

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
имени МИРЗО УЛУГБЕКА**



МАТЕРИАЛЫ

республиканской научно-практической конференции

СТАТИСТИКА

и её применения



ТАШКЕНТ-2017

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
УЗБЕКИСТАН
НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
имени МИРЗО УЛУГБЕКА

МАТЕРИАЛЫ

республиканской научно-практической конференции

СТАТИСТИКА

и ее применения



19-20 октября 2017 года
Национальный Университет Узбекистана
имени Мирзо Улугбека

УДК 519.2

Материалы республиканской научно-практической конференции "СТАТИСТИКА и ее применения-2017". Под редакцией профессора А.А.Абдушукрова - Ташкент, НУУз, 2017, 482 с.

Организационный комитет:

Марахимов А.Р., ректор НУУз, профессор - председатель;

Аюпов Ш.А., директор Института Математики АН РУз, академик - сопредседатель;

Халмухamedов А.Р., проректор НУУз - заместитель председателя;

Абдушукуров А.А., заведующий кафедрой "Теория вероятностей и математическая статистика" НУУз, профессор - заместитель председателя, организатор;

Программный комитет:

Жабборов Н.М. - декан математического факультета НУУз, к.ф.-м.н.;

Форманов Ш.К. - профессор кафедры "Теория вероятностей и математическая статистика" НУУз, академик;

Зупаров Т.М. - профессор кафедры "Теория вероятностей и математическая статистика" НУУз;

Гафуров М.У. - профессор кафедры "Прикладная математика и информатика" филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г.Ташкент;

Шарипов О.Ш. - вед.н.с. Института Математики АН РУз, д.ф.-м.н.;

Хусанбоев Я.М. - вед.н.с. Института Математики АН РУз, д.ф.-м.н.;

Вахобов А.В. - профессор экономического факультета НУУз, д.э.н.;

Эгамбердиев Ф.Т. - профессор экономического факультета НУУз, д.э.н.;

Каюмов А.А. - профессор экономического факультета НУУз, д.г.н.;

Холмуродов М.К. - доцент физико-математического факультета НамГУ, к.ф.-м.н.

Секции конференции

1. Математическая статистика.
2. Вероятность и смежные вопросы.
3. Математические - статистические методы в экономике, медицине, естествознании и методике преподавания.
4. Криптоанализ, прикладная математика и смежные вопросы.

ISBN 978-9943-305-86-1

Конференцию поддержал Республиканский фонд фундаментальных исследований (Гранты Ф4-40, Ё-Ф4-07).

ПРОБЛЕМЫ ПРИМЕНЕНИЯ КРИТЕРИЕВ ОДНОРОДНОСТИ И ИХ РЕШЕНИЕ

Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, И.В. Веретельникова, А.Ю.
Новикова

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Lemeshko@ami.nstu.ru, www.ami.nstu.ru/headrd/

В докладе обсуждается применение k -выборочных критериев однородности законов распределения с возможностью вычисления достигнутого уровня значимости, приводится сравнительный анализ мощности критериев такого вида. Приводятся результаты сравнительного анализа мощности параметрических и непараметрических критериев проверки однородности математических ожиданий. Приводятся результаты сравнительного анализа мощности параметрических и непараметрических критериев проверки однородности дисперсий. Рассматривается применение параметрических критериев проверки однородности дисперсий в условиях нарушения предположения о нормальности.

Ключевые слова: проверка гипотез, критерий, однородность законов, однородность средних, однородность дисперсий, статистическое моделирование.

Введение. Критерии проверки гипотез об однородности делятся на три множества: критерии проверки гипотез об однородности законов k сравниваемых выборок, об однородности средних (о равенстве математических ожиданий), об однородности дисперсий (о равенстве дисперсий).

При проверке однородности законов проверяется гипотеза о том, что все выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности:

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_k(x) = F(x)$$

при любом x .

При проверке гипотезы об однородности средних проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k,$$

а при однородности дисперсий -

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2.$$

Для проверки однородности законов могут использоваться [1] непараметрические критерии Смирнова, Лемана-Розенблатта, Андерсона-Дарлинга-Петита, k -выборочный вариант критерия Андерсона-Дарлинга или k -выборочные критерии Жанга со статистиками Z_K, Z_A, Z_C .

Для проверки гипотезы об однородности средних может использоваться [1] ряд параметрических критериев (z -критерий сравнения двух средних при известных дисперсиях; при неизвестных, но равных дисперсиях (t -критерий Стьюдента); при неизвестных и неравных дисперсиях; k -выборочный F-критерий) и непараметрических критериев (Уилкоксона, \tilde{z} -критерий Манна-Уитни, H -критерий Краскела-Уаллиса, Ван дер Вардена, Фишера-Йэйтса-Терри-Гефдинга, k -выборочный критерий Ван дер Вардена).

Для проверки гипотезы об однородности дисперсий предложено множество параметрических (Бартлетта, Кокрена, Фишера, Хартли, Левене, Неймана-Пирсона, О'Брайена, Ньюмана, Z-критерий Оверолла-Вудворда и его модификация, Блисса-Кокрена-Тьюки, Кадуэлла-Лесли-Брауна, Линка) и непараметрических (Ансари-Бредли, Муда, Сижела-Тьюки, Кейпена, Клотца, Флайн-Киллина) критериев [1].

Применение параметрических критериев обусловлено предположением о принадлежности анализируемых выборок некоторому параметрическому закону. Стандартным предположением является принадлежность выборок нормальному закону.

На непараметрические критерии об однородности средних или характеристик рассеяния не накладывается предположения о нормальности. Однако требуется выполнение не менее сильного предположения о принадлежности анализируемых выборок одному виду закона (о чем, как правило, не упоминается).

Проблемы применения. С применением критериев связано несколько общих проблем.

Во-первых, наличие множества критериев для проверки одной и той же гипотезы ставит исследователя перед выбором наиболее предпочтительного критерия, обладающего большей мощностью относительно рассматриваемых альтернатив. Провести сравнительный анализ мощности групп критериев можно, только опираясь на численные методы статистического моделирования, что требует соответствующего программного обеспечения.

Во-вторых, в реальных условиях приложений стандартное предположение о принадлежности выборокциальному закону, как правило, не выполняется или трудно проверяется вследствие недостаточных объемов выборок. При нарушении этого предположения распределения статистик параметрических критериев, соответствующих справедливости проверяемой гипотезы H_0 , могут отличаться от имеющихся классических результатов. Особенно это критично для параметрических критериев однородности дис-

персий.

В-третьих. При ограниченных объемах выборок распределения статистик параметрических критериев зачастую существенно отличаются от известных асимптотических распределений этих статистик.

В-четвертых. Даже в случае выполнения стандартного предположения о возможности корректного применения ряда параметрических критериев ограничена тем, что не известны распределения статистик, и имеются лишь таблицы критических значений статистик для некоторого ряда объемов выборок. Поэтому нельзя оценить достигнутый уровень значимости p_{value} . Для непараметрических критериев однородности Жанга со статистиками Z_K, Z_A, Z_C отсутствуют и таблицы критических значений, а распределения статистик при справедливости H_0 зависят от объемов сравниваемых выборок и числа выборок.

В-пятых. Распределения нормализованных статистик непараметрических критериев являются дискретными и при малых объемах выборок существенно отличаются от асимптотического стандартного нормального закона.

В-шестых. На непараметрические критерии однородности средних или критерии однородности дисперсий (равенства параметров масштаба), не накладывается предположения о нормальности. Однако требуется выполнение не менее сильного предположения об однородности законов анализируемых выборок. Особенно это существенно для непараметрических критериев однородности дисперсий.

В-седьмых. Параметрические критерии имеют преимущество в мощности перед непараметрическими аналогами, в том числе в условиях нарушения стандартного предположения (в случае законов, отличающихся от нормального). Это наиболее заметно в случае критериев проверки однородности дисперсий. Данный факт свидетельствует в пользу применения параметрических критериев однородности дисперсий в условиях нарушения стандартного предположения о нормальности. Для реализации такой возможности и обеспечения корректности вывода о результатах проверки гипотезы надо лишь уметь найти (оценить) распределение статистики $G(S | H_0)$ применяемого критерия в нестандартных условиях (в реальных условиях приложения). Это вполне реализуемо с использованием методов статистического моделирования.

Критерии однородности законов. К проблемам, которые следует учитывать при использовании критериев однородности законов, относится существенная дискретность распределения статистики критерия Смирнова и

существенное отличие этого распределения от предельного распределения Колмогорова.

Фактором, затрудняющим применение критериев однородности Жанга со статистиками Z_K, Z_A, Z_C , является зависимость распределений статистик от объемов сравниваемых выборок и числа выборок и дискретность распределения статистики Z_K . Поэтому для оценки p_{value} предпочтительней использовать реальные распределения статистик, находимые с использованием статистического моделирования.

Распределения статистик Лемана-Розенблатта, Андерсона-Дарлинга-Петита быстро сходятся к предельным распределениям $a1(t)$ и $a2(t)$ соответственно. Для k -выборочного варианта критерия Андерсона-Дарлинга приближенные модели предельных распределений статистик ($k = 2 \div 11$) построены и представлены в [1].

Мощность критериев методами статистического моделирования исследовалась относительно трех видов альтернатив: сдвига, изменения масштаба и относительно ситуации, когда пара выборок принадлежала близким, но различным законам (нормальному и логистическому). Полученные оценки мощности позволяют сделать следующие выводы.

Относительно конкурирующих гипотез, соответствующих изменению параметра сдвига, двухвыборочные критерии Смирнова (Sm), Лемана-Розенблатта (LR), Андерсона-Дарлинга-Петита (AD) и критерии Жанга со статистиками Z_K, Z_A, Z_C по убыванию мощности располагаются в следующем порядке:

$$AD \succ LR \succ Z_C \succ Z_A \succ Sm \succ Z_K.$$

Относительно конкурирующих гипотез, соответствующих изменению параметра масштаба, критерии располагаются уже в другом порядке

$$Z_A \succ Z_C \succ Z_K \succ AD \succ LR \succ Sm.$$

В ситуации, когда при конкурирующей гипотезе одна выборка принадлежит нормальному закону, а вторая логистическому, критерии упорядочиваются по мощности следующим образом:

$$Z_K \succ Z_A \succ Z_C \succ AD \succ Sm \succ LR.$$

В случае k выборок в аналогичных ситуациях тот же порядок предпочтения сохраняется для k -выборочных вариантов критериев Андерсона-Дарлинга и Жанга.

Критерии однородности средних. Параметрические критерии однородности средних устойчивы к нарушению стандартного предположения о нормальности. Отклонения распределений статистик от имеющих место классических результатов становятся существенными лишь в случае прилежности анализируемых выборок асимметричным законам или законам с "тяжелыми" хвостами.

Дискретность распределений статистик H -критерия Краскела-Уаллиса и \tilde{z} -критерия Манна-Уитни и их отклонение от асимптотических следует учитывать только при малых объемах выборок.

Множество критериев однородности средних параметрических (z -критерий, варианты t -критерия Стьюдента при неизвестных дисперсиях, F -критерий) и непараметрических (\tilde{z} -критерий Манна-Уитни, H -критерий Краскела-Уаллиса, Ван дер Вардена (VW), Фишера-Йэйтса-Терри-Гефдинга (FY)) по убыванию мощности упорядочиваются следующим образом:

$$z \succ t \sim F \succ VW \sim FY \succ H \sim \tilde{z}.$$

Варианты t -критерия Стьюдента и F -критерий по мощности эквивалентны, а критерии Ван дер Вардена и Фишера-Йэйтса-Терри-Гефдинга практически не уступают им. \tilde{z} -критерий Манна-Уитни и H -критерий Краскела-Уаллиса асимптотически эквивалентны, они заметно, но не настолько уступают предшествующим.

В целом же можно отметить, что хотя параметрические критерии устойчивы к нарушению предположения о нормальности, преимущество их в мощности перед непараметрическими весьма небольшое.

Критерии однородности дисперсий. Для проверки гипотезы об однородности дисперсий предложено множество параметрических (Бартлетта (B), Кокрена (C), Фишера (F), Хартли (H), Левене (L), Неймана-Пирсона (NP), О'Брайена (OB), Ньюмана (N), Z-критерий Оверолла-Вудворда (Z) и его модификация (MZ), Блисса-Кокрена-Тьюки (BCT), Кадуэлла-Лесли-Брауна (KLB), Линка (Lk)) и непараметрических (Ансари-Бредли (AB), Муда (M), Сижела-Тьюки (ST), Кейпена (Ca), Клотца (Kl), Флайнен-Киллина (FK)) критериев [1].

Нарушение предположения о нормальности приводит к существенным изменениям распределений $G(S | H_0)$ статистик параметрических критериев, что исключает возможность использования классических результатов, исходящихся распределений статистик. В меньшей степени это замечание касается критерия О'Брайена, модифицированного Z-критерия Оверолла-

Вудворда и модификаций критерия Левене. Платой за устойчивость этих критериев является их более низкая мощность по сравнению с лучшими критериями (при выполнении стандартного предположения о нормальности). И в то же время распределения $G(S | H_0)$ статистик этих трех критериев настолько отклоняются от имеющих место при стандартных предположениях (в случае принадлежности выборок законам с тяжелыми хвостами), что пренебрегать этим нельзя.

Для ряда параметрических критериев информация о распределениях $G(S | H_0)$ статистик представлена лишь таблицами критических значений, распределения статистик некоторых критериев плохо сходятся к соответствующим асимптотическим распределениям [1].

Дискретные распределения нормализованных статистик непараметрических критериев (Ансари-Бредли, Муда, Сижела-Тьюки) при малых объемах выборок существенно отличаются от стандартного нормального закона.

Исследование мощности и полученные оценки позволяют сделать следующие выводы о множестве критериев проверки однородности дисперсий. В случае анализа двух выборок и выполнении стандартного предположения о нормальности наибольшей и одинаковой мощностью относительно тех же конкурирующих гипотез обладают критерии Фишера, Бартлетта, Кокрена, Хартли, Неймана-Пирсона и Z-критерий Оверолла-Вудворда.

Далее в порядке убывания мощности следует группа устойчивых критериев О'Брайена, модифицированный Z-критерий, Левене.

Наименее перспективна для применения группа параметрических критериев Ньюмана, Блисса-Кокрена-Тьюки, Кадуэлла-Лесли-Брауна, Линка, которая уступает в мощности даже непараметрическим критериям, имея перед последними некоторое преимущество в мощности лишь при очень малых объемах выборок.

Среди рассмотренных непараметрических критериев наибольшей мощностью обладает критерий Клотца, затем идет критерий Флайн-Киллина, потом критерий Муда, который уже заметно уступает критериям Фишера, Бартлетта, Кокрена, Хартли, Неймана-Пирсона, Z-критерию Оверолла-Вудворда, О'Брайена, модифицированному Z-критерию и Левене.

Общая картина выглядит следующим образом:

$$(F \sim B \sim C \sim H \sim NP \sim Z) \succ OB \succ MZ \succ (Kl \sim Ca) \succ L \succ FK \succ M \succ N \succ (AB \sim ST) \succ (BCT \sim KLB \sim Lk).$$

В случае нарушения стандартного предположения и принадлежности

выборок законам с более легкими хвостами (чем у нормального закона) вышеуказанный порядок предпочтительности сохраняется.

При симметричных законах с более тяжелыми хвостами по сравнению с нормальным законом критерии упорядочиваются следующим образом:

$$FK \succ Kl \succ M \succ L \succ (AB \sim ST) \succ OB \succ MZ \succ (F \sim B \sim C \sim H \sim NP \sim Z) \succ N \succ (BCT \sim KLB).$$

Если анализируется большее число выборок, то при выполнении стандартного предположения или в случае принадлежности выборок законам с более легкими хвостами по сравнению с нормальным законом критерии убыванию мощности располагаются в следующем порядке:

$$C \succ OB \succ Z \succ MZ \succ (B \sim NP) \succ H \succ L \succ FK \succ BCT \succ KLB.$$

Надо отметить, что при симметричных законах с более легкими хвостами критерий Левене уступает в мощности критерию Флайне-Киллина.

При симметричных законах с более тяжелыми хвостами ситуация меняется:

$$FK \succ L \succ OB \succ MZ \succ (B \sim NP) \succ Z \succ H \succ C \succ KLB \succ BCT.$$

Применение критериев в "нестандартных" условиях. Принятие решения о результатах проверки гипотезы H_0 на основании достигнутого уровня значимости p_{value} всегда более обосновано, чем в результате сравнения полученного значения статистики S^* с заданными критическими значениями, извлекаемыми из соответствующей таблицы.

Вычисление p_{value} не вызывает труда при известном распределении статистики критерия. К сожалению, распределения большинства параметрических критериев однородности дисперсий даже при стандартном предположении о нормальности существенно зависят от объемов выборок. Неизвестные распределения статистик критериев однородности Жанга зависят от объемов и количества сравниваемых выборок.

Качество статистических выводов можно повысить, исследуя распределения статистик критериев в интерактивном режиме (непосредственно в процессе проводимого анализа). При таком подходе необходимое для проверки гипотезы эмпирическое распределение $G_N(S_n | H_0)$ статистики соответствующего критерия строится с точностью, зависящей от числа экспериментов N в методе Монте-Карло [2]. Затем по эмпирическому распределению и вычисленному по анализируемой выборке значению статистики S^* определяется оценка p_{value} .

Такая процедура интерактивного исследования распределений статистик реализована в [3], что позволяет применять различные критерии однородности, в том числе, в условиях нарушения стандартных предположений.

Заключение. В работе протестированы и упорядочены по мощности три множества критериев проверки гипотез (однородности законов однородности средних, однородности дисперсий). Показано, что использование методов Монте-Карло и компьютерных технологий позволяет повысить информативность выводов и их корректность при использовании критериев в нестандартных условиях. В частности, параметрические критерии однородности дисперсий, обладающие большей мощностью, можно корректно применять как при выполнении стандартного предположения о нормальности, так и в условиях его нарушения.

Заметим, что обязательным предварительным условием применения параметрических критериев в нестандартных условиях является идентификация вида закона распределения, наилучшим образом описывающего анализируемые выборки [4].

Исследования выполнены при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственной работы "Обеспечение проведения научных исследований" (№ 1.4574.2017/6.7) и проектной части государственного задания (№ 1.1009.2017/4.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лемешко Б. Ю. Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению. - М. : ИНФРА-М; 2017. - 208 с.
2. Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н. Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей: Учебное пособие. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. - 119 с.
3. Программная система статистического анализа одномерных случайных величин - ISW. URL: <http://ami.nstu.ru/headrd/ISW.htm> (дата обращения 12.03.2017)
4. Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Постовалов С. Н., Чимитова Е. В. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: Монография. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. - 888 с.