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{g\left[F(x_i)\right] - \frac{2i-1}{2n} f\left[F(x_i)\right]\right\} + \int\limits_0^1 (1-t)^2 \psi(t)dt\,, \qquad (2.12)$$

где

$$f(t) = \int\limits_0^t \psi(s)ds\,,\ g(t) = \int\limits_0^t s\psi(s)ds\,.$$

При выборе $\psi(t) \equiv 1$ для критерия ω^2 получают статистику критерия **Крамера–Мизеса–Смирнова**

$$S_\omega = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left\{F(x_i,\theta) - \frac{2i-1}{2n}\right\}^2, \qquad (2.13)$$

которая при простой гипотезе в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a1(s)$, имеющей вид [65]

$$a1(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j+1/2)\sqrt{4j+1}}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)}\exp\left\{-\frac{(4j+1)^2}{16s}\right\}\times$$

$$\times\left\{I_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right] - I_{\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right]\right\}, \qquad (2.14)$$

где $I_{-\frac{1}{4}}(\cdot), I_{\frac{1}{4}}(\cdot)$ – модифицированные функции Бесселя вида

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)},\ |z| < \infty,\ |\arg z| < \pi\,. \qquad (2.15)$$

2.4. Критерий Андерсона-Дарлинга

При выборе в (2.12) весовой функции вида $\psi(t) \equiv 1/t(1-t)$ получают статистику Ω^2 критерия **Андерсона–Дарлинга** [3, 2]

$$S_\Omega = n\Omega_n^2 =$$

$$= -n - 2\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{2i-1}{2n}\ln F(x_i,\theta) + \left(1-\frac{2i-1}{2n}\right)\ln(1-F(x_i,\theta))\right\}. \quad (2.16)$$

В пределе при проверке простой гипотезы эта статистика подчиняется закону с функцией распределения $a2(s)$, имеющей вид [65]

$$a2(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{s}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\Gamma(j+1/2)(4j+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)}\exp\left\{-\frac{(4j+1)^2\pi^2}{8s}\right\}\times$$

$$\times\int_0^\infty \exp\left\{\frac{s}{8(y^2+1)} - \frac{(4j+1)^2\pi^2 y^2}{8s}\right\}dy. \quad (2.17)$$

Гипотезы о согласии не отвергают, если выполнены неравенства

$$P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\} = 1 - a1\left(S_\omega^*\right) > \alpha \text{ и } P\left\{S_\Omega > S_\Omega^*\right\} = 1 - a2\left(S_\Omega^*\right) > \alpha$$

или вычисленные значения статистик не превышают критических для заданного уровня значимости α.

2.5. Критерий Купера

В работе [20] Купером предложен критерий типа Колмогорова, статистика V_n которого определяется соотношением

$$V_n = \sup_{-\infty<x<\infty}\left\{F_n(x) - F(x,\theta)\right\} - \inf_{-\infty<x<\infty}\left\{F_n(x) - F(x,\theta)\right\}$$

и используется в виде

$$V_n = D_n^+ + D_n^-, \quad (2.18)$$

где D_n^+, D_n^- определяются соотношениями (2.5), (2.6). $i = \overline{1,n}$, n – объем выборки, x_i – здесь и далее элементы вариационного ряда, построенного по выборке (упорядоченная по возрастанию выборка).

Существенным недостатком критерия со статистикой (2.18) является сильная зависимость распределения $G(V_n|H_0)$ статистики от объема выборки n. Таблицы процентных точек для случая проверки простых гипотез по критерию со статистикой $\sqrt{n}V_n$ можно найти в работах [4, 54]. Купером [20] в качестве предельного распределения $G\left(\sqrt{n}V_n|H_0\right)$ статистики $\sqrt{n}V_n$ дана следующая функция распределения [54]:

$$G\left(s|H_0\right) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} 2(4m^2s^2 - 1)e^{-2m^2s^2} . \qquad (2.19)$$

В [52] для модификации статистики

$$V = V_n\left(\sqrt{n} + 0.155 + \frac{0.24}{\sqrt{n}}\right), \qquad (2.20)$$

распределение которой в меньшей степени чем распределение $\sqrt{n}V_n$ зависит от n, приведены процентные точки, которые представлены во 2-й строке таблицы 1. Зависимостью распределения статистики (23) от объема выборки можно пренебречь при $n \geq 20$, так как отклонение реального распределения статистики от предельного незначительно и практически не влияет на результаты статистического вывода.

В [80] предложено применять в критерии Купера статистику в следующем виде

$$V_n^{mod} = \sqrt{n}(D_n^+ + D_n^-) + \frac{1}{3\sqrt{n}}, \qquad (2.21)$$

где идея использования поправки вытекает из выражения для статистики критерия согласия Смирнова [65, с. 81]. Зависимостью распределения статистики (24) от объема выборки можно практически пренебречь при $n \geq 30$.

Статистики (2.20) и (2.21) имеют одно и то же предельное распределение. При малых же n различие между распределениями статистик (2.20) и (2.21) достаточно существенное. Однако при $n \geq 20$ в области принятия решения (при значениях функций распределения статистик $G(V|H_0) > 0.9$ и $G(V_n^{mod}|H_0) > 0.9$) эти распределения практически совпадают.

В качестве модели предельного закона можно использовать [80] бета-распределение 3-го рода с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 \mathrm{B}(\theta_0,\theta_1)}\frac{\left(\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1}\left(1-\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1+(\theta_2-1)\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}} \qquad (2.22)$$

и вектором параметров $\boldsymbol{\theta}=\left(7.8624,\ 7.6629,\ 2.6927,\ 2.6373,\ 0.495\right)^{\mathrm{T}}$, построенное по результатам моделирования распределения статистики (2.21). Эта модель хорошо описывает распределение статистики (2.21) на всей области определения и, наряду с предельным (2.19), может использоваться для вычисления достигаемого уровня значимости $P\{S>S^*|H_0\}$, где S^* – значение статистики, вычисленное по выборке.

2.6. Критерий Ватсона

Статистика критерия Ватсона [56, 57] имеет вид

$$U_n^2=n\int_{-\infty}^{\infty}\left\{F_n(x)-F(x,\theta)-\int_{-\infty}^{\infty}\left(F_n(y)-F(y,\theta)\right)dF(y,\theta)\right\}^2 dF(x,\theta)$$

и используется в следующей удобной для расчетов форме

$$U_n^2=\sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i,\theta)-\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\right)^2-n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F(x_i,\theta)-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12n}. \qquad (2.23)$$

Процентные точки статистики U_n^2 при проверке простой гипотезы можно найти в [57, 48]. Предельное распределение $G\left(U_n^2|H_0\right)$ статистики U_n^2 приведено в [56, 57] в виде

$$G\left(s|H_0\right)=1-2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}e^{-2m^2\pi^2 s}. \qquad (2.24)$$

Модификации критериев Купера и Ватсона рассматривались в [53], критерия Ватсона – в [19]. Асимптотическая эффективность критерия Ватсона исследовалась в [46].

В [48] процентные точки приведены для распределений модифицированных статистик. В частности, верхние процентные точки для модифицированной статистики Ватсона в форме

$$U_n^{2*} = (U_n^2 - 0.1/n + 0.1/n^2)(1 + 0.8/n) \tag{2.25}$$

принимают значения [48], приведенные в строке 6 таблицы 2.1. При объемах выборок $n \geq 20$ отличием распределения статистики (2.25) от предельного распределения можно пренебречь.

Практически те же значения верхних процентных точек используют для распределения статистики (2.23). Следует подчеркнуть, что зависимость распределения статистики (2.23) от объема выборки выражена слабо.

Предельное распределение статистики (2.23) по всей области определения хорошо приближается моделью обратного гауссовского закона с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2}\left(\frac{\theta_0}{2\pi\left(\dfrac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\theta_0\left(\left(\dfrac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)-\theta_1\right)^2}{2\theta_1^2\left(\dfrac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)}\right) \tag{2.26}$$

и вектором параметров $\boldsymbol{\theta} = \left(0.2044,\ 0.08344,\ 1.0,\ 0.0\right)^{\mathrm{T}}$, построенной по результатам моделирования эмпирического распределения статистики (2.23) [80]. Это распределение при проверке простых гипотез по критерию Ватсона, так же как и предельное (2.24), можно использовать для вычисления достигаемого уровня значимости.

В таблице 2.1 представлены значения вероятностей вида $P(S > S_\alpha | H_0)$, соответствующие приведенным процентным точкам (критическим значениям) для критерия Купера, вычисленные в соответствии с предельным законом (2.19), моделью предельного закона (2.22) и по результатам статистического моделирования $N = 1{,}7 \times 10^6$ значений статистики (2.21). В ней же даны аналогичные вероятности, соответствующие процентным точкам для критерия Ватсона, вычисленные в соответствии с предельным законом (2.24), моделью предельного закона (2.26) и по результатам статистического моделирования распределения статистики (2.23).

Таблица 2.1

Верхние процентные точки распределений статистик критериев Купера и Ватсона и соответствующие им значения вероятностей вида $P(S > S_\alpha | H_0)$, вычисленные в соответствии с теоретическими законами и по результатам статистического моделирования.

Критерии, модели распределений	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
% точки ст-ки Купера	1.537	1.620	1.747	1.862	2.001
Для закона (2.19)	0.149945	0.099797	0.050075	0.025067	0.009994
Результат моделирования	0.149850	0.099636	0.050060	0.025006	0.009942
Для закона (2.22)	0.150283	0.100049	0.050030	0.024745	0.009503
% точки ст-ки Ватсона	0.131	0.152	0.187	0.222	0.267
Для закона (2.24)	0.150602	0.099526	0.049882	0.024998	0.010283
Результат моделирования	0.150357	0.099479	0.049745	0.024865	0.010305
Для закона (2.26)	0.149243	0.098704	0.050171	0.025747	0.011149

Представленные результаты позволяют, с одной стороны, судить о точности моделирования распределений статистик критериев, с другой, – о возможности построения хороших моделей для неизвестных предельных (и непредельных) распределений статистик, позволяющих достаточно точно оценивать по ним достигаемый уровень значимости.

2.7. Критерии Жанга

В диссертации Жанга [58] и в последующих работах [59, 60, 61] были предложены непараметрические критерии согласия, статистики которых имеют вид:

$$Z_K = \max_{1 \le i \le n} \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \log \left\{ \frac{i - \frac{1}{2}}{nF(x_i, \theta)} \right\} + \left(n - i + \frac{1}{2} \right) \log \left[\frac{n - i + \frac{1}{2}}{n\{1 - F(x_i, \theta)\}} \right] \right), \quad (2.27)$$

$$Z_A = -\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\log\{F(x_i, \theta)\}}{n - i + \frac{1}{2}} + \frac{\log\{1 - F(x_i, \theta)\}}{i - \frac{1}{2}} \right], \quad (2.28)$$

$$Z_C = \sum_{i=1}^{n} \left[\log \left\{ \frac{[F(x_i, \theta)]^{-1} - 1}{(n - \frac{1}{2}) / (i - \frac{3}{4}) - 1} \right\} \right]^2 \quad (2.29)$$

Справедливость утверждений автора о более высокой мощности предлагаемых критериев по сравнению с критериями Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга была подтверждена проведенными исследованиями [69, 80, 21, 104].

Однако использование критериев со статистиками (2.27) – (2.29) осложняет сильная зависимость распределений статистик от объема выборки n. Естественно, зависимость от n сохраняется и в случае проверки сложных гипотез.

При проверке простых гипотез можно воспользоваться таблицами процентных точек, приводимых автором, что, в принципе, не очень удобно, так как не позволяет оценить достигаемый уровень значимости. При проверке сложных гипотез применение данных критериев связано с дополнительными препятствиями. Обойти эти препятствия можно за счет использования **интерактивного режима** исследования распределений статистик применяемых критериев [80, 28, 30, 22, 104], о котором будет сказано в разделе 5.3.

2.8. Проверка простых гипотез

2.8.1. Порядок проверки простой гипотезы

При проверке простых гипотез по анализируемой выборке никакие параметры не оцениваются.

В этом случае при проверке согласия опытного распределения с теоретическим распределением случайной величины X действуют следующим образом:

а) формулируют проверяемую гипотезу, выбирая теоретическое распределение случайной величины, согласие которого с эмпирическим распределением этой величины следует проверить;

б) элементы случайной выборки объемом n располагают в порядке возрастания, получая вариационный ряд

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n ;$$

в) в соответствии с выбранным критерием проверки вычисляют значение статистики S^* критерия;

г) в соответствии с выбранным критерием вычисляют достигнутый уровень значимости $P\{S > S^*\} = \int\limits_{S^*}^{+\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G(S^*(H_0)$, где $G(S(H_0)$ – распределение статистики критерия при справедливости гипотезы H_0. Если $P\{S > S^*\} > \alpha$, где α – заданная вероятность ошибки 1-го рода, то нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы. В противном случае проверяемую гипотезу H_0 отвергают.

Можно вычисленное значение статистики S^* сравнить с критическим значением S_α, определяемым из условия $\alpha = \int\limits_{S_\alpha}^{+\infty} g(s|H_0)\,ds$. Гипотезу о согласии отвергают, если значение статистики попадает в критическую область, т. е. при $S^* > S_\alpha$.

Табл. А.1–А.6, используемые при проверке простых гипотез и содержащие значения функций распределения классических статистик непараметрических критериев согласия (Колмогорова, Крамера-

Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга) и значения процентных точек, заимствованы в [65].

2.8.2. Проверка простой гипотезы по критерию Колмогорова

В случае критерия Колмогорова:

а) значение статистики Колмогорова S_K вычисляют по формуле (2.3) на основании формул (2.4)–(2.6);

б) значение вероятности $P\left\{S > S_K^*\right\} = 1 - K\left(S_K^*\right)$ вычисляют по функции распределения Колмогорова (2.2) или берут из табл. А.1 приложения **А**;

в) критические значения критерия S_α при заданном α могут быть взяты из табл. А.2.

2.8.3. Проверка простой гипотезы по критерию Смирнова

В случае критерия Смирнова:

а) значение статистики Смирнова S_m вычисляется по формуле (2.9) на основании формул (2.5)–(2.6);

б) значение вероятности $P\left\{S_m > S_m^*\right\} = e^{-S_m^*/2}$ вычисляют по функции χ_2^2-распределения (с двумя степенями свободы);

в) гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики S_m^*

$$P\left\{S_m > S_m^*\right\} = e^{-S_m^*/2} > \alpha .$$

2.8.4. Проверка простой гипотезы по критерию ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова

В случае критерия Крамера–Мизеса–Смирнова:

а) значение статистики Крамера–Мизеса–Смирнова S_ω вычисляют по формуле (2.13);

б) значение вероятности $P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\} = 1 - a1\left(S_\omega^*\right)$ вычисляют по функции распределения $a1(S)$ (2.14) или берут из табл. А.3 приложения **А**;

в) критические значения критерия S_α при заданном α могут быть взяты из табл. А.4;

г) гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики S_ω^*

$$P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\} = 1 - a1\left(S_\omega^*\right) > \alpha .$$

2.8.5. Проверка простой гипотезы по критерию Ω^2 Андерсона–Дарлинга

В случае критерия Ω^2 Андерсона–Дарлинга:

а) значение статистики Андерсона–Дарлинга S_Ω вычисляют по формуле (2.16);

б) значение вероятности $P\left\{S_\Omega > S_\Omega^*\right\} = 1 - a2\left(S_\Omega^*\right) > \alpha$ вычисляют по функции распределения $a2(S)$ (2.17) или берут из табл. А.5 приложения **А**;

в) критические значения критерия S_α при заданном α могут быть взяты из табл. А.6;

г) гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики S_Ω^*

$$P\left\{S_\Omega > S_\Omega^*\right\} = 1 - a2\left(S_\Omega^*\right) > \alpha .$$

2.8.6. Проверка простой гипотезы по критерию Купера

В случае критерия Купера:

а) значение статистики Купера V_n^{mod} вычисляют по формуле (2.21) [или статистики V по формуле (2.20)];

б) значение вероятности $P\left\{V_n^{\mathrm{mod}} > V_n^{\mathrm{mod}^*}\right\} = 1 - Kuiper\left(V_n^{\mathrm{mod}^*}\right)$ вычисляют по функции распределения (2.19) или берут из табл. А.53 приложения **А**;

в) критические значения статистики при заданном α могут быть взяты из табл. А.54 приложения **А**;

г) гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики $V_n^{mod^*}$

$$P\left\{V_n^{\mathrm{mod}} > V_n^{\mathrm{mod}^*}\right\} = 1 - Kuiper\left(V_n^{\mathrm{mod}^*}\right) > \alpha .$$

2.8.7. Проверка простой гипотезы по критерию Ватсона

В случае критерия Ватсона:

а) значение статистики Ватсона U_n^2 вычисляют по формуле (2.23);

б) значение вероятности $P\left\{U_n^2 > U_n^{2^*}\right\} = 1 - Watson\left(U_n^{2^*}\right)$ вычисляют по функции распределения (2.24) или берут из табл. А.55 приложения **А**;

в) критические значения статистики при заданном α могут быть взяты из табл. А.56 приложения **А**;

г) гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики $U_n^{2^*}$

$$P\left\{U_n^2 > U_n^{2^*}\right\} = 1 - Watson\left(U_n^{2^*}\right) > \alpha .$$

2.8.8. Проверка простой гипотезы по критериям Жанга

В случае критериев Жанга:

а) значение статистики Z критерия Жанга вычисляют по соответствующей формуле [Z_K – по (2.27), Z_A – по (2.28), Z_C – по (2.29)];

б) распределения статистик Z_K, Z_A, Z_C при справедливости проверяемой гипотезы неизвестны и зависят от объема выборки n. Для определения вероятности $P\left\{Z > Z^*\right\}$ можно воспользоваться методами статистического моделирования (см. раздел 5.2), тогда гипотеза H_0 не отвергается при $P\left\{Z > Z^*\right\} > \alpha$;

в) критические значения статистик при заданном α для ограниченных объемов n могут быть взяты из таблиц приложения **А** (для Z_K – из А.62, для Z_A – из А.63, для Z_C – из А.64), заимствованных в [58]. В этом случае гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики $Z^* \le Z_\alpha$.

3. Непараметрические критерии согласия при проверке сложных гипотез

3.1. Факторы, влияющие на распределения статистик критериев при проверке сложных гипотез

При проверке сложных гипотез, когда по той же самой выборке оценивают параметры наблюдаемого закона распределения вероятностей, все рассматриваемые непараметрические критерии согласия теряют свойство «свободы от распределения». Более того, предельные распределения статистик непараметрических критериев согласия зависят от целого ряда факторов, определяющих «сложность» гипотезы.

На закон распределения статистики $G(S|H_0)$ влияют следующие факторы:

– вид наблюдаемого закона распределения $F(x, \theta)$, соответствующего истинной гипотезе H_0;
– тип оцениваемого параметра и число оцениваемых параметров;
– в некоторых ситуациях конкретное значение параметра (например, в случае гамма-распределения);
– используемый метод оценивания параметров.

Игнорирование того, что проверяют сложную гипотезу, и того, что сложные гипотезы могут быть различными, приводит к некорректному применению непараметрических критериев согласия и, как следствие, к неверным статистическим выводам. Различия в предельных распределениях тех же самых статистик при проверке простых и сложных гипотез настолько существенны, что пренебрегать этим абсолютно недопустимо [110, 66, 70]. Большинство ошибок, совершаемых при использовании непараметрических критериев согласия, связано с незнанием этих обстоятельств. Как правило, при проведении статистического анализа после оценивания по выборке параметров вычисляют значение статистики применяемого критерия, сравнивая его с критическим значением, имеющим место при проверке сложной гипотезы, ошибочно не отклоняя проверяемую гипотезу.

3.2. Методы оценивания параметров распределений и зависимость от них распределений статистик критериев

При проверке сложных гипотез оценивание неизвестных параметров законов может осуществляться разными методами, и оценки параметров, получаемые этими методами, обладают различными статистическими свойствами. Распределения статистик критериев согласия существенно зависят от метода оценивания параметров, т. е. каждому типу оценок при конкретной сложной проверяемой гипотезе соответствует свое предельное распределение $G(S|H_0)$ статистики.

В данном руководстве приводятся таблицы процентных точек и модели распределений статистик непараметрических критериев согласия в расчете, в основном, на использование для оценивания параметров метода максимального правдоподобия. Предпочтительность оценок максимального правдоподобия (ОМП) определяется их лучшими асимптотическими свойствами [49, 112].

Второй вид рассматриваемых оценок – это *MD*-оценки, которые получаются при минимизации некоторого расстояния между эмпирической и теоретической функцией распределения. *MD*-оценки более устойчивы к различным отклонениям от предполагаемого закона распределения, более робастны. В случае *MD*-оценивания оценки параметров могут строиться непосредственной минимизацией статистики используемого критерия согласия.

ОМП вычисляют в результате максимизации по θ функции правдоподобия

$$L(\theta) = \gamma \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \qquad (3.1)$$

или ее логарифма

$$\ln L(\theta) = \ln \gamma + \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \theta) \,. \qquad (3.2)$$

Чаще всего в случае скалярного параметра ОМП определяют как решение уравнения, а в случае векторного параметра – как решение системы уравнений правдоподобия вида

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta_l} = 0, \; l = \overline{1, m}, \tag{3.3}$$

где m – размерность вектора параметров θ. В общем случае эта система нелинейна и за редким исключением решается только численно.

В данном случае, как и в [94, 92, 86, 90, 95], при построении распределений статистик и исследовании их зависимости от метода оценивания ОМП вычисляли как решение системы (3.3). При практическом использовании критериев необходимо иметь в виду, что использование грубых приближений ОМП может отражаться на распределениях статистик и свойствах критериев [101].

При вычислении *MD*-оценок минимизируется соответствующее расстояние между эмпирическим и теоретическим распределениями. При использовании статистики Колмогорова S_K за оценку вектора параметров θ принимают значения, минимизирующие эту статистику:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} S_K \tag{3.4}$$

(*MD*-оценки S_K). Аналогично при использовании статистики S_ω минимизируется по θ статистика S_ω:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} S_\omega \tag{3.5}$$

(*MD*-оценки S_ω). При использовании статистики S_Ω

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} S_\Omega \tag{3.6}$$

(*MD*-оценки S_Ω).

Вид используемой оценки существенно влияет на распределения статистик критериев согласия. Степень влияния метода оценивания на распределение статистики иллюстрирует рис. 3.1, на котором показаны плотности распределения $g(S_n | H_0)$ статистики S_K критерия Колмогорова в случае использования для вычисления оценок параметров нормального закона с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}}$$

четырёх различных методов. В данном случае при вычислении оценок в результате минимизации статистики S_K, в результате минимизации статистики S_ω, в результате минимизации статистики S_Ω и методом максимального правдоподобия. Для сравнения на рисунке приведена функция плотности $k(S)$ распределения Колмогорова, которому подчиняется статистика S_K при справедливости простой проверяемой гипотезы.

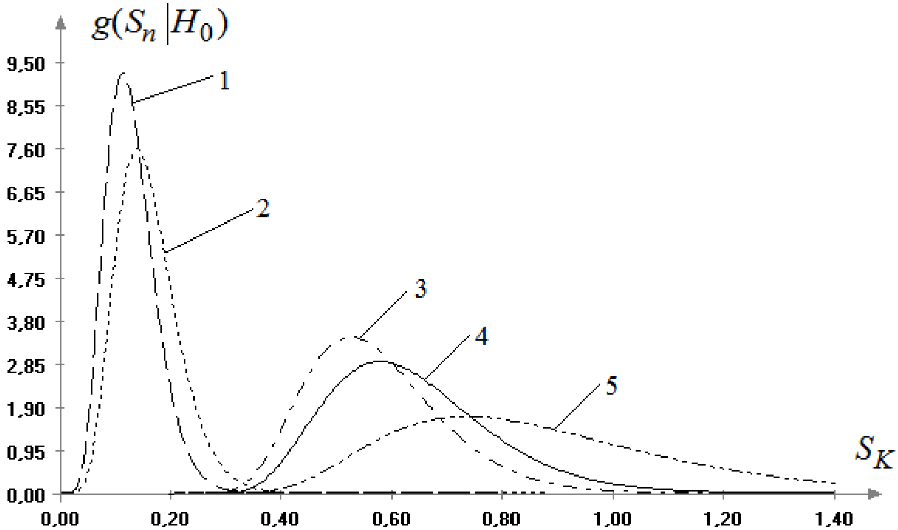

Рис. 3.1. Плотности распределения $g(S_n|H_0)$ статистики S_K при проверке сложной гипотезы (H_0 – нормальный закон, оцениваются оба параметра: *1* – с использованием *MD*-оценок S_K; *2* – *MD*-оценок S_ω; *3* – *MD*-оценок S_Ω; *4* – ОМП; $k(s)$ – плотность распределения Колмогорова)

Необходимо отметить, что вид используемых оценок очень сильно отражается на распределениях статистик непараметрических критериев согласия. В то же время точность оценивания на распределениях статистик сказывается в существенно меньшей степени [101].

Заметим, что при использовании ОМП непараметрические критерии согласия, как правило, обладают большей мощностью по отношению к близким конкурирующим законам по сравнению, например, с использованием *MD*-оценок.

На практике часто используют так называемые оценки по методу моментов. Для некоторых законов оценки параметров по методу моментов совпадают с ОМП, как, например, в случае нормального закона. Но в общем случае свойства оценок по методу моментов отличаются от свойств ОМП. Отличаются и распределения статистик непараметрических критериев согласия от тех, которые они имеют в случае ОМП, и модели которых для проверки сложных гипотез представлены в данном руководстве.

3.3. Зависимость распределений статистик непараметрических критериев от вида закона

При использовании ОМП распределения статистик сильно зависят от закона $F(x,\theta)$, соответствующего проверяемой гипотезе H_0. На рис. 3.2 приведены эмпирические распределения $G(S_n|H_0)$ статистики Крамера–Мизеса–Смирнова S_ω, когда при проверке сложной гипотезы два параметра закона, соответствующего гипотезе H_0, оценивали с использованием метода максимального правдоподобия.

На рисунке показаны распределения статистики $G(S_n|H_0)$, когда гипотеза H_0 соответствует законам: нормальному, логистическому с плотностью $f(x)=\frac{1}{\theta_0}\exp\left\{-\frac{(x-\theta_1)}{\theta_0}\right\}\Big/\left[1+\exp\left\{-\frac{(x-\theta_1)}{\theta_0}\right\}\right]^2$, Лапласа – $f(x)=\frac{1}{2\theta_0}e^{-(x-\theta_1)/\theta_0}$ и распределению наименьшего значения – $f(x)=\frac{1}{\theta_0}\exp\left\{\frac{x-\theta_1}{\theta_0}-\exp\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_0}\right)\right\}$.

Библиографический список

1. *Akushkina K. A.* Models of statistical distributions of nonparametric goodness-of-fit tests in testing composite hypotheses of the generalized Weibull distribution / K. A. Akushkina, S. B. Lemeshko, B. Yu. Lemeshko // Proceedings Third International Conference on Accelerated Life Testing, Reliability-based Analysis and Design. 19-21 May 2010. – Clermont-Ferrand, France, 2010. – P. 125–132.

2. *Anderson T. W.* A test of goodness of fit / T. W. Anderson, D. A. Darling // J. Amer. Stist. Assoc. – 1954. – Vol. 29. – P. 765–769.

3. *Anderson T. W.* Asymptotic theory of certain “Goodness of fit” criteria based on stochastic processes / T. W. Anderson, D. A. Darling // AMS. – 1952. – Vol. 23. – P. 193–212.

4. *Arsham H.* Kuiper’s P-value as a measuring tool and decision procedure for the goodness-of-fit test / H. Arsham // J. Appl. Statist. – 1988. – V. 15. – № 2. – P.131-135.

5. Bagdonavicius V. Non-parametric tests for complete sample / V. Bagdonavicius, J. Kruopis, M. Nikulin. – ISTE-Wiley: Hoboken, 2011. – 308 p.

6. Bagdonavicius V. Non-parametric tests for censored sample / V. Bagdonavicius, J. Kruopis, M. Nikulin. – ISTE-Wiley: Hoboken, 2011. – 233 p.

7. *Chandra M.* Statistics for Test of Fit for the Extreme–Value and Weibull Distribution / M. Chandra, N. D. Singpurwalla, M. A. Stephens // J. Am. Statist. Assoc. – 1981. – Vol. 76. – P. 375.

8. D`Agostino R.B. Goodness-of-fit Techniques / R.B. D`Agostino, M.A. Stephens. – Marcel Dekker: New York, 1986. – 560 p.

9. *Darling D. A.* The Cramer-Smirnov test in the parametric case / D. A. Darling // Ann. Math. Statist. – 1955. – Vol. 26. – P. 1–20.

10. *Darling D. A.* The Cramer-Smirnov test in the parametric case / D. A. Darling // Ann. Math. Statist. – 1957. – Vol. 28. – P. 823–838.

11. *Durbin J.* Kolmogoriv-Smirnov test when parameters are estimated / J. Durbin // Lect. Notes Math. – 1976. – Vol. 566. – P. 33–44.

12. *Durbin J.* Kolmogorov-Smirnov tests when parameters are estimated with applications to tests of exponentiality and tests of spacings / J. Durbin // Biometrika. – 1975. – Vol. 62. – P. 5–22.

13. *Durbin J.* Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated / J. Durbin // Ann. Statist. – 1973. – № 1. – P. 279–290.

14. *Dzhaparidze K. O.* Probability distribution of the Kolmogorov and omega-square statistics for continuous distributions with shift and scale parameters / K. O. Dzhaparidze, M. S. Nikulin // J. Soviet Math. – 1982. Vol. 20. – P. 2147–2163.

15. *Galanova N. S.* Using nonparametric goodness-of-fit tests to validate accelerated failure time models / N. S. Galanova, B. Y. Lemeshko, E. V. Chimitova // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2012. – Vol. 48. Is. 6. – P. 580-592.

114. *Тюрин Ю. Н.* Исследования по непараметрической статистике (непараметрические методы и линейная модель) : автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук / Ю. Н. Тюрин. – М., 1985. – 33 с. – (МГУ).

115. *Тюрин Ю. Н.* О предельном распределении статистик Колмогорова–Смирнова для сложной гипотезы / Ю. Н. Тюрин // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 1314–1343.

116. *Тюрин Ю. Н.* Анализ данных на компьютере / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров. – М. : ИНФРА-М, Финансы и статистика, 1995. – 384 с.

117. *Тюрин Ю. Н.* Критерии согласия для распределения Вейбулла–Гнеденко / Ю. Н. Тюрин, Н. Е. Саввушкина // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. – 1984. – № 3. – С. 109–112.

Приложение А. Таблицы распределений статистик непараметрических критериев согласия при простых и сложных гипотезах

Таблица А.1

Функция распределения статистики Колмогорова K(S) при проверке простой гипотезы

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2	0.000000	000 000	000 000	000 000	000 000	000 000	000 000	000 000	000 001	000 004
0.3	0.000009	000 021	000 046	000 091	000 171	000 303	000 511	000 826	001 285	001 929
0.4	0.002808	003 972	005 476	007 377	009 730	012 589	016 005	020 022	024 682	030 017
0.5	0.036055	042 814	050 306	058 534	067 497	077 183	087 577	098 656	110 394	122 760
0.6	0.135718	149 229	163 255	177 752	192 677	207 987	223 637	239 582	255 780	272 188
0.7	0.288765	305 471	322 265	339 114	355 981	372 833	389 640	406 372	423 002	439 505
0.8	0.455858	472 039	488 028	503 809	519 365	534 682	549 745	564 545	579 071	593 315
0.9	0.607269	620 928	634 285	647 337	660 081	672 515	684 836	696 445	707 941	719 126
1.0	0.730000	740 566	750 825	760 781	770 436	779 794	788 860	797 637	806 130	814 343
1.1	0.822282	829 951	837 356	844 502	851 395	858 040	864 443	870 610	876 546	882 258
1.2	0.887750	893 030	898 102	903 973	907 648	912 134	916 435	920 557	924 506	928 288
1.3	0.931908	935 371	938 682	941 847	944 871	947 758	950 514	953 144	955 651	958 041
1.4	0.960318	962 487	964 551	966 515	968 383	970 159	971 846	973 448	974 969	976 413
1.5	0.977782	979 080	980 310	981 475	982 579	983 623	984 610	985 544	986 427	987 261
1.6	0.988048	988 791	989 492	990 154	990 777	991 364	991 917	992 438	992 928	993 389
1.7	0.993823	994 230	994 612	994 972	995 309	995 625	995 922	996 200	996 460	996 704
1.8	0.996932	997 146	997 346	997 533	997 707	997 870	998 023	998 165	998 297	998 421
1.9	0.998536	998 644	998 744	998 837	998 924	999 004	999 079	999 149	999 213	999 273
2.0	0.999329	999 381	999 429	999 473	999 514	999 553	999 588	999 620	999 651	999 679
2.1	0.999705	999 728	999 750	999 771	999 790	999 807	999 823	999 837	999 851	999 863
2.2	0.999874	999 886	999 895	999 904	999 912	999 920	999 927	999 933	999 939	999 944
2.3	0.999949	999 954	999 958	999 961	999 965	999 968	999 971	999 974	999 976	999 978
2.4	0.999980	999 982	999 984	999 985	999 987	999 988	999 989	999 990	999 991	999 992

Таблица А.2

Процентные точки распределения статистики Колмогорова при проверке простой гипотезы

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$K(S)$	1.1379	1.2238	1.3581	1.4802	1.6276

Таблица А.3

Функция распределения статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова a1(S) при проверке простой гипотезы

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00 001	00 300	02 568	06 685	12 372	18 602	24 844	30 815	36 386
0.1	0.41513	46 196	50 457	54 329	57 846	61 042	63 951	66 600	69 019	71 229
0.2	0.73253	75 109	76 814	78 383	79 829	81 163	82 396	83 536	84 593	85 573
0.3	0.86483	87 329	88 115	88 848	89 531	90 167	90 762	91 317	91 836	92 321
0.4	0.92775	93 201	93 599	93 972	94 323	94 651	94 960	95 249	95 521	95 777
0.5	0.96017	96 242	96 455	96 655	96 843	97 020	97 186	97 343	97 491	97 630
0.6	0.97762	97 886	98 002	98 112	98 216	98 314	98 406	98 493	98 575	98 653
0.7	0.98726	98 795	98 861	98 922	98 981	99 036	99 088	99 137	99 183	99 227
0.8	0.99268	99 308	99 345	99 380	99 413	99 444	99 474	99 502	99 528	99 553
0.9	0.99577	99 599	99 621	99 641	99 660	99 678	99 695	99 711	99 726	99 740
1.0	0.99754	99 764	99 776	99 787	99 799	99 812	99 820	99 828	99 837	99 847
1.1	0.99856	99 862	99 869	99 876	99 883	99 890	99 895	99 900	99 905	99 910
1.2	0.99916	99 919	99 923	99 927	99 931	99 935	99 938	99 941	99 944	99 947
1.3	0.99950	99 953	99 955	99 957	99 959	99 962	99 964	99 965	99 967	99 969
1.4	0.99971	99 972	99 973	99 975	99 976	99 978	99 978	99 979	99 980	99 980

Таблица А.4

Процентные точки распределения статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке простой гипотезы

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$a1(S)$	0.2841	0.3473	0.4614	0.5806	0.7434

Таблица А.5

Функция распределения статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга $a2(S)$ при проверке простой гипотезы

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 001
0.1	0.00003	00 008	00 020	00 043	00 081	00 141	00 228	00 349	00 508	00 710
0.2	0.00959	01 256	01 605	02 005	02 457	02 961	03 514	04 115	04 762	05 453
0.3	0.06184	06 954	07 759	08 596	09 463	10 356	11 273	12 211	13 168	14 140
0.4	0.15127	16 124	17 132	18 146	19 166	20 190	21 217	22 244	23 271	24 296
0.5	0.25319	26 337	27 351	28 359	29 360	30 355	31 342	32 320	33 290	34 250
0.6	0.35200	36 141	37 071	37 991	38 900	39 798	40 684	41 560	42 424	43 277
0.7	0.44118	44 947	45 765	46 572	47 367	48 150	48 922	49 683	50 432	51 170
0.8	0.51897	52 613	53 318	54 012	54 695	55 368	56 030	56 682	57 324	57 956
0.9	0.58577	59 189	59 791	60 383	60 966	61 540	62 104	62 660	63 206	63 744
1.0	0.64273	64 794	65 306	65 811	66 307	66 795	67 275	67 748	68 213	68 670
1.1	0.69120	69 563	69 999	70 428	70 851	71 266	71 675	72 077	72 473	72 863
1.2	0.73247	73 624	73 996	74 361	74 721	75 075	75 424	75 767	76 105	76 438
1.3	0.76765	77 088	77 405	77 717	78 025	78 328	78 626	78 919	79 209	79 493
1.4	0.79773	80 049	80 321	80 589	80 852	81 112	81 368	81 620	81 868	82 112
1.5	0.82352	82 589	82 823	83 053	83 279	83 503	83 723	83 939	84 153	84 363
1.6	0.84570	84 774	84 975	85 173	85 369	85 561	85 751	85 938	86 122	86 303

Окончание табл. А.5

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.7	0.86482	86 659	86 832	87 004	87 173	87 339	87 503	87 665	87 824	87 981
1.8	0.88136	88 289	88 439	88 588	88 734	88 878	89 021	89 161	89 299	89 435
1.9	0.89570	89 703	89 833	89 962	90 089	90 215	90 338	90 460	90 581	90 699
2.0	0.90816	90 932	91 046	91 158	91 269	91 378	91 486	91 592	91 697	91 800
2.1	0.91902	92 003	92 102	92 200	92 297	92 392	92 486	92 579	92 671	92 761
2.2	0.92851	92 939	93 025	93 111	93 196	93 279	93 361	93 443	93 523	93 602
2.3	0.93680	93 757	93 833	93 908	93 983	94 056	94 128	94 199	94 269	94 339
2.4	0.94407	94 475	94 542	94 608	94 673	94 737	94 800	94 863	94 925	94 986
2.5	0.95046	95 105	95 164	95 222	95 279	95 336	95 391	95 446	95 501	95 554
2.6	0.95607	95 660	95 711	95 762	95 813	95 862	95 912	95 960	96 008	96 055
2.7	0.96102	96 148	96 194	96 239	96 283	96 327	96 370	96 413	96 455	96 497
2.8	0.96538	96 579	96 619	96 659	96 698	96 737	96 775	96 813	96 850	96 887
2.9	0.96923	96 959	96 995	97 030	97 064	97 099	97 132	97 166	97 199	97 231
3.0	0.97263	97 295	97 327	97 358	97 388	97 419	97 449	97 478	97 507	97 536
3.1	0.97565	97 593	97 621	97 648	97 675	97 702	97 729	97 755	97 781	97 806
3.2	0.97831	97 856	97 881	97 905	97 929	97 953	97 977	98 000	98 023	98 046
3.3	0.98068	98 090	98 112	98 134	98 155	98 176	98 197	98 217	98 238	98 258
3.4	0.98278	98 297	98 317	98 336	98 355	98 374	98 392	98 410	98 429	98 447
3.5	0.98464	98 482	98 499	98 516	98 533	98 549	98 566	98 582	98 598	98 614
3.6	0.98630	98 645	98 660	98 676	98 691	98 705	98 720	98 734	98 749	98 763
3.7	0.98777	98 791	98 804	98 818	98 831	98 844	98 857	98 870	98 883	98 895
3.8	0.98908	98 920	98 932	98 944	98 956	98 968	98 979	98 991	99 002	99 013
3.9	0.99024	99 035	99 046	99 057	99 067	99 078	99 088	99 098	99 108	99 118
4.0	0.99128	99 221	99 303	99 377	99 442	99 501	99 553	99 600	99 642	99 679
5.0	0.99713	99 742	99 769	99 793	99 814	99 834	99 851	99 866	99 880	99 892
6.0	0.99903	99 913	99 922	99 930	99 937	99 944	99 949	99 954	99 959	99 963
7.0	0.99967	99 970	99 973	99 976	99 978	99 981	99 983	99 984	99 986	99 987
8.0	0.99989	99 990	99 991	99 992	99 993	99 993	99 994	99 995	99 995	99 996
9.0	0.99996	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Таблица А.6

Процентные точки распределения статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга при проверке простой гипотезы

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$a2(S)$	1.6212	1.9330	2.4924	3.0775	3.8781

Таблица А.7

Аппроксимация предельных распределений статистики Колмогорова при использовании метода максимального правдоподобия

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	$\gamma(5.1092; 0.0861; 0.2950)$	–	–
Полунормальное	$\gamma(4.5462; 0.1001; 0.3100)$	–	–
Рэлея	$\gamma(5.1092; 0.0861; 0.2950)$	–	–
Максвелла	γ $(5.4566; 0.0794; 0.2870)$	–	–
Лапласа	$B_{III}(4.4680; 4.8450; 3.9105; 2.3784; 0.324)$	$B_{III}(5.3541; 7.2519; 2.5630; 1.7652; 0.302)$	$\gamma(6.2949; 0.0624; 0.2613)$
Нормальное	$B_{III}(4.8849; 5.2341; 3.6279; 2.3872; 0.303)$	$B_{III}(5.2604; 7.4327; 2.1872; 1.4774; 0.30)$	$\gamma(6.4721; 0.0580; 0.2620)$
Логнормальное	$B_{III}(4.8849; 5.2341; 3.6279; 2.3872; 0.303)$	$B_{III}(5.2604; 7.4327; 2.1872; 1.4774; 0.30)$	$\gamma(6.4721; 0.0580; 0.2620)$
Коши	γ $(3.0987; 0.1463; 0.3350)$	$\gamma(5.9860; 0.0780; 0.2528)$	$\gamma(5.3642; 0.0654; 0.2600)$
Логистическое	$\gamma(3.4954; 0.1411; 0.3325)$	γ $(7.6325; 0.0531; 0.2368)$	γ $(7.5402; 0.0451; 0.2422)$
Наибольшего значения	$\gamma(3.6805; 0.1355; 0.3350)$	$\gamma(5.2194; 0.0848; 0.2920)$	$\gamma(6.6012; 0.0563; 0.2598)$
Наименьшего значения	$\gamma(3.6805; 0.1355; 0.3350)$	$\gamma(5.2194; 0.0848; 0.2920)$	$\gamma(6.6012; 0.0563; 0.2598)$
Вейбулла	$\gamma(3.6805; 0.1355; 0.3350)$ [1]	$\gamma(5.2194; 0.0848; 0.2920)$	$\gamma(6.6012; 0.0563; 0.2598)$

[1] При оценивании параметра формы распределения Вейбулла. [2] При оценивании параметра масштаба.

Учебное издание

Борис Юрьевич Лемешко

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

Руководство по применению

Подписано в печать 25.05.2014