

О программной системе исследования и анализа статистических закономерностей одномерных случайных величин

Лемешко Борис Юрьевич, Лемешко Станислав Борисович

e-mail: lemeshko@ami.nstu.ru
<https://ami.nstu.ru/~headrd/>

1. Программная система может использоваться для идентификации параметрических моделей законов распределения, наиболее подходящих для описания наблюдаемых выборок одномерных случайных величин, для проверки адекватности построенных моделей с опорой на множество критериев согласия.

2. Включена возможность применения более 30 параметрических моделей законов. Множество используемых моделей расширено за счет возможности применения к законам операций сдвига, масштабирования, усечения, зеркального отражения и смешивания.

3. Выборки могут быть точечными, группированными, частично группированными, в том числе цензурированными.

4. Оценки параметров моделей законов могут находиться различными методами (используемый метод отражается на распределениях статистик применяемых критериев).

5. Поддерживается применение множества критериев, предназначенных для проверки различных статистических гипотез.

6. Корректность применения критериев в условиях нарушения стандартных предположений обеспечивается за счет интерактивного исследования методами статистического моделирования распределений статистик этих критериев.

7. Система предназначена для решения задач статистического анализа в различных приложениях, может применяться для исследования и изучения свойств используемых критериев, в том числе в нестандартных условиях, может использоваться в учебном процессе.

Идентификация параметрической модели закона распределения

В процессе идентификации могут оцениваться параметры предполагаемых законов распределения. Для этого могут использоваться различные методы. В частности, метод максимального правдоподобия и методы, минимизирующие различные расстояния (MD-оценки) между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределением.

Проверка адекватности моделей законов осуществляется с использованием критериев типа хи-квадрат и целого ряда непараметрических критериев согласия.

Подчеркнём, что в этой ситуации критерии согласия применяются в условиях **проверки сложных гипотез**: оценивание параметров модели и вычисление статистик критериев осуществляются по одной и той же выборке.

А корректное применение критериев согласия для проверки сложных гипотез в различных программных системах бывает реализовано в достаточно редких случаях, скорее является исключением из правил.

В программной системе ISW этот процесс выглядит следующим образом.

После выбора в главном окне ISW раздела “Действия” в открывшемся меню (см. рис. 1) видны группы критериев, которые могут использоваться в различных целях. Выбираем “Статистический анализ v.2”

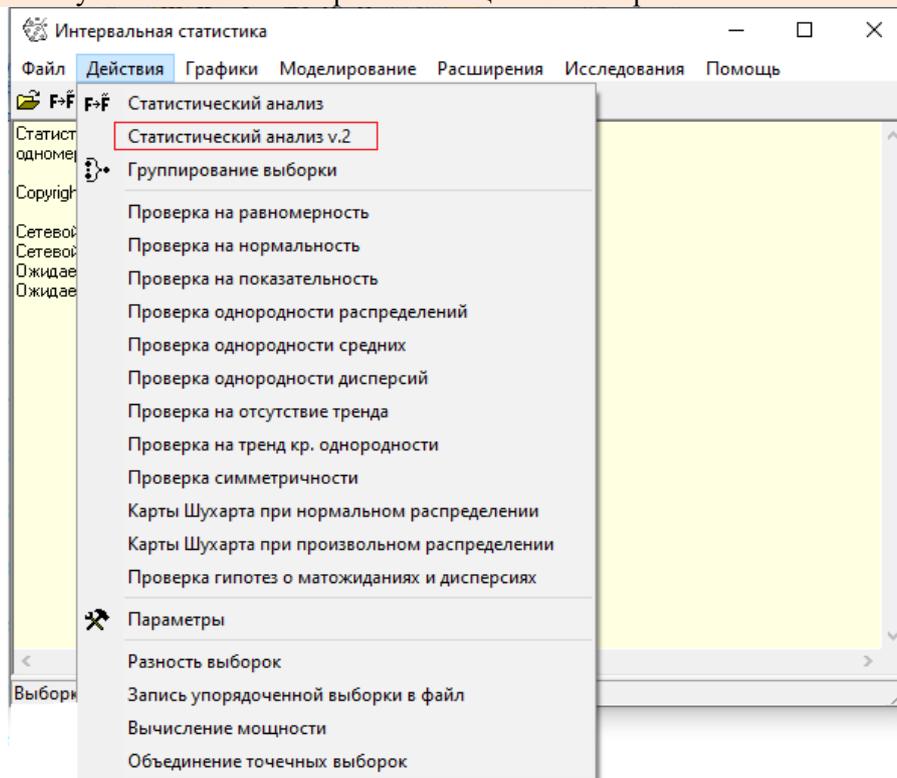


Рис. 1. Выбор группы критериев согласия в главном окне ISW

После этого полный набор критериев согласия, используемых при идентификации модели закона, открывается на вкладке “Оценивание параметров и проверка согласия” (рис. 2).

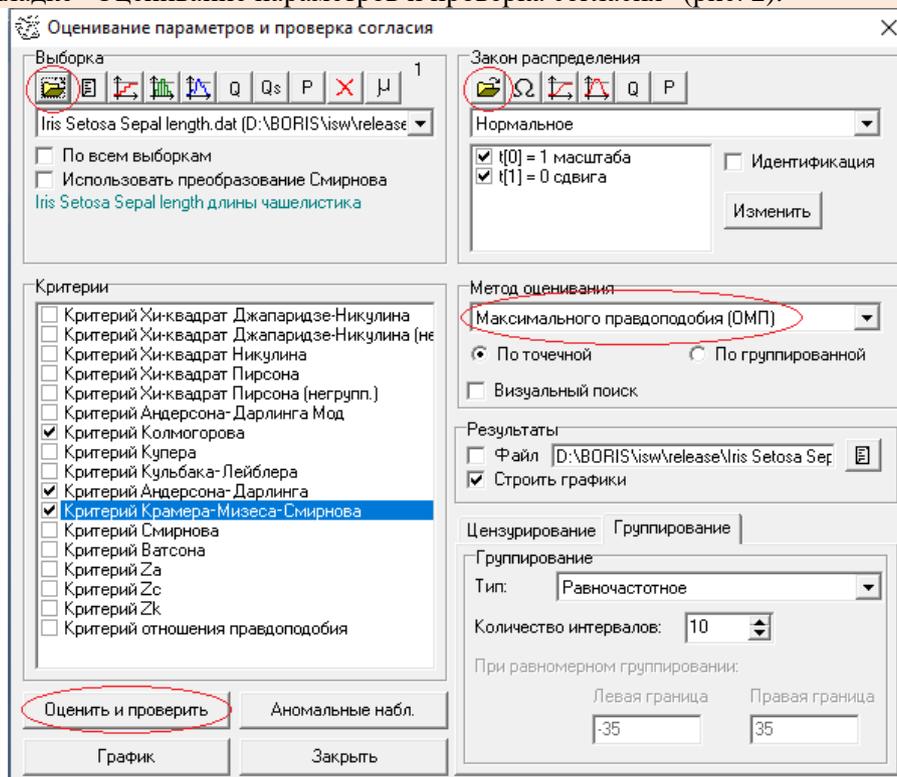


Рис. 2. Оценивание параметров и проверка согласия

На этой вкладке можно загрузить анализируемые выборки и множество параметрических моделей законов распределения. Выбрать закон распределения и указать оцениваемые параметры. Выбрать используемый метод оценивания параметров закона, указав, по какой выборке будут оцениваться параметры: по исходной (точечной) или группированной. Выбрать применяемые критерии согласия. В данном случае загружен файл “Iris Setosa Sepal length.dat”, *где данные приведены с ошибками округления* $\Delta = 0.1$, выбран нормальный закон с оцениванием двух параметров методом максимального правдоподобия по точечной выборке.

После этого нажимаем кнопку “Оценить и проверить”.

Следует напомнить.

Все непараметрические критерии согласия в своё время были предложены для проверки **простых гипотез** вида $H_0: F(x) = F(x, \theta)$, где $F(x, \theta)$ – функция распределения вероятностей, с которой проверяют согласие наблюдаемой выборки, а θ – **известное значение параметра** (скалярного или векторного).

В случае проверки простых гипотез **распределения статистик** $G(S_i | H_0)$ этих критериев **не зависят от вида** $F(x, \theta)$, поэтому их и назвали *непараметрическими*.

Проблемы проверки сложных гипотез

При проверке сложных гипотез вида $H_0: F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, где Θ – область определения параметра θ , когда по этой же выборке оцениваются параметры наблюдаемого закона распределения, все непараметрические критерии согласия теряют свойство “свободы от распределения”, и асимптотические **распределения статистик $G(S|H_0)$ становятся зависящими от факторов, определяющих “сложность” гипотезы.**

В частности, при проверке **сложной гипотезы** распределение статистики $G(S|H_0)$ критерия зависит:

- (a) – от вида закона распределения $F(x, \theta)$, соответствующего проверяемой гипотезе H_0 ;
- (b) – от типа оцениваемого параметра (сдвига, масштаба или формы);
- (c) – от числа оцениваемых параметров;
- (d) – от используемого метода(!) оценивания параметров;
- (e) – в некоторых ситуациях распределения статистик зависят от конкретных значений параметров закона $F(x, \theta)$ (например, от значений параметров формы обобщённого нормального закона, гамма-распределения, бета-распределений и т.п.).

Различия в предельных распределениях тех же самых статистик при проверке простых и сложных гипотез настолько существенны, что пренебрегать этим абсолютно недопустимо.

Для законов распределения, в случае которых при проверке сложных проявляется зависимость только от факторов (a)–(d), по результатам статистического моделирования можно построить приближенные модели для асимптотических распределений $G(S|H_0)$ статистик критериев. Для случая использования оценок максимального правдоподобия **такие модели построены, включены в ISW и используются** в процессе проверки.

Однако в случае (e) такая возможность исключается. Как искать распределение статистики критерия, зависящее от неизвестной оценки параметра? Это можно делать только после вычисления оценок **в интерактивном режиме** проверки гипотезы. Такая возможность предусмотрена в ISW.

Влияние ошибок округления

Распределения статистик критериев (**при проверке и простых, и сложных гипотез**) могут существенно изменяться вследствие влияния ошибок округления. Почти всегда это имеет место при анализе больших выборок, но не только. Как только видим заметное число повторяющихся наблюдений в выборке, мы можем прогнозировать наличие такого влияния.

При проверке сложных гипотез влияние от ошибок округления складывается с воздействием от факторов (a)–(e).

При наличии зависимости от ошибок округления, уточнить распределение статистики соответствующего критерия, как и ранее, можно промоделировав его в интерактивном режиме.

Вернёмся к показу нашего примера.

После вычисления ОМП параметров μ (сдвига) и σ (масштаба), вычисления значений статистик критериев и достигнутых уровней значимости p_v по встроенным моделям распределений статистик при проверке соответствующей сложной гипотезы открывается окно “Идентификация” (окно для выбора параметров моделирования), на котором приведены значения статистик критериев и соответствующие значения p_v (рис. 3). Здесь приведены результаты проверки нормальности **без учета влияния ошибок округления**.

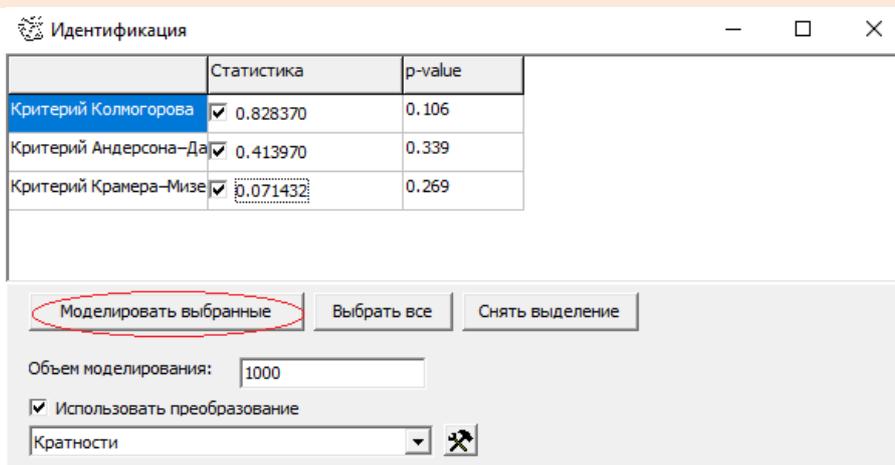


Рис. 3. Окно для выбора параметров моделирования

Для учета влияния ошибок округления ставим галочку в окне “Использовать преобразование”, выбираем “Кратности” и нажимаем кнопку “Инструменты”.

Для учета влияния ошибок округления в открывшемся окне “Параметры преобразования” (рис. 4) можно выбрать параметры преобразования, которому будут подвергаться выборки, моделируемые в процессе построения распределения статистики критерия. В нашем случае выбираем параметр “**порядок кратности**” **0.1** (соответствует ошибке округления в данной выборке). Следовательно, при моделировании реальных распределений статистик критериев элементы выборок, моделируемых по нормальному закону с параметрами μ и σ , будут округляться с погрешностью округления $\Delta = 0.1$.

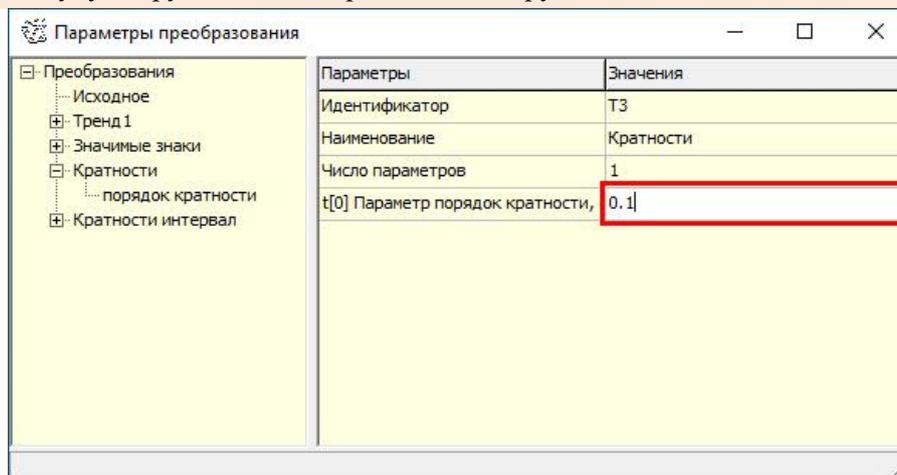


Рис. 4. Окно для выбора параметров преобразования

Закрываем окно “Параметры преобразования”. В окне “Идентификация” можно задать требуемое количество имитационных экспериментов N при моделировании распределений статистик применяемых критериев. Отмечаем галочками выбранные критерии, для которых будут моделироваться распределения статистик, и нажимаем “Моделировать выбранные”.

По завершении моделирования в окне “Идентификация” появляется результат (см. рис. 5 при $N = 1000$ и рис. 6 при $N = 1000000$).

	Статистика	p-value
Критерий Колмогорова	<input type="checkbox"/> 0.828370	0.488000
Критерий Андерсона-Дарлинга	<input type="checkbox"/> 0.413970	0.722000
Критерий Крамера-Мизе	<input type="checkbox"/> 0.071432	0.663000

Моделировать выбранные Выбрать все Снять выделение

Объем моделирования:

Использовать преобразование

Рис. 5. Оценки p_v при $N = 1000$ и $\Delta = 0.1$

Идентификация

	Статистика	p-value
Критерий Колмогорова	<input type="checkbox"/> 0.828370	0.482711
Критерий Андерсона-Дэ	<input type="checkbox"/> 0.413970	0.735906
Критерий Крамера-Мизе	<input type="checkbox"/> 0.071432	0.663780

Объем моделирования:

Использовать преобразование

Кратности

Рис. 6. Оценки p_V при $N = 1000000$ и $\Delta = 0.1$

Результаты на рис. 3 разительно отличаются от приведенных на рис. 5 и 6.

Полученные оценки параметров нормального закона появляются на вкладке “Оценивание параметров и проверка согласия”, фрагмент которой представлен на рис. 7.

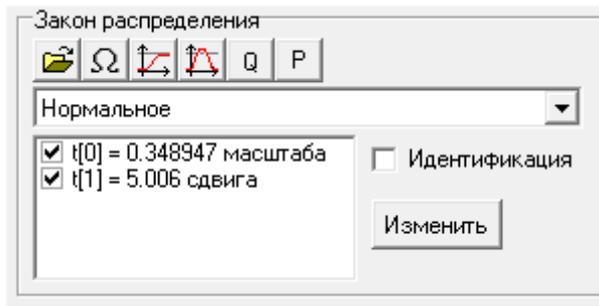


Рис. 7. Оценки параметров закона

Такой порядок действий предусмотрен для ситуации возможного влияния на результаты проверки имеющихся ошибок округления. Если опасения о таком влиянии отсутствуют, то процесс проверки оказывается проще, так как при моделировании не потребуется соответствующего преобразования выборок.

Все особенности применения непараметрических критериев согласия при проверке простых и сложных гипотез, в том числе в условиях нарушения стандартных предположений, описаны в руководстве:

Лемешко Б. Ю. [Непараметрические критерии согласия. Руководство по применению](#) : монография /Б.Ю. Лемешко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : ИНФРА-М, 2024. – 201 с. – (Научная мысль). – DOI 10.12737/2058731

Аналогичные возможности реализованы для применения в нестандартных условиях критериев типа χ^2 и множества специальных критериев (нормальности, равномерности, экспоненциальности).

При выборе в меню “Действия” раздела “*Проверка нормальности*” открывается возможность применения порядка **30 специальных критериев нормальности**, свойства которых были исследованы в рамках программной системы и подробно описаны в следующем руководстве:

Лемешко Б. Ю. [Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению](#) : монография / Б.Ю. Лемешко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : ИНФРА-М, 2023. – 353 с. – (Научная мысль). – DOI 10.12737/1896110.

Там же приведены результаты сравнительного анализа мощности этих критериев.

При выборе в меню “Действия” раздела “*Проверка равномерности*” открывается возможность применения порядка **20 специальных критериев равномерности**, свойства и результаты сравнительного анализа мощности которых были исследованы в рамках системы и описаны в руководстве:

Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю. [Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению](#): Монография / Б.Ю. Лемешко, П.Ю. Блинов. – М.: ИНФРА-М, 2015. – 183 с. – (Научная мысль). DOI: 10.12737/11304

При выборе в меню “Действия” раздела *“Проверка экспоненциальности”* открывается возможность применения порядка **25 специальных критериев**, ориентированных на проверку принадлежности **экспоненциальному закону**, свойства и результаты сравнительного анализа мощности этих критериев были исследованы в рамках системы и описаны в руководстве:

Лемешко Б.Ю. [Критерии проверки отклонения от экспоненциального закона. Руководство по применению](#) : монография / Б.Ю. Лемешко, П.Ю. Блинов. – Москва : ИНФРА-М, 2021. – 352 с. – (Научная мысль). –DOI 10.12737/1097477

При выборе в меню “Действия” раздела “*Проверка однородности распределений*” открывается вкладка “Однородность распределений”, позволяющая применять указанные на ней критерии (см. рис. 8)

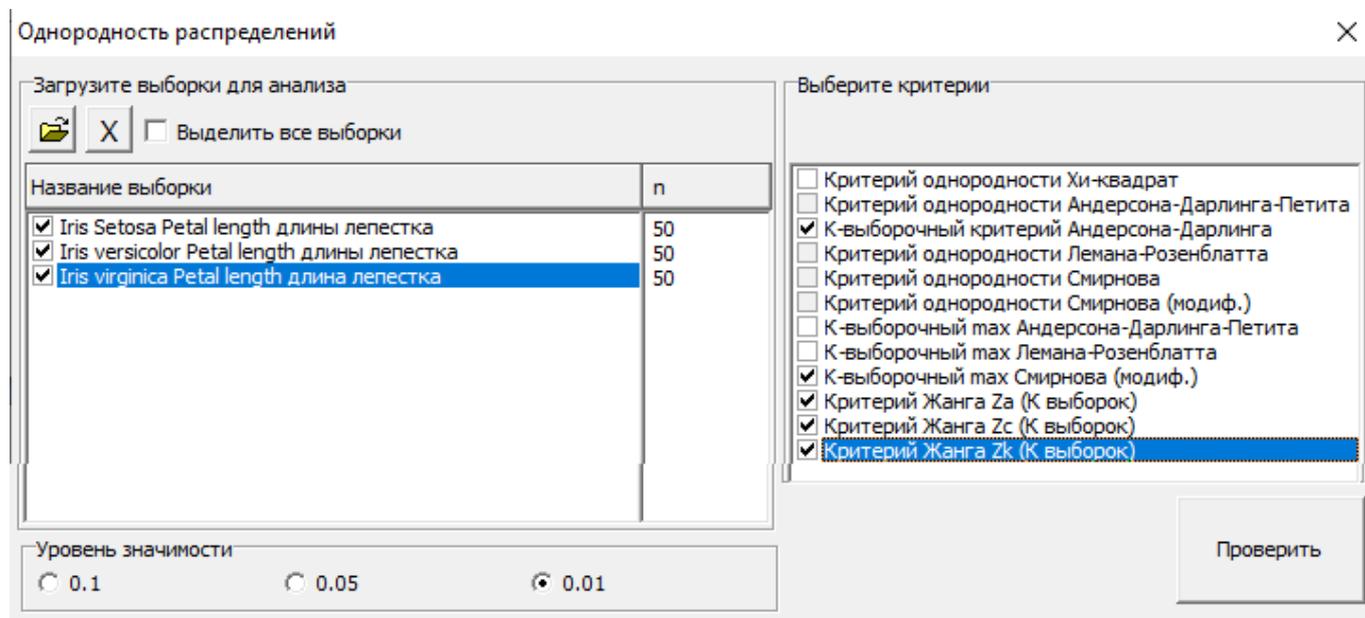


Рис. 8. Проверка однородности законов, которым принадлежат выборки

При выборе в меню “Действия” раздела **“Проверка однородности средних”** открывается вкладка “Однородность средних”, позволяющая указать используемые параметрические и непараметрические критерии однородности средних (см. рис.9).

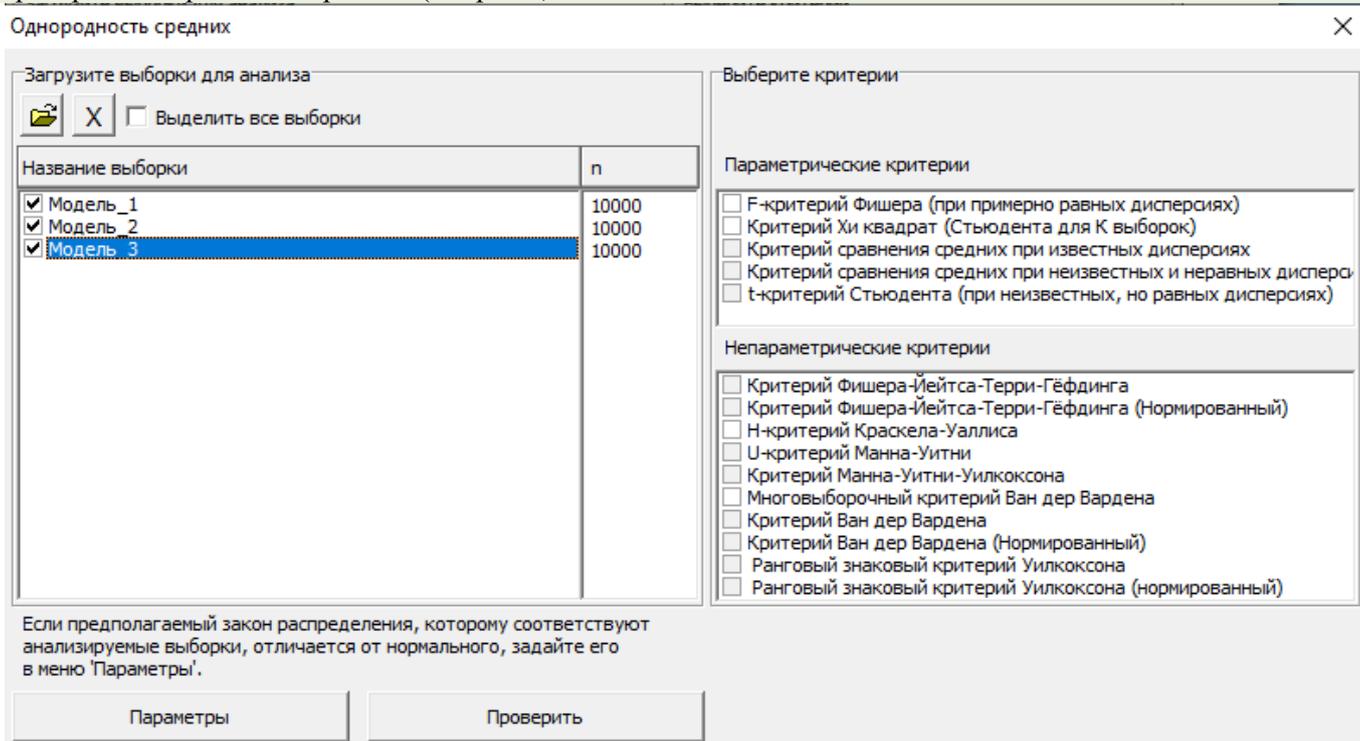


Рис. 9. Проверка гипотезы об однородности средних анализируемых выборок

Аналогично, вкладка **“Однородность дисперсий”**, позволяет указать используемые параметрические и непараметрические критерии однородности дисперсий (см. рис.10).

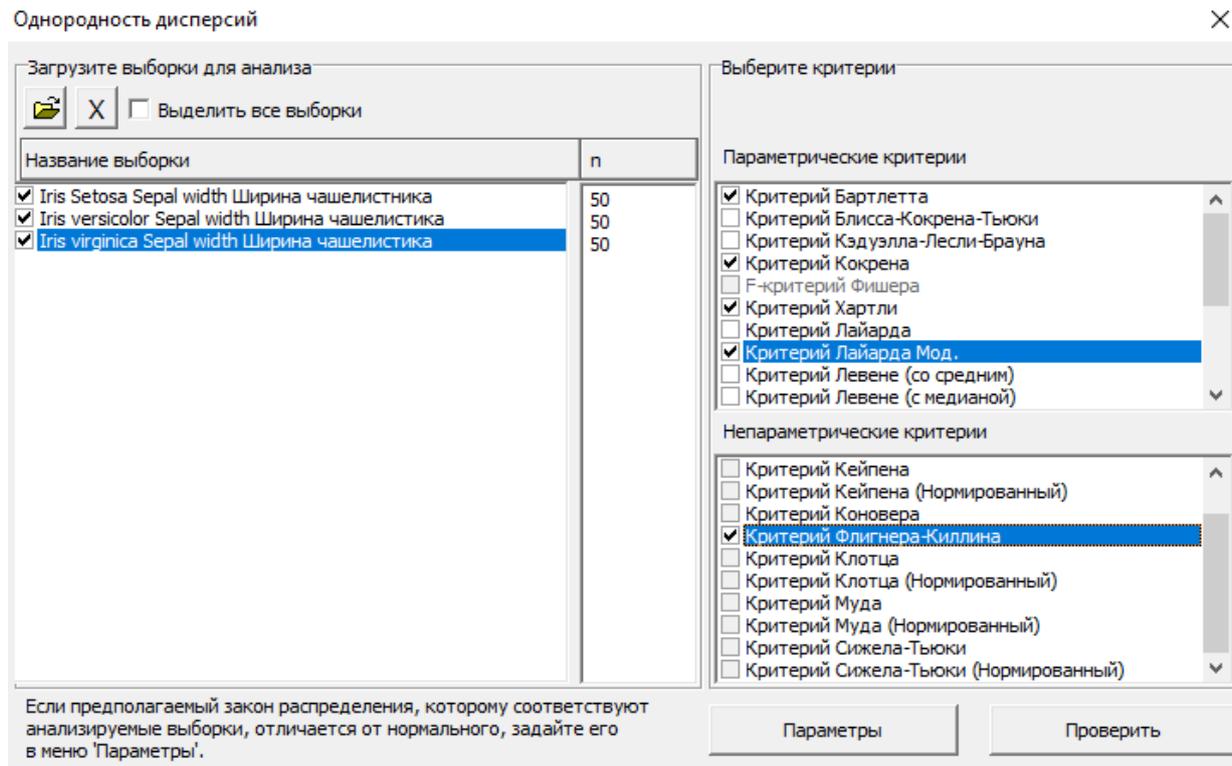


Рис. 10. Проверка гипотезы об однородности дисперсий анализируемых выборок

Свойства и результаты сравнительного анализа мощности этих критериев однородности законов, однородности средних и однородности дисперсий исследовались в рамках программной системы и описаны в руководстве:

Лемешко Б.Ю. [Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению](#) : монография / Б.Ю. Лемешко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : ИНФРА-М, 2021. – 248 с. – (Научная мысль). – DOI 10.12737/986695

Предпосылкой применения параметрических критериев является принадлежность анализируемых выборок нормальным законам.

Параметрические критерии однородности средних устойчивы к нарушению этого предположения.

А параметрические критерии однородности дисперсий крайне неустойчивы.

Можно ли применять параметрические критерии однородности дисперсий в условиях нарушения предположения о нормальности? Можно! Для этого надо лишь: (а) “определить” вид предполагаемого закона, которому, например, принадлежит выборка, полученная объединением всех анализируемых; (б) методами статистического моделирования оценить распределения статистик применяемых критериев, имеющие место в случае принадлежности выборок этому предполагаемому закону. Такой подход и реализуется в системе.

При выборе в меню “Действия” раздела **“Проверка на отсутствие тренда”** открывается возможность применения порядка **20 параметрических и непараметрических критериев**, ориентированных на проверку гипотезы об отсутствии тренда в среднем значении или в характеристике рассеяния. Свойства и результаты сравнительного анализа мощности этих критериев исследовались в рамках программной системы и описаны в руководстве:

Лемешко Б.Ю., Веретельникова И.В. [Критерии проверки гипотез о случайности и отсутствии тренда. Руководство по применению](#): Монография / Б.Ю. Лемешко, И.В. Веретельникова. – Москва : ИНФРА-М. 2021. – 221 с. – (Научная мысль). DOI [10.12737/1587437](#).

В системе реализована также возможность для проверки такого рода гипотез применять к разным частям временного ряда различные критерии проверки гипотез об однородности.

Заключение

В программной системе заложены возможности для исследования методами статистического моделирования реальных свойств всего множества критериев проверки статистических гипотез, включённых в неё, в том числе в условиях нарушения стандартных предположений.

Программная система используется в научных исследованиях и учебном процессе, а также при анализе реальных данных.

Система доступна по адресу: <https://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm>

Спасибо за внимание!