Сибирский журнал
индустриальной математики
Апрель–июнь, 2008. Том XI, № 2(34)

УДК 519.24

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ПРИ БЛИЗКИХ КОНКУРИРУЮЩИХ ГИПОТЕЗАХ. I. ПРОВЕРКА ПРОСТЫХ ГИПОТЕЗ*)

Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов

Методами статистического моделирования проведен анализ мощности ряда критериев согласия при проверке простых и сложных гипотез. Приведенные оценки мощности критериев при проверке простых гипотез относительно некоторых близких конкурирующих гипотез позволяют упорядочить критерии согласия.

Ключевые слова: критерий согласия, критерий Колмогорова, критерий Крамера — Мизеса — Смирнова, критерий Андерсона — Дарлинга, критерий Пирсона, критерий Никулина, мощность критерия.

Введение. Критерии согласия предназначены для проверки гипотез о соответствии эмпирического распределения некоторому теоретическому закону. Различают проверку простых и сложных гипотез. Простая проверяемая гипотеза H_0 имеет вид $F(x) = F(x,\theta)$, где $F(x,\theta)$ — функция распределения вероятностей, с которой проверяют согласие наблюдаемой выборки, θ — известное значение параметра (скалярного или векторного). Сложная проверяемая гипотеза H_0 может быть записана в виде $F(x) \in \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$, где Θ — область определения неизвестного параметра θ. Отличие в процедуре применения критериев при проверке сложных гипотез и соответствующие проблемы возникают, если оценку параметра $\hat{\theta}$ теоретического распределения вычисляют по той же самой выборке, по которой проверяют согласие. Далее мы, как правило, будем предполагать, что при проверке сложных гипотез оценка параметра $\hat{\theta}$ вычисляется по этой же выборке.

С проверкой статистических гипотез связывают ошибки двух видов. Ошибка первого рода заключается в том, что в результате проверки отклоняется справедливая проверяемая гипотеза H_0. Ошибка второго рода — в признании верной гипотезы H_0, когда на самом деле справедлива некоторая конкурирующая гипотеза H_1.

Процедура проверки гипотезы H_0 предполагает, что известно распределение $G(S|H_0)$ статистики S применяемого критерия при справедливости H_0. Для критериев согласия критические области определяются большими значениями статистик. Вероятность ошибки первого рода α (уровень значимости) представляет собой вероятность попадания значения статистики в критическую область: $\alpha = P\{S > S_\alpha|H_0\} = 1 - G(S_\alpha|H_0)$, где S_α — критическое значение. При проверке гипотез величина α, как правило, задается. Если вычисленное по выборке значение статистики $S^* \le S_\alpha$ или, что то же самое, достигнутый уровень значимости $P\{S > S^*|H_0\} = 1 - G(S^*|H_0) > \alpha$, то проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется.

При задании конкурирующей гипотезы H_1 вероятность ошибки второго рода определяется соотношением $\beta = P\{S \le S_\alpha|H_1\} = G(S_\alpha|H_1)$, где $G(S|H_1)$ —

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00059а).

© 2008 Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Постовалов С. Н.

распределение статистики критерия при справедливости H_1. Если критерий полностью определен, то задание α однозначно определяет величину β, и наоборот. Мощность $1-\beta$ критерия при проверке гипотезы H_0 относительно H_1 представляет собой функцию, зависящую от H_0 и H_1, объема выборки n и, возможно, от некоторых других факторов, связанных с построением критерия.

При проведении статистического анализа, отдавая предпочтение некоторому критерию, хотелось бы иметь уверенность в том, что для заданной вероятности ошибки первого рода α гарантируется минимальная вероятность ошибки второго рода β, т. е. что критерий обладает наибольшей мощностью относительно интересующей нас альтернативы H_0 и H_1.

Содержащаяся в различных источниках информация о преимуществах в определенных ситуациях того или иного критерия согласия неоднозначна и зачастую противоречива. Результаты исследования асимптотической мощности критериев (см., например, [1–4]) трудно использовать вследствие ограниченных объемов выборок, с которыми приходится иметь дело практику. Рекомендации различных авторов носят субъективный характер, отражают сложившиеся стереотипы, базируются на конкретных частных примерах и ограниченном опыте практического применения.

Исследования мощности затруднены отсутствием результатов, связанных с аналитическим представлением функций распределения $G(S|H_1)$, для конкретных критериев согласия при проверке сложных гипотез, в частности для непараметрических критериев и критериев типа χ^2, при оценивании параметров по точечным выборкам (негруппированным наблюдениям).

Цель исследований, представленных в данной работе, заключалась в сравнительном анализе мощности наиболее часто используемых критериев согласия на некоторых парах достаточно близких конкурирующих гипотез H_0 и H_1. Интерес представляет способность критериев различать именно близкие гипотезы, так как распознавание отличия в далеких законах распределения, как правило, не составляет проблем.

1. Исследуемые критерии.

Критерий Колмогорова. В критериях типа Колмогорова измеряемое расстояние между эмпирическим $F_n(x)$ и теоретическим $F(x,\theta)$ распределениями имеет вид

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} |F_n(x) - F(x,\theta)|,$$

где n — объем выборки. В случае справедливости простой проверяемой гипотезы при $n \to \infty$ статистика $\sqrt{n}\,D_n$ подчиняется распределению Колмогорова $K(s)$ [5]. Наиболее часто в критерии Колмогорова (Колмогорова — Смирнова) используют статистику вида [6] с поправкой, предложенной Большевым [7, 8]:

$$S_k = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \tag{1}$$

где

$$D_n = \max\left(D_n^+, D_n^-\right),$$

$$D_n^+ = \max_{1\le i\le n}\left\{\frac{i}{n} - F(x_i,\theta)\right\}, \quad D_n^- = \max_{1\le i\le n}\left\{F(x_i,\theta) - \frac{i-1}{n}\right\},$$

n — объем выборки, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — упорядоченные по возрастанию выборочные значения. В случае справедливости простой проверяемой гипотезы статистика S_k в пределе подчиняется закону распределения Колмогорова $K(S)$ [6].

По-видимому (и к большому сожалению), поправка Большева не привлекла внимания зарубежных специалистов. В работах, посвященных критерию Колмогорова, до сих пор, как правило, используют статистику $\sqrt{n}\,D_n$. Вследствие этого при ограниченных значениях n вынуждены учитывать существенную зависимость распределения статистики от величины n.

Критерий Крамера — Мизеса — Смирнова. Статистика критерия ω^2 Мизеса (Крамера — Мизеса — Смирнова) имеет вид [6]

$$S_\omega = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2 . \quad (2)$$

При справедливости простой гипотезы статистика в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a_1(s)$ [6].

Критерий Андерсона — Дарлинга. Статистика критерия Ω^2 Мизеса (статистика Андерсона — Дарлинга) определяется выражением [6]

$$S_\Omega = n\Omega_n^2 = -n - 2\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(x_i, \theta) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n}\right) \ln(1 - F(x_i, \theta)) \right\} \quad (3)$$

и при справедливости простой гипотезы в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a_2(s)$ [6].

В выражениях статистик критериев (1)–(3), которые строились для проверки простых гипотез, принято указывать теоретическую функцию распределения как $F(x)$, подчеркивая этим, что закон распределения и его параметр θ известны. Мы намеренно в (1)–(3) указали функцию распределения $F(x, \theta)$ зависящей от параметра θ, подразумевая, что при проверке сложных гипотез параметр θ будет заменяться оценкой. Это же замечание справедливо для критерия χ^2 Пирсона.

В случае проверки простых гипотез предельные распределения статистик критериев согласия Колмогорова, ω^2 Мизеса и Ω^2 Андерсона — Дарлинга не зависят от вида наблюдаемого закона распределения и, в частности, от его параметров. В этой связи их называют свободными от распределения.

При проверке сложных гипотез, когда по этой же выборке оцениваются параметры закона, непараметрические критерии теряют свойство свободы от распределения [9]. Более того, при проверке сложных гипотез распределения статистик данных критериев определяются характером проверяемой сложной гипотезы. На законы распределений статистик $G(S|H_0)$ критериев влияют следующие факторы, определяющие «сложность» гипотезы [10]:

— вид наблюдаемого закона распределения $F(x, \theta)$, соответствующего истинной гипотезе H_0;

— тип оцениваемого параметра и число оцененных по выборке параметров;

— в некоторых ситуациях конкретное значение параметра (например, в случае гамма-распределения);

— используемый метод оценивания параметров.

Аналитический вид (предельных) распределений статистик $G(S|H_0)$ непараметрических критериев при проверке сложных гипотез не известен. Имеются частные решения, в основе которых использованы различные подходы [11–19]. По-видимому, наиболее перспективным для построения распределений статистик является численный подход, базирующийся на статистическом моделировании эмпирических распределений статистик и последующем построении для них приближенных аналитических моделей [10, 20–27].

Критерий χ^2 Пирсона. Применение критериев типа χ^2 предусматривает разбиение области определения случайной величины на k интервалов с подсчетом числа наблюдений n_i, попавших в них, и вероятностей попадания в интервалы $P_i(\theta)$, соответствующих теоретическому закону. Статистика критерия согласия χ^2 Пирсона имеет вид

$$X_n^2 = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i/n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}. \tag{4}$$

В случае проверки простой справедливой гипотезы в пределе эта статистика подчиняется χ^2_{k-1}-распределению с $k-1$ степенями свободы.

Если верна конкурирующая гипотеза H_1 и выборка соответствует закону с распределением $F_1(x, \theta_1)$ и параметром θ_1, то эта же статистика в пределе подчиняется нецентральному χ^2_{k-1}-распределению с параметром нецентральности

$$\nu = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(P_i^1(\theta_1) - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)},$$

где $P_i^1(\theta_1)$ — вероятность попадания в интервал при справедливой гипотезе H_1.

В случае проверки сложной гипотезы при справедливости H_0 и при условии, что оценки параметров находятся в результате минимизации статистики (4) по этой же самой выборке, статистика X_n^2 асимптотически распределена как χ^2_{k-r-1}, где r — число оцененных по выборке параметров. Статистика (4) имеет это же распределение, если в качестве метода оценивания выбирают метод максимального правдоподобия и оценки вычисляют по сгруппированным данным [28, 29]. Более того, методами статистического моделирования было показано, что это имеет место, если используются и другие асимптотически эффективные оценки по группированным данным [30].

При вычислении оценок максимального правдоподобия (ОМП) по негруппированным данным эта же статистика распределена как сумма независимых слагаемых $\chi^2_{k-r-1} + \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j \xi_j^2$, где $\xi_1, \ldots, \xi_r$ — стандартные нормальные случайные величины, независимые одна от другой и от χ^2_{k-r-1}, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — некоторые числа между 0 и 1 [31–33]. В этом случае при проверке сложных гипотез и использовании ОМП по негруппированным наблюдениям распределения $G\big(X_n^2 | H_0\big)$ статистики критерия существенно зависят от способа группирования [34].

В работах [34, 35] методами статистического моделирования были проведены исследования законов распределения статистик типа χ^2 в случае простых и различных сложных гипотез при справедливости гипотезы H_0 и справедливости конкурирующей гипотезы H_1 при равновероятном (РВГ) и асимптотически оптимальном (АОГ) группировании [36–41]. При использовании АОГ минимизируются потери в информации Фишера, связанные с группированием, и максимизируется мощность критерия χ^2 Пирсона относительно близких конкурирующих гипотез.

В качестве критерия согласия может использоваться критерий отношения правдоподобия со статистикой вида [42]

$$-2 \ln l = -2 \sum_{i=1}^{k} n_i \ln \left(\frac{P_i(\theta)}{n_i/n} \right),$$

который асимптотически эквивалентен критерию χ^2 Пирсона [42]. Более того, выводы относительно свойств этого критерия во всех наших исследованиях оказывались идентичными выводам по поводу критерия Пирсона [35, 39, 40]. Поэтому отдельно в данной работе этот критерий не рассматривается.

Критерий Никулина. Применение при проверке сложных гипотез с использованием критериев типа χ^2 оценок по негруппированным (точечным) наблюдениям имеет определенные преимущества. Такие оценки имеют лучшие асимптотические свойства по сравнению с оценками по группированным. В работах [43, 44] предложен критерий, в котором используются ОМП по негруппированным данным. Этому же критерию посвящены работы [45, 46], а наиболее полно он изложен в [47]. Критерий обладает двумя преимуществами по отношению к критерию χ^2 Пирсона. Во-первых, замечательным фактом, отличающим этот критерий, является то, что статистика критерия при справедливости проверяемой гипотезы в пределе подчиняется χ^2_{k-1}-распределению независимо от числа параметров закона, оцененных методом максимального правдоподобия. Во-вторых, мощность критерия, как правило, выше мощности критерия χ^2 Пирсона.

В [48] аналогичные результаты для экспоненциального семейства распределений были получены Рао и Робсоном. Теории построения таких критериев была посвящена работа [49]. В последнее время критерии такого вида называют критериями со статистиками Рао — Робсона — Никулина [50].

В нашем случае рассматривался критерий со статистикой в виде, первоначально предложенным в [43]. Критерий предусматривает оценивание неизвестных параметров распределения $F(x,\theta)$ методом максимального правдоподобия по негруппированным данным. При этом вектор вероятностей попадания в интервалы $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_k)^T$ предполагается заданным и граничные точки интервалов определяют по соотношениям $x_i(\theta) = F^{-1}(P_1 + \cdots + P_i)$, $i = \overline{1, (k-1)}$. Предложенная статистика имеет вид [42]

$$Y_n^2 = X_n^2 + n^{-1} a^T(\theta)\Lambda(\theta)a(\theta), \tag{5}$$

где X_n^2 вычисляется по формуле (4); матрица

$$\Lambda(\theta) = \left\| J(\theta_l, \theta_j) - \sum_{i=1}^{k} \frac{w_{\theta_l i} w_{\theta_j i}}{p_i} \right\|^{-1},$$

элементы и размерность которой определяются оцениваемыми компонентами вектора параметров θ;

$$J(\theta_l, \theta_j) = \int \left(\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta_l} \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta_j} \right) f(x,\theta)\, dx$$

— элементы информационной матрицы по негруппированным данным; компоненты вектора $a(\theta)$ имеют вид

$$a_{\theta_l} = w_{\theta_l 1} n_1 / P_1 + \cdots + w_{\theta_l k} n_k / P_k,$$
$$w_{\theta_l i} = -f[x_i(\theta), \theta] \frac{\partial x_i(\theta)}{\partial \theta_l} + f[x_{i-1}(\theta), \theta] \frac{\partial x_{i-1}(\theta)}{\partial \theta_l}.$$

2. Методы исследований. Для вычисления значений мощности необходимо знание распределений статистик $G(S|H_0)$ и $G(S|H_1)$, аналитические выражения которых, как правило, не известны и зависят от n. Для оценки $G(S|H_0)$ и $G(S|H_1)$ соответствующих статистик S наиболее целесообразно использование методов статистического моделирования. Для построения эмпирических распределений статистик моделируются выборки статистик $S_1, S_2, \ldots, S_N$ достаточно большого объема N при конкретных объемах выборок n наблюдаемых величин, моделируемых по законам, соответствующим проверяемой H_0 или конкурирующей H_1 гипотезам. Далее оценки значений мощности критериев могут быть получены по эмпирическим распределениям статистик $G_n^N(S|H_0)$ и $G_n^N(S|H_1)$ или по приближенным аналитическим моделям, построенным по $G_n^N(S|H_0)$ и $G_n^N(S|H_1)$.

При проведении данных исследований, как правило, задавалось $N = 10^6$, индекс N в обозначениях соответствующих эмпирических функций в дальнейшем изложении опускается. Моделирование и исследование опирались на развиваемое программное обеспечение задач статистического анализа.

3. Рассматриваемые альтернативы. Результаты сравнительного анализа мощности критериев согласия в работе иллюстрируются на двух парах конкурирующих гипотез. Первую пару составили нормальный и логистический законы: проверяемой гипотезе H_0 соответствовал нормальный закон с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_0\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}\right\},$$

а конкурирующей гипотезе H_1 — логистический с функцией плотности

$$f(x) = \frac{\pi}{\theta_0\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_1)}{\theta_0\sqrt{3}}\right\} \Big/ \left[1+\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_1)}{\theta_0\sqrt{3}}\right\}\right]^2$$

и параметрами $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 0$. В случае простой гипотезы H_0 параметры нормального закона имеют те же значения. Эти два закона близки и трудно различимы с помощью критериев согласия.

Вторую пару составили: H_0 — распределение Вейбулла с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_0(x-\theta_2)^{\theta_0-1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp\left\{-\left(\frac{x-\theta_2}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right\}$$

и параметрами $\theta_0 = 2$, $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 0$; H_1 — гамма-распределение с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1\Gamma(\theta_0)} \left(\frac{x-\theta_2}{\theta_1}\right)^{\theta_0-1} e^{-(x-\theta_2)/\theta_1}$$

и параметрами $\theta_0 = 3,12154$, $\theta_1 = 0,557706$, $\theta_2 = 0$, при которых гамма-распределение наиболее близко к данному распределению Вейбулла.

В работе исследовалась мощность при проверке простых и сложных гипотез H_0 против простой гипотезы H_1.

4. Мощность критериев в случае проверки простых гипотез при альтернативе «нормальное распределение — логистическое». Функции распределений нормального и логистического законов, соответствующих конкурирующим гипотезам H_0 и H_1, очень близки. В этом можно убедиться, сравнив графики. А если по выборкам, соответствующим нормальному или логистическому закону, находить ОМП параметров этих законов, то значения оценок параметров сдвига и масштаба практически совпадают.

Полученные в результате моделирования функции распределения статистики Колмогорова при справедливости простой проверяемой гипотезы $G(S_k|H_0) = K(S_k)$ и справедливости конкурирующей $G_n(S_k|H_1)$ при объемах выборок $n = 100, 200, 300, 500, 1000, 2000$ наблюдений представлены на рис. 1. Проверяемой гипотезе H_0 соответствует нормальный закон, конкурирующей H_1 — логистический.

Как видно из рисунка, способность критерия Колмогорова различать эти гипотезы невелика. Например, при заданной вероятности ошибки первого рода $\alpha = 0,1$ мощность критерия Колмогорова при проверке гипотезы H_0 относительно конкурирующей H_1 составляет величины порядка 0,127 при $n = 100$; 0,170 при $n = 200$; 0,215 при $n = 300$; 0,309 при $n = 500$; 0,544 при $n = 1000$ и 0,861 при $n = 2000$.

На рис. 2 представлены распределения $G(S_\omega|H_0) = a_1(S_\omega)$ и $G_n(S_\omega|H_1)$ статистики S_ω Крамера — Мизеса — Смирнова при простой проверяемой гипотезе и тех же самых H_0 и H_1.

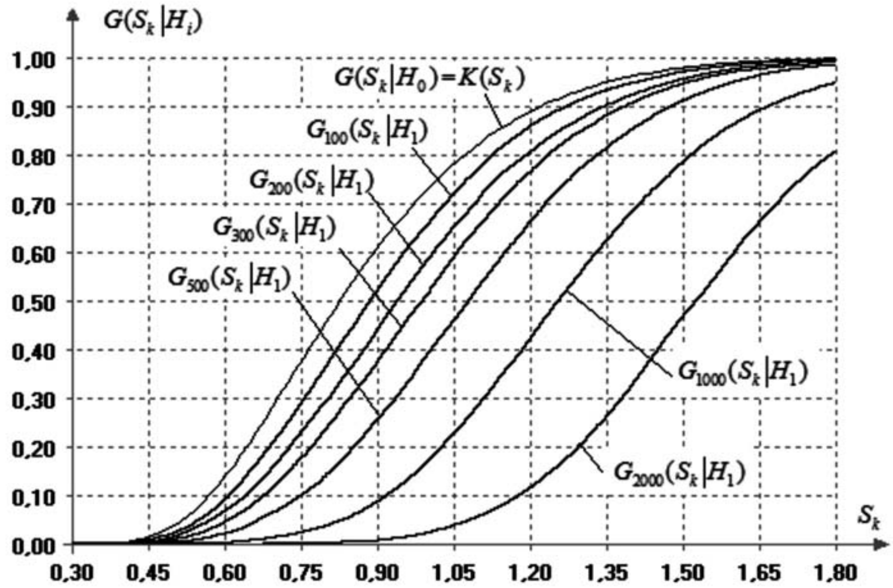

Рис. 1. Распределения статистики (1) типа Колмогорова $G(S_k|H_0) = K(S_k)$ и $G_n(S_k|H_1)$ при проверке простой гипотезы H_0 о согласии с нормальным законом при конкурирующей гипотезе H_1

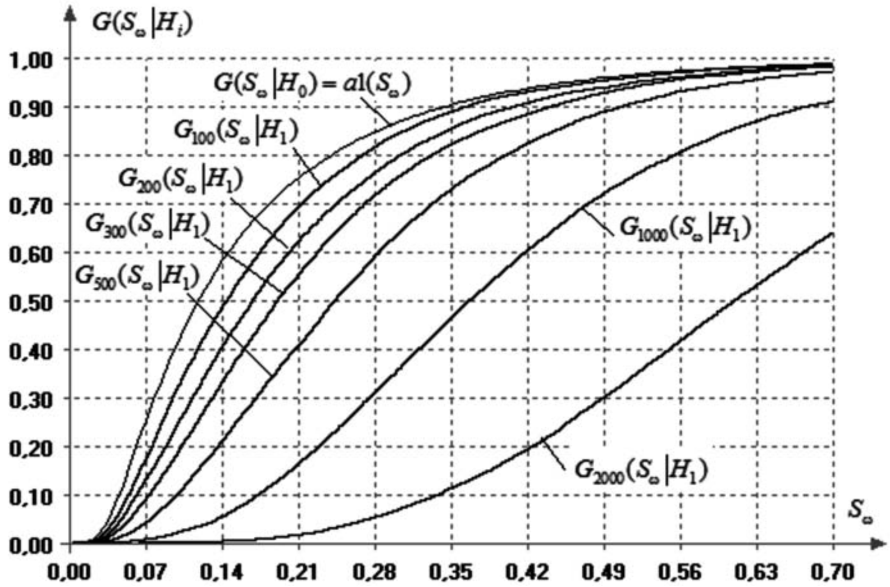

Рис. 2. Распределения статистики (2) типа ω^2 Крамера — Мизеса — Смирнова $G(S_\omega|H_0) = a_1(S_\omega)$ и $G_n(S_\omega|H_1)$ при проверке простой гипотезы H_0 о согласии с нормальным законом при конкурирующей гипотезе H_1

Аналогично на рис. 3 отражены распределения $G(S_\Omega|H_i)$ статистики S_Ω Андерсона — Дарлинга (Ω^2 Мизеса). В случае проверки простой гипотезы $G(S_\Omega|H_0) = a_2(S_\Omega)$. На рис. 4 представлены распределения статистики X_n^2 критерия Пирсона при проверке простой гипотезы в случае использования АОГ при числе интервалов $k = 9$.

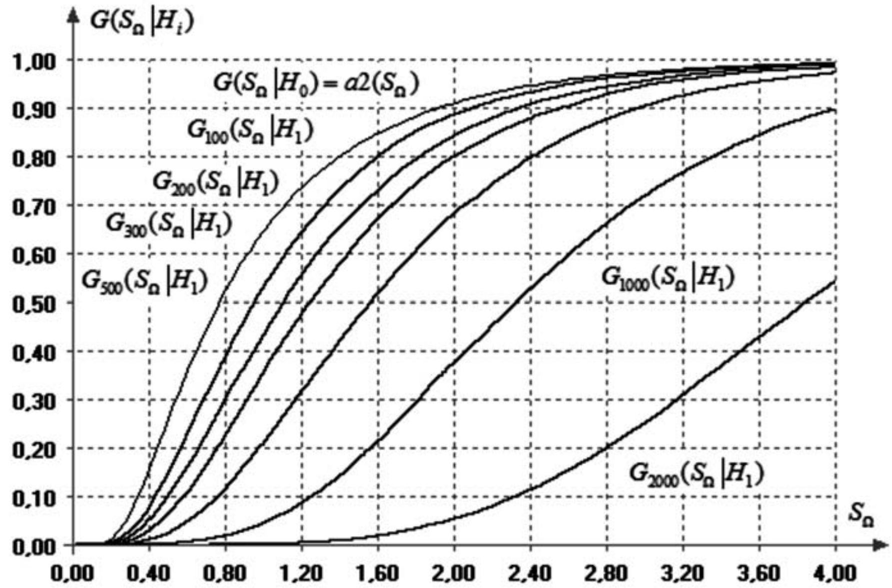

Рис. 3. Распределения статистики (3) типа Ω^2 Андерсона — Дарлинга $G(S_\Omega|H_0) = a_2(S_\Omega)$ и $G_n(S_\Omega|H_1)$ при проверке простой гипотезы H_0 о согласии с нормальным законом при конкурирующей гипотезе H_1

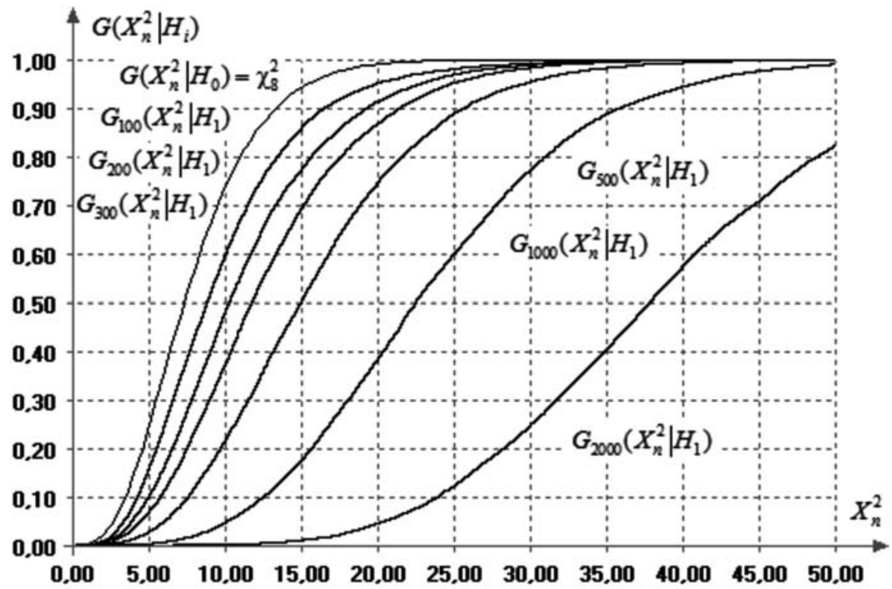

Рис. 4. Распределения статистики (4) типа χ^2 Пирсона $G\big(X_n^2|H_0\big) = \chi_8^2$ и $G\big(X_n^2|H_1\big)$ при проверке простой гипотезы H_0 о согласии с нормальным законом при конкурирующей гипотезе H_1 в случае АОГ при $k = 9$

Напомним, что статистика X_n^2 критерия Пирсона представляет собой дискретную случайную величину. Дискретность значений статистики особенно сильно проявляется при РВГ. В этом случае распределение статистики X_n^2 плохо аппроксимируется непрерывным χ^2_{k-1}-распределением. Характер сходимости распределений $G\left(X_n^2|H_0\right)$ статистики X_n^2 Пирсона к χ^2_8-распределению при девяти равновероятных интервалах и проверке простой гипотезы H_0 иллюстрирует рис. 5 [51]. Естественно, что непараметрические критерии согласия с ростом объемов N выборок статистики X_n^2 (с ростом мощности этих критериев) все более уверенно отклоняют гипотезу о согласии эмпирических распределений статистики X_n^2 (вследствие их ступенчатости) с соответствующими непрерывными χ^2_{k-1}-распределениями.

Аналогичные распределения статистики при АОГ носят достаточно гладкий характер [51]. При малых n распределения $G\left(X_n^2|H_0\right)$ по сравнению с χ^2_8-распределением имеют более тяжелый (правый) хвост, а в области значений ординат от нуля до 0,85 сдвинуты влево. Однако с ростом n распределения быстро сходятся к χ^2_{k-1}-распределениям [51]. Например, уже при $n = 100$ проверка согласия смоделированной выборки статистики (4) объемом $N = 10000$ с χ^2_8-распределением дает достигаемые уровни значимости по всем применяемым критериям в интервале от $P = 0,0103$ для критерия Андерсона — Дарлинга до $P = 0,0586$ для критерия Крамера — Мизеса — Смирнова. А при $n = 500$ достигаемые уровни значимости по всем рассматриваемым критериям уже лежат в интервале от $P = 0,963$ до $P = 0,992$, что говорит о практическом совпадении эмпирического распределения статистики с теоретическим χ^2_8-распределением.

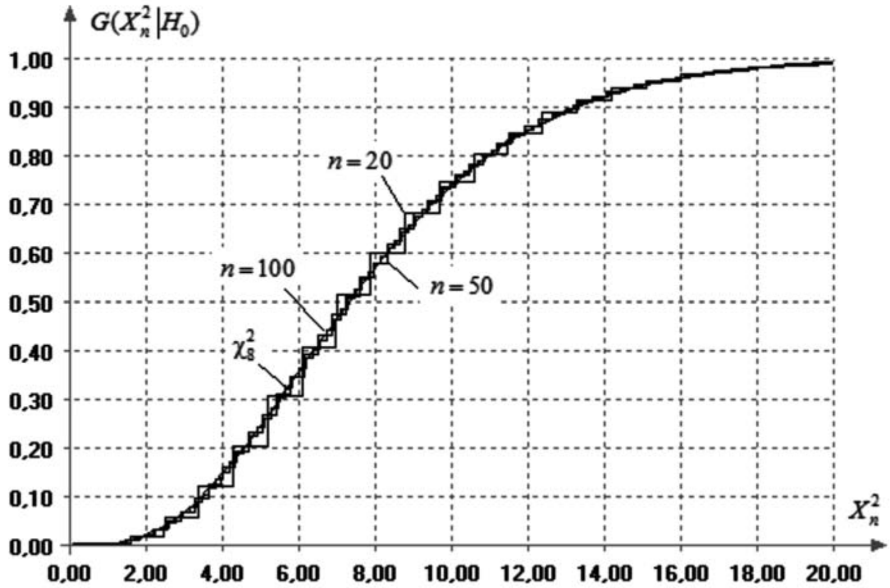

Рис. 5. Характер сходимости распределений $G\left(X_n^2|H_0\right)$ статистики (4) критерия χ^2 Пирсона к χ^2_8-распределению при девяти равновероятных интервалах и проверке простой гипотезы H_0

Вычисленные на основании результатов моделирования распределений статистик оценки мощности рассматриваемых критериев согласия для различных значений уровня значимости α при проверке простой гипотезы H_0, соответствующей нормальному закону с параметрами $(0, 1)$, против гипотезы H_1, соответствующей логистическому закону с таким же набором параметров, приведены в табл. 1. Погрешность приводимых оценок мощности при проверке простых гипотез и 95-процентном доверительном интервале не превышает величины $\pm 10^{-3}$. Критерии упорядочены по убыванию мощности. В таблице приведена максимальная мощность критерия X_n^2 Пирсона, которую он имеет для данной пары H_0 и H_1 при $k = 15$ и АОГ. Для сравнения в табл. 2 приведены значения мощности при РВГ и другом количестве интервалов.

Т а б л и ц а 1

Мощность критериев согласия при проверке простой гипотезы H_0 (нормальное распределение) против гипотезы H_1 (логистическое)

α	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 15$ и АОГ					
0.15	0.349	0.459	0.565	0.737	0.946	0.999
0.1	0.290	0.388	0.490	0.671	0.922	0.998
0.05	0.210	0.292	0.385	0.565	0.871	0.996
0.025	0.154	0.222	0.302	0.472	0.813	0.992
0.01	0.107	0.159	0.221	0.369	0.729	0.983
	Мощность критерия Ω^2 Андерсона — Дарлинга					
0.15	0.194	0.258	0.328	0.472	0.776	0.982
0.1	0.125	0.169	0.222	0.343	0.654	0.957
0.05	0.057	0.079	0.107	0.181	0.439	0.869
0.025	0.026	0.036	0.049	0.088	0.261	0.724
0.01	0.010	0.013	0.017	0.031	0.114	0.491
	Мощность критерия Колмогорова					
0.15	0.190	0.246	0.303	0.415	0.662	0.922
0.1	0.127	0.170	0.215	0.309	0.544	0.861
0.05	0.062	0.088	0.116	0.179	0.365	0.721
0.025	0.031	0.044	0.061	0.100	0.231	0.560
0.01	0.012	0.018	0.026	0.044	0.119	0.366
	Мощность критерия ω^2 Крамера — Мизеса — Смирнова					
0.15	0.178	0.228	0.283	0.401	0.680	0.947
0.1	0.114	0.147	0.186	0.277	0.542	0.892
0.05	0.052	0.067	0.086	0.136	0.324	0.742
0.025	0.024	0.030	0.039	0.062	0.171	0.548
0.01	0.010	0.011	0.014	0.021	0.065	0.307

Таблица 2

Мощность критерия согласия χ^2 Пирсона при проверке простой гипотезы H_0 (нормальное распределение) против гипотезы H_1 (логистическое) в зависимости от способа группирования и числа интервалов

α	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 9$ и АОГ					
0.15	0.269	0.381	0.488	0.670	0.917	0.998
0.1	0.204	0.302	0.403	0.589	0.880	0.995
0.05	0.129	0.203	0.287	0.464	0.806	0.989
0.025	0.084	0.136	0.203	0.359	0.723	0.9797
0.01	0.050	0.081	0.127	0.249	0.608	0.957
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 9$ и РВГ					
0.15	0.210	0.282	0.349	0.483	0.747	0.960
0.1	0.152	0.208	0.270	0.392	0.673	0.938
0.05	0.083	0.123	0.170	0.273	0.547	0.890
0.025	0.046	0.072	0.105	0.186	0.435	0.828
0.01	0.020	0.036	0.056	0.109	0.310	0.734
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 15$ и РВГ					
0.15	0.192	0.257	0.312	0.432	0.690	0.941
0.1	0.139	0.187	0.237	0.343	0.607	0.911
0.05	0.073	0.106	0.144	0.227	0.477	0.848
0.025	0.040	0.061	0.085	0.149	0.365	0.772
0.01	0.018	0.029	0.043	0.083	0.247	0.662

При РВГ критерий X_n^2 Пирсона относительно данной пары гипотез имеет максимальную мощность при $k = 4$ [52], а далее с ростом k мощность убывает. Но этот максимальный уровень мощности ниже мощности данного критерия при $k = 9$ с использованием АОГ.

При РВГ функции мощности критерия χ^2 Пирсона относительно данной пары гипотез являются убывающими функциями от числа интервалов группирования k [52], что подтверждается и результатами данных исследований. При АОГ оптимальное число интервалов, максимизирующее мощность, смещается в область больших значений k. Мощность данного критерия относительно близких гипотез и заданном k при АОГ, как правило, всегда выше [40, 41, 52].

5. Мощности критериев при проверке простых гипотез в случае пары «распределение Вейбулла — гамма-распределение». В этом случае проверяемой гипотезе H_0 соответствует распределение Вейбулла с параметрами $\theta_0 = 2$, $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 0$, а конкурирующей H_1 — гамма-распределение с параметрами $\theta_0 = 3,12154$, $\theta_1 = 0,557706$, $\theta_2 = 0$. Параметры гамма-распределения подобраны так, чтобы оно было наиболее близким к данному распределению Вейбулла.

Вычисленные оценки мощности критериев для различных значений уровня значимости α при проверке согласия с распределением Вейбулла (гипотеза H_0)

против конкурирующей гипотезы, соответствующей гамма-распределению с указанными параметрами (гипотеза H_1), при простой гипотезе H_0 приведены в табл. 3 и 4. Критерии в таблицах упорядочены по убыванию мощности.

Таблица 3

Мощность критериев согласия при проверке простой гипотезы H_0 (распределение Вейбулла с параметрами 2, 2, 0) относительно гипотезы H_1 (гамма-распределение с параметрами 3,12154, 0,557706, 0)

α	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 15$ и АОГ					
0.15	0.486	0.621	0.757	0.909	0.996	1.000
0.1	0.418	0.556	0.701	0.876	0.993	1.000
0.05	0.324	0.469	0.611	0.815	0.986	1.000
0.025	0.254	0.403	0.529	0.751	0.974	1.000
0.01	0.191	0.332	0.437	0.668	0.954	1.000
	Мощность критерия Ω^2 Андерсона — Дарлинга					
0.15	0.302	0.446	0.577	0.781	0.976	1.000
0.1	0.223	0.348	0.473	0.689	0.951	1.000
0.05	0.131	0.224	0.326	0.533	0.882	0.998
0.025	0.076	0.141	0.220	0.396	0.785	0.993
0.01	0.037	0.075	0.126	0.257	0.636	0.975
	Мощность критерия ω^2 Крамера — Мизеса — Смирнова					
0.15	0.295	0.425	0.539	0.716	0.931	0.998
0.1	0.224	0.343	0.453	0.637	0.894	0.995
0.05	0.138	0.233	0.329	0.508	0.816	0.987
0.025	0.084	0.155	0.233	0.393	0.725	0.970
0.01	0.043	0.088	0.142	0.270	0.597	0.934
	Мощность критерия Колмогорова					
0.15	0.294	0.421	0.531	0.700	0.915	0.995
0.1	0.225	0.342	0.450	0.628	0.879	0.992
0.05	0.141	0.237	0.332	0.508	0.806	0.981
0.025	0.087	0.160	0.239	0.401	0.723	0.964
0.01	0.045	0.093	0.150	0.282	0.606	0.930

Таблица 4

Мощность критерия согласия χ^2 Пирсона при проверке простой гипотезы H_0 (распределение Вейбулла с параметрами 2, 2, 0) относительно гипотезы H_1 (гамма-распределение с параметрами 3.12154, 0.557706, 0) в зависимости от способа группирования и числа интервалов

α	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 9$ и АОГ					
0.15	0.427	0.608	0.748	0.910	0.996	1.000
0.1	0.353	0.534	0.684	0.874	0.993	1.000
0.05	0.261	0.429	0.581	0.807	0.985	1.000
0.025	0.202	0.343	0.488	0.734	0.973	1.000
0.01	0.152	0.255	0.384	0.637	0.950	1.000
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 15$ и РВГ					
0.15	0.234	0.347	0.446	0.637	0.908	0.998
0.1	0.174	0.266	0.361	0.549	0.867	0.996
0.05	0.097	0.164	0.245	0.417	0.785	0.9907
0.025	0.056	0.102	0.161	0.311	0.695	0.979
0.01	0.026	0.054	0.092	0.203	0.574	0.958
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 9$ и РВГ					
0.15	0.240	0.344	0.440	0.616	0.883	0.995
0.1	0.177	0.262	0.354	0.528	0.835	0.990
0.05	0.100	0.164	0.238	0.399	0.743	0.979
0.025	0.057	0.100	0.157	0.294	0.646	0.960
0.01	0.026	0.053	0.090	0.191	0.520	0.924

Заключение. Таким образом, на основании результатов анализа мощности рассматриваемых критериев относительно ряда пар относительно близких конкурирующих гипотез для случая проверки простых гипотез критерии можно упорядочить по мощности следующим образом:

$$\chi^2 \text{ Пирсона (АОГ)} \succ \Omega^2 \text{ Андерсона — Дарлинга} \succ \omega^2 \text{ Мизеса} \succ= \text{Колмогорова.}$$

Такая шкала справедлива при использовании в критерии χ^2 Пирсона АОГ, при котором минимизируются потери в информации Фишера. При очень близких гипотезах возможна ситуация

$$\text{критерий Колмогорова } \succ \text{ критерий } \omega^2 \text{ Мизеса.}$$

Такое упорядочение не является жестким. Как видно из таблиц с приведенными значениями мощности, иногда критерий имеет преимущества по мощности при одних значениях α и n и уступает при других их значениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чибисов Д. М.* Об асимптотической мощности и эффективности критерия ω_n^2 // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138, № 2. С. 322–325.

2. *Чибисов Д. М.* Исследования мощности некоторых непараметрических критериев // Теория вероятностей и ее применения. 1962. Т. 7, № 3. С. 355–356.

3. *Чибисов Д. М.* Об асимптотической мощности критериев согласия при близких альтернативах // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9, № 3. С. 561–566.

4. *Чибисов Д. М.* К исследованию асимптотической мощности критериев согласия // Теория вероятностей и ее применения. 1965. Т. 10, № 3. С. 460–478.

5. *Kolmogoroff A. N.* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione // Giornale Ist. Ital. degli Attuari. 1933. V. 4, N 1. P. 83–91.

6. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.

7. *Большев Л. Н.* Асимптотические пирсоновские преобразования // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. 8, № 2. С. 129–155.

8. *Большев Л. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика: Избранные труды. М.: Наука, 1987.

9. *Kac M., Kiefer J., Wolfowitz J.* On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods // Ann. Math. Statist. 1955. V. 26. P. 189–211.

10. *Р 50.1.037-2002.* Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. 2. Непараметрические критерии. М.: Изд-во стандартов, 2002.

11. *Мартынов Г. В.* Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978.

12. *Pearson E. S., Hartley H. O.* Biometrica Tables for Statistics. V. 2. Cambridge: Univ. Press, 1972.

13. *Stephens M. A.* Use of Kolmogorov—Smirnov, Cramer—von Mises and related statistics without extensive table // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 1970. V. 32. P. 115–122.

14. *Stephens M. A.* EDF statistics for goodness of fit and some comparisons // J. Amer. Statist. Assoc. 1974. V. 69. P. 730–737.

15. *Chandra M., Singpurwalla N. D., Stephens M. A.* Kolmogorov statistics for test of fit for the extreme-value and Weibull distribution // J. Amer. Statist. Assoc. 1981. V. 76, N 375. P. 729–731.

16. *Тюрин Ю. Н.* О предельном распределении статистик Колмогорова — Смирнова для сложной гипотезы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 6. С. 1314–1343.

17. *Тюрин Ю. Н., Саввушкина Н. Е.* Критерии согласия для распределения Вейбулла — Гнеденко // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. 1984. № 3. С. 109–112.

18. *Тюрин Ю. Н.* Исследования по непараметрической статистике (непараметрические методы и линейная модель): Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1985. 33 с.

19. *Саввушкина Н. Е.* Критерий Колмогорова — Смирнова для логистического и гамма-распределения // Сб. тр. ВНИИ систем. исследований. 1990. № 8. С. 50–56.

20. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.* Прикладные аспекты использования критериев согласия в случае проверки сложных гипотез // Надежность и контроль качества. 1997. № 11. С. 3–17.

21. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.* О распределениях статистик непараметрических критериев согласия при оценивании по выборкам параметров наблюдаемых законов // Заводская лаборатория. 1998. Т. 64, № 3. С. 61–72.

22. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.* О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67, № 7. С. 62–71.

23. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.* Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез // Автометрия. 2001. № 2. С. 88–102.

24. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н., Французов А. В.* К применению непараметрических критериев согласия для проверки адекватности непараметрических моделей // Автометрия. 2002. № 2. С. 3–14.

25. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.* Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями Джонсона // Докл. АН ВШ. 2002. № 1(5). С. 65–74.

26. *Лемешко Б. Ю., Маклаков А. А.* Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями экспоненциального семейства // Автометрия. 2004. № 3. С. 3–20.

27. *Лемешко С. Б., Лемешко Б. Ю.* Распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке гипотез относительно бета-распределений // Докл. АН ВШ. 2007. № 2(9). С. 6–16.

28. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

29. *Birch M. W.* A new proof of the Pearson—Fisher theorem // Ann. Math. Statist. 1964. V. 35, N 2. P. 817–824.

30. *Лемешко Б. Ю., Чимитова Е. В.* Оптимальные L-оценки параметров сдвига и масштаба распределений по выборочным квантилям // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2004. Т. 70, № 1. С. 54–66.

31. *Chernoff H., Lehmann E. L.* The use of maximum likelihood estimates in χ^2 test for goodness of fit // Ann. Math. Statist. 1954. V. 25, N 3. P. 579–586.

32. *Чибисов Д. М.* Некоторые критерии типа хи-квадрат для непрерывных распределений // Теория вероятностей и ее применения. 1971. Т. 16, № 1. С. 3–20.

33. *Moore D. S.* A chi-square statistic with random sell boundaries // Ann. Math. Statist. 1971. V. 42, N 1. P. 147–156.

34. *Лемешко Б. Ю. Постовалов С. Н.* Прикладные аспекты использования критериев согласия в случае проверки сложных гипотез // Надежность и контроль качества. 1997. № 11. С. 3–17.

35. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.* О зависимости предельных распределений статистик χ^2 Пирсона и отношения правдоподобия от способа группирования данных // Заводская лаборатория. 1998. Т. 64, № 5. С. 56–63.

36. *Денисов В. И., Лемешко Б. Ю.* Оптимальное группирование при обработке экспериментальных данных // Измерительные информационные системы. Новосибирск, 1979. С. 5–14.

37. *Денисов В. И., Лемешко Б. Ю., Цой Е. Б.* Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов. В 2-х ч. Новосибирск: изд. Новосиб. гос. техн. ун-та, 1993.

38. *Лемешко Б. Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений — это обеспечение максимальной мощности критериев // Надежность и контроль качества. 1997. № 8. С. 3–14.

39. *Лемешко Б. Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия // Заводская лаборатория. 1998. Т. 64, № 1. С. 56–64.

40. *Р 50.1.033-2001.* Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. 1. Критерии типа хи-квадрат. М.: Изд-во стандартов. 2002.

41. *Design* of Experiments and Statistical Analysis for Grouped Observations / V. I. Denisov, K.-H. Eger, B. Yu. Lemeshko, E. B. Tsoy. Novosibirsk: NSTU Publ. House, 2004.

42. *Кендалл М., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973.

43. *Никулин М. С.* О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. 18, № 3. С. 675–676.

44. *Никулин М. С.* Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. 18, № 3. С. 583–591.

45. *Мирвалиев М., Никулин М. С.* Критерии согласия типа хи-квадрат // Заводская лаборатория. 1992. Т. 58, № 3. С. 52–58.

46. *Aguirre N., Nikulin M.* Chi-squared goodness-of-fit test for the family of logistic distributions // Kybernetika. 1994. V. 30. N 3. P. 214–222.

47. *Greenwood P. E., Nikulin M. S.* A Guide to Chi-Squared Testing. N. Y.: John Wiley & Sons, 1996.

48. *Rao K. C., Robson D. S.* A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family // Comm. Statist. 1974. V. 3. P. 1139–1153.

49. *Moore D. S., Spruill M. C.* Unified large-sample theory of general chi-squared statistics for tests of fit // Ann. Statist. 1975. V. 3. P. 599–616.

50. *Van der Vaart A. W.* Asymptotic Statistics. Cambridge: Univ. Press, 1998.

51. *Лемешко С. Б.* Распределения статистик критериев согласия типа хи-квадрат при малых выборках // Материалы 7 Междунар. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП-2006». Т. 6. Новосибирск, 2006. С. 78–82.

52. *Лемешко Б. Ю., Чимитова Е. В.* О выборе числа интервалов в критериях согласия типа χ^2 // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2003. Т. 69, № 1. С. 61–67.

Лемешко Борис Юрьевич
Лемешко Станислав Борисович
Постовалов Сергей Николаевич
Новосибирский государственный технический университет
пр. К. Маркса, 20, г. Новосибирск
E-mail: lemeshko@fpm.ami.nstu.ru;
skyer@mail.ru; Postovalov@ngs.ru

Статья поступила 26 ноября 2007 г.
Окончательный вариант 21 февраля 2008 г.