Сибирский журнал
индустриальной математики
Октябрь–декабрь, 2008. Том XI, № 4(36)

УДК 519.24

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ПРИ БЛИЗКИХ АЛЬТЕРНАТИВАХ. II. ПРОВЕРКА СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗ*)

Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов

В данной части работы методами статистического моделирования проведен анализ мощности ряда критериев согласия при проверке сложных гипотез. Приводятся оценки мощности критериев относительно некоторых близких конкурирующих гипотез. Полученные в совокупности результаты позволяют упорядочить критерии по мощности при проверке как простых, так и сложных гипотез.

Ключевые слова: критерий согласия, критерий Колмогорова, критерий омега-квадрат Крамера — Мизеса — Смирнова, критерий Андерсона — Дарлинга, критерий Пирсона, критерий Никулина, мощность критерия.

Введение. В настоящей статье, которая является завершением работы [1], представлены результаты исследований мощности ряда критериев согласия в случае проверки сложных гипотез. На тех же парах конкурирующих гипотез анализируется мощность критериев Колмогорова, Крамера — Мизеса — Смирнова, Андерсона — Дарлинга, χ^2 Пирсона, типа χ^2 Никулина.

При проверке сложной гипотезы вида H_0, имеющей вид $F(x) \in \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$, где Θ — область определения неизвестного параметра θ, рассматривается ситуация, когда оценка параметра $\hat{\theta}$ теоретического распределения вычисляется по той же самой выборке, по которой проверяется согласие.

Напомним, что в такой ситуации непараметрические критерии Колмогорова, Крамера — Мизеса — Смирнова, Андерсона — Дарлинга теряют свойство «свободы от распределения» и законы распределения статистик $G(S|H_0)$ критериев зависят: от вида наблюдаемого закона распределения $F(x,\theta)$, соответствующего проверяемой гипотезе H_0; от типа оцениваемого параметра и числа оцененных по выборке параметров; в некоторых ситуациях от конкретного значения параметра или параметров (например, в случае гамма- и бета-распределений); от используемого метода оценивания параметров. Распределение статистики критерия χ^2 Пирсона в случае оценивания неизвестного параметра θ по негруппированным данным также не является χ^2-распределением.

В работе при проверке сложных гипотез с использованием всех исследуемых критериев согласия для оценивания неизвестных параметров применялся метод максимального правдоподобия. В этом случае, с одной стороны, все критерии оказываются в равных условиях, а с другой — непараметрические критерии типа Колмогорова, ω^2 Крамера — Мизеса — Смирнова и Ω^2 Андерсона — Дарлинга при использовании оценок максимального правдоподобия (ОМП) имеют более высокую мощность по сравнению со случаем, когда оценки находятся в результате минимизации статистики соответствующего критерия [2, 3].

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00059-а).

Как и в [1], рассматриваются две пары конкурирующих гипотез. В первой паре проверяемой гипотезе H_0 соответствует нормальный закон с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_0\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}\right\},$$

а конкурирующей гипотезе H_1 — логистический с функцией плотности

$$f(x) = \frac{\pi}{\theta_0\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_1)}{\theta_0\sqrt{3}}\right\} \Big/ \left[1+\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_1)}{\theta_0\sqrt{3}}\right\}\right]^2$$

и параметрами $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 0$.

Во второй паре H_0 соответствует распределение Вейбулла с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_0(x-\theta_2)^{\theta_0-1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp\left\{-\left(\frac{x-\theta_2}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right\}$$

и параметром сдвига $\theta_2 = 0$, а H_1 — гамма-распределение с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1\Gamma(\theta_0)}\left(\frac{x-\theta_2}{\theta_1}\right)^{\theta_0-1} e^{-(x-\theta_2)/\theta_1}$$

и параметрами $\theta_0 = 3,12154$, $\theta_1 = 0,557706$, $\theta_2 = 0$.

В работе исследовалась мощность при проверке сложных гипотез H_0 против простой гипотезы H_1.

1. Мощность критериев в случае проверки сложных гипотез и альтернативы «нормальное распределение — логистическое». На рис. 1 приведены полученные в результате моделирования функции распределения статистики Колмогорова с поправкой Большева при проверке сложной гипотезы о согласии с нормальным законом с оцениванием параметров нормального закона методом максимального правдоподобия при конкурирующей гипотезе H_1, соответствующей логистическому закону. На рисунке представлены функция распределения $G(S_k|H_0)$ и функции $G_n(S_k|H_1)$ при объемах выборок $n = 20, 50, 100, 300, 500, 1000, 2000$ наблюдений. Как видим, при том же уровне значимости $\alpha = 0,1$ мощность критерия оказывается существенно выше, чем при проверке простой гипотезы [1], и составляет величины порядка 0,142 при $n = 20$; 0,181 при $n = 50$; 0,236 при $n = 100$; 0,351 при $n = 200$; 0,459 при $n = 300$; 0,646 при $n = 500$; 0,905 при $n = 1000$ и 0,997 при $n = 2000$. Это свидетельствует о том, что в случае проверки сложных гипотез те же законы могут различаться при средних объемах выборок.

На рис. 2 представлены распределения $G(S_\omega|H_0)$ и $G_n(S_\omega|H_1)$ статистики S_ω Крамера — Мизеса — Смирнова при проверке сложной гипотезы и тех же самых H_0 и H_1 с вычислением ОМП параметров нормального закона. Аналогичные распределения $G(S_\Omega|H_i)$ статистики S_Ω Андерсона — Дарлинга отражены на рис. 3.

На рис. 4 представлены распределения статистики Y_n^2 критерия Никулина при проверке сложной гипотезы и вычислении ОМП двух параметров нормального закона по негруппированным данным. Картина соответствует случаю использования асимптотически оптимального группирования (АОГ) при числе интервалов $k=9$.

Необходимо отметить, что распределения $G\left(Y_n^2|H_0\right)$ статистики Y_n^2 Никулина очень быстро сходятся к соответствующим χ^2_{k-1}-распределениям. Существенное отличие от χ^2_{k-1}-распределений наблюдается лишь при малых объемах выборок и относительно больших количествах интервалов. При малых объемах выборок на распределениях статистики проявляется эффект конечности числа интервалов.

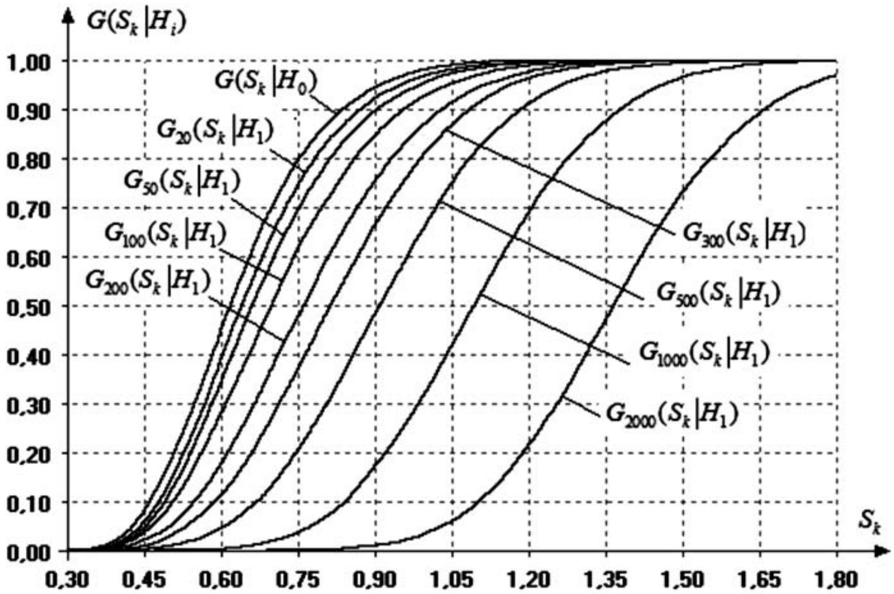

Рис. 1. Распределения статистики критерия Колмогорова $G(S_k|H_0)$ и $G_n(S_k|H_1)$ при проверке сложной гипотезы H_0 о согласии с нормальным законом в случае использования ОМП при конкурирующей гипотезе H_1, соответствующей логистическому закону

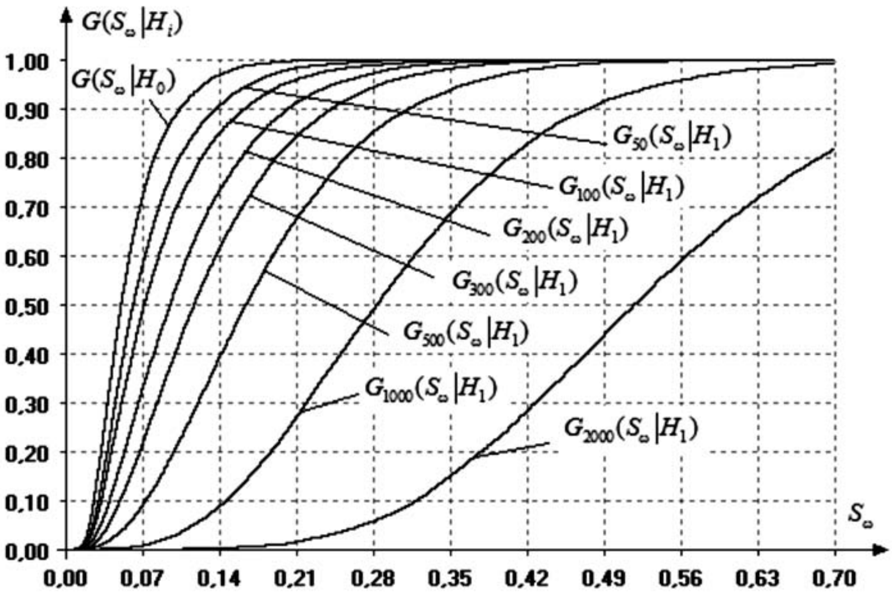

Рис. 2. Распределения статистики критерия ω^2 Крамера — Мизеса — Смирнова $G(S_\omega|H_0)$ и $G_n(S_\omega|H_1)$ при проверке сложной гипотезы H_0 о согласии с нормальным законом в случае использования ОМП при конкурирующей гипотезе H_1, соответствующей логистическому закону

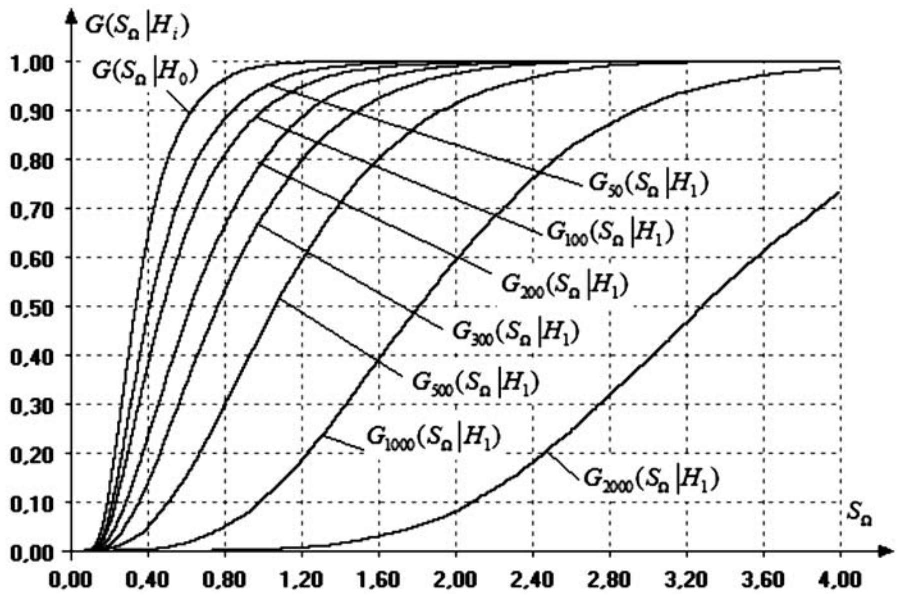

Рис. 3. Распределения статистики критерия Ω^2 Андерсона — Дарлинга $G(S_\Omega|H_0)$ и $G_n(S_\Omega|H_1)$ при проверке сложной гипотезы H_0 о согласии с нормальным законом в случае использования ОМП при конкурирующей гипотезе H_1, соответствующей логистическому закону

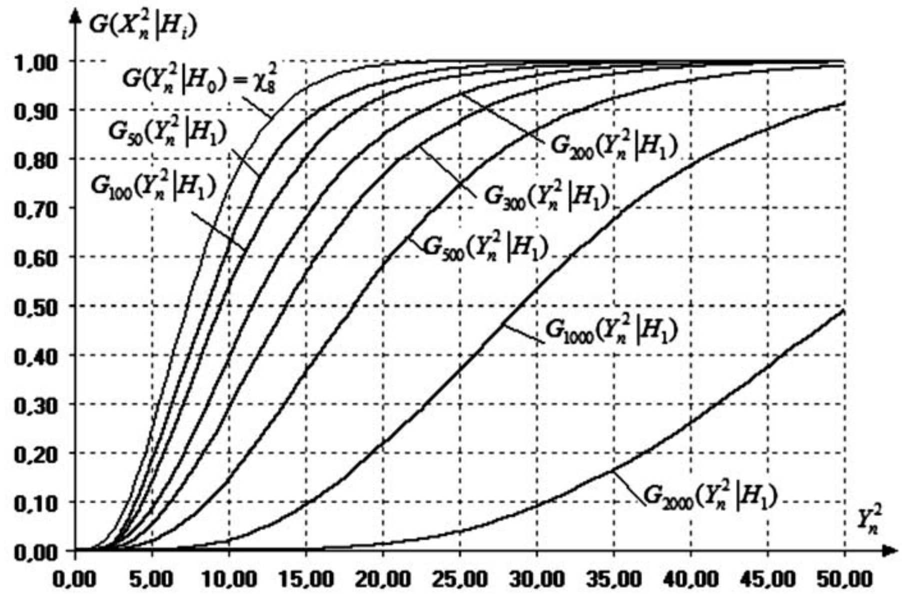

Рис. 4. Распределения статистики Y_n^2 Никулина $G\big(Y_n^2|H_0\big) = \chi_8^2$ и $G\big(Y_n^2|H_1\big)$ при проверке сложной гипотезы H_0 о согласии с нормальным законом при конкурирующей гипотезе H_1 в случае АОГ при $k = 9$ и вычислении ОМП по негруппированным данным

В качестве примера в табл. 1 приведены достигнутые уровни значимости при проверке согласия эмпирических распределений статистики Y_n^2 с χ^2_{k-1}-распределениями для $n = 100$ и $n = 500$, которые свидетельствуют об удовлетворительной степени близости распределений при $n = 100$ и высокой при $n = 500$. Проверка гипотез осуществлялась по выборкам статистик объемом $N = 10000$.

Таблица 1

Достигнутые уровни значимости при проверке согласия смоделированных распределений статистики Y_n^2 с χ^2_{k-1}-распределениями

Критерии согласия	$k=9$		$k=15$	
	$n=100$	$n=500$	$n=100$	$n=500$
χ^2 Пирсона	0.0180	0.9732	0.1905	0.2037
Колмогорова	0.1817	0.8951	0.4450	0.9480
ω^2 Мизеса	0.1334	0.9755	0.2943	0.8425
ω^2 Андерсона — Дарлинга	0.0948	0.9579	0.2974	0.7988

Вычисленные на основании результатов моделирования распределений статистик оценки мощности рассматриваемых критериев согласия для различных значений уровня значимости α при проверке сложной гипотезы H_0, соответствующей нормальному закону против гипотезы H_1, соответствующей логистическому закону с параметрами $(0,1)$, приведены в табл. 2. В таблице критерии также упорядочены по убыванию мощности. Следует отметить, что в некоторых случаях предпочтительность неочевидна, так как, обладая большей мощностью при одних уровнях значимости и одних объемах выборок, критерий может проигрывать при других значениях α и n.

В табл. 2 указана максимальная мощность критериев Никулина и χ^2 Пирсона (при заданных способах группирования). В табл. 3 представлены значения мощности данных критериев при других количествах интервалов при АОГ и равновероятном группировании (РВГ).

Подчеркнем, что, оценивая мощность при проверке сложных гипотез, мы опирались на смоделированные распределения статистик $G(S|H_0)$ при объеме выборок $n = 1000$. При таких больших n эмпирическое распределение статистики может считаться хорошей оценкой предельного закона. Таким образом поступали при анализе мощности непараметрических критериев согласия и критерия χ^2 Пирсона. При оценке мощности критерия со статистикой Никулина использовалось его известное предельное χ^2_{k-1}-распределение.

Распределения $G\big(X_n^2|H_0\big)$ статистики X_n^2 критерия Пирсона при проверке сложных гипотез и использовании ОМП по точечным (негруппированным) данным зависят от способа группирования и отличаются от χ^2_{k-r-1}-распределений. При малых значениях числа интервалов эти отличия значительны, а с ростом числа интервалов различие не имеет практического значения. На рис. 5 показаны распределения $G\big(X_n^2|H_0\big)$ статистики при количествах интервалов $k = 5, 9, 15$ при использовании АОГ и РВГ при оценивании двух параметров нормального закона и соответствующие χ^2_{k-r-1}-распределения. В случае АОГ распределение статистики $G\big(X_n^2|H_0\big)$ всегда ближе к соответствующему χ^2_{k-r-1}-распределению. Например, при $k = 15$ и использовании АОГ ни один из применяемых критериев уже не отклоняет гипотезу о согласии с χ^2_{12}-распределением эмпирического распределения статистики, соответствующего

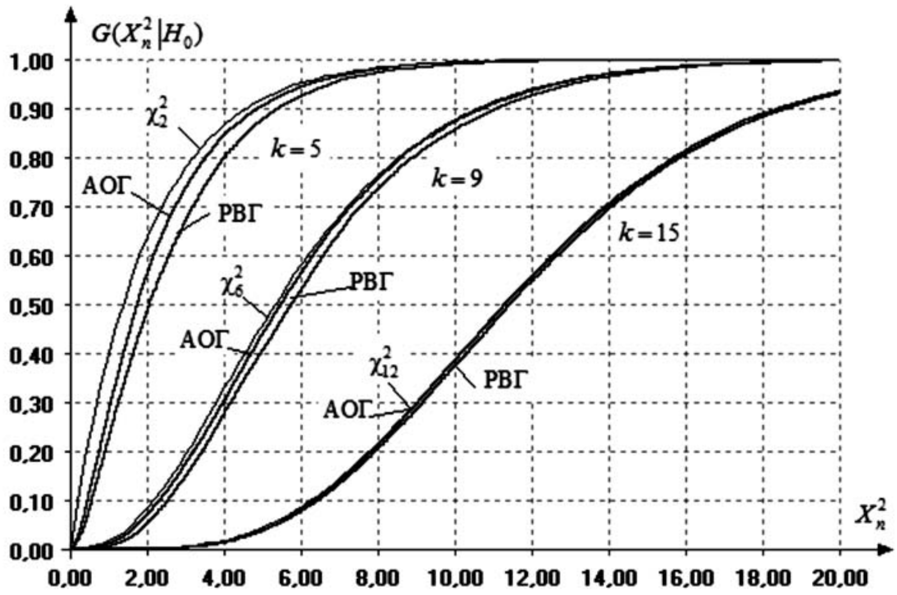

Рис. 5. Сходимость распределения статистики X_n^2 Пирсона к χ^2_{k-r-1}-распределениям при проверке сложных гипотез и использовании ОМП по негруппированным данным в зависимости от способа группирования

смоделированной выборке статистик объемом $N = 20000$. В то же время в случае РВГ аналогичная гипотеза отклоняется.

Модели распределений, являющиеся приближением предельных распределений $G(S|H_0)$ статистик критериев при проверке сложной гипотезы H_0 относительно нормального распределения, приводятся в табл. 4, а процентных точек — в табл. 5. В таблицы не включен критерий Никулина, предельными распределениями которого являются χ^2_{k-1}-распределения. В табл. 4 через $\gamma(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ обозначено гамма-распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)}(x-\theta_2)^{\theta_0-1}e^{-(x-\theta_2)/\theta_1},$$

через $Sl(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ — распределение *Sl*-Джонсона с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}\,(x-\theta_3)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0 + \theta_1 \ln\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right]^2\right\},$$

через $Su(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ — распределение *Su*-Джонсона с плотностью

$$f(x) =$$

$$\frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(x-\theta_3)^2+\theta_2^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0 + \theta_1 \ln\left\{\frac{x-\theta_3}{\theta_2} + \sqrt{\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^2+1}\right\}\right]^2\right\}.$$

Косвенно о точности моделирования эмпирических распределений статистик можно судить, например, по практическому совпадению полученных процентных точек для статистики ω^2 Крамера — Мизеса — Смирнова с соответствующими значениями этого распределения, табулированными для нормального закона в [4].

Таблица 2

Мощность критериев согласия
при проверке сложной гипотезы H_0 (нормальное распределение)
против конкурирующей гипотезы H_1 (логистическое)

α	$n=20$	$n=50$	$n=100$	$n=200$	$n=300$	$n=500$	$n=1000$	$n=2000$
	Мощность критерия Ω^2 Андерсона — Дарлинга							
0.15	0.222	0.297	0.400	0.575	0.708	0.873	0.989	1.000
0.1	0.164	0.230	0.324	0.496	0.636	0.828	0.981	1.000
0.05	0.098	0.149	0.224	0.377	0.519	0.741	0.963	1.000
0.025	0.060	0.096	0.152	0.282	0.414	0.649	0.935	0.999
0.01	0.031	0.054	0.091	0.186	0.297	0.525	0.885	0.998
	Мощность критерия типа χ^2 Никулина при $k=15$ и АОГ							
0.15	0.245	0.320	0.395	0.536	0.646	0.806	0.967	1.000
0.1	0.195	0.249	0.332	0.466	0.579	0.755	0.952	0.999
0.05	0.137	0.165	0.248	0.368	0.480	0.669	0.921	0.998
0.025	0.077	0.112	0.184	0.291	0.395	0.587	0.883	0.996
0.01	0.036	0.071	0.125	0.213	0.304	0.488	0.825	0.992
	Мощность критерия типа ω^2 Крамера — Мизеса — Смирнова							
0.15	0.210	0.273	0.366	0.529	0.659	0.836	0.980	1.000
0.1	0.153	0.208	0.291	0.447	0.582	0.781	0.968	1.000
0.05	0.090	0.130	0.194	0.329	0.458	0.678	0.939	0.999
0.025	0.053	0.082	0.128	0.237	0.353	0.573	0.897	0.998
0.01	0.027	0.044	0.074	0.150	0.243	0.445	0.825	0.994
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k=15$ и АОГ							
0.15	0.243	0.295	0.342	0.467	0.579	0.751	0.950	0.999
0.1	0.194	0.220	0.280	0.393	0.502	0.688	0.928	0.998
0.05	0.140	0.133	0.199	0.291	0.391	0.583	0.882	0.996
0.025	0.081	0.080	0.137	0.214	0.303	0.486	0.827	0.992
0.01	0.036	0.043	0.079	0.139	0.213	0.376	0.745	0.984
	Мощность критерия Колмогорова							
0.15	0.200	0.246	0.313	0.440	0.554	0.732	0.941	0.999
0.1	0.142	0.181	0.236	0.351	0.459	0.646	0.905	0.997
0.05	0.080	0.105	0.143	0.230	0.322	0.502	0.823	0.990
0.025	0.045	0.061	0.086	0.149	0.219	0.376	0.721	0.975
0.01	0.021	0.029	0.043	0.081	0.127	0.244	0.575	0.938

Таблица 3

Мощность критериев согласия Никулина и χ^2 Пирсона
при проверке сложной гипотезы H_0 (нормальное распределение)
против конкурирующей гипотезы H_1 (логистическое)
в зависимости от способа группирования и числа интервалов

α	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
	Мощность критерия типа χ^2 Никулина при $k = 9$ и АОГ							
0.15	0.203	0.269	0.339	0.480	0.599	0.774	0.958	0.999
0.1	0.144	0.204	0.271	0.406	0.525	0.714	0.940	0.999
0.05	0.080	0.129	0.186	0.304	0.417	0.617	0.901	0.997
0.025	0.046	0.084	0.129	0.227	0.329	0.525	0.854	0.994
0.01	0.023	0.049	0.081	0.155	0.239	0.419	0.784	0.988
	Мощность критерия типа χ^2 Никулина при $k = 9$ и РВГ							
0.15	0.200	0.258	0.333	0.477	0.600	0.782	0.964	1.0008
0.1	0.143	0.195	0.262	0.399	0.523	0.722	0.947	0.999
0.05	0.081	0.121	0.175	0.292	0.410	0.621	0.910	0.998
0.025	0.047	0.076	0.117	0.213	0.318	0.525	0.865	0.996
0.01	0.023	0.042	0.070	0.140	0.225	0.415	0.796	0.991
	Мощность критерия типа χ^2 Никулина при $k = 15$ и РВГ							
0.15	0.197	0.263	0.328	0.465	0.584	0.765	0.959	0.999
0.1	0.141	0.198	0.259	0.389	0.508	0.705	0.940	0.999
0.05	0.081	0.126	0.174	0.286	0.399	0.604	0.901	0.998
0.025	0.048	0.080	0.119	0.211	0.311	0.512	0.855	0.995
0.01	0.024	0.045	0.072	0.140	0.222	0.404	0.785	0.990
	Мощность критерия типа χ^2 Никулина при $k = 7$ и РВГ							
0.15	0.199	0.256	0.332	0.476	0.598	0.780	0.962	0.999
0.1	0.145	0.193	0.260	0.397	0.522	0.719	0.944	0.999
0.05	0.082	0.120	0.172	0.290	0.407	0.616	0.905	0.997
0.025	0.047	0.075	0.114	0.210	0.314	0.520	0.858	0.995
0.01	0.023	0.041	0.066	0.136	0.219	0.406	0.785	0.989
	Мощность критерия типа χ^2 Никулина при $k = 7$ и АОГ							
0.15	0.189	0.250	0.320	0.457	0.573	0.751	0.948	0.999
0.1	0.136	0.187	0.249	0.380	0.497	0.688	0.926	0.998
0.05	0.077	0.115	0.164	0.276	0.386	0.584	0.880	0.995
0.025	0.042	0.072	0.110	0.201	0.298	0.490	0.826	0.991
0.01	0.018	0.040	0.066	0.133	0.210	0.382	0.746	0.982

Продолжение табл. 3

α	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 9$ и АОГ							
0.15	0.197	0.237	0.282	0.404	0.516	0.699	0.930	0.998
0.1	0.136	0.171	0.210	0.323	0.431	0.624	0.898	0.997
0.05	0.071	0.096	0.130	0.219	0.314	0.504	0.834	0.992
0.025	0.038	0.055	0.080	0.146	0.225	0.398	0.760	0.984
0.01	0.017	0.027	0.041	0.085	0.141	0.283	0.654	0.966
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 7$ и АОГ							
0.15	0.178	0.213	0.265	0.382	0.490	0.672	0.913	1.000
0.1	0.124	0.154	0.195	0.299	0.403	0.589	0.874	0.999
0.05	0.067	0.087	0.113	0.195	0.284	0.462	0.797	0.998
0.025	0.038	0.048	0.066	0.126	0.197	0.356	0.711	0.995
0.01	0.016	0.022	0.032	0.069	0.118	0.242	0.593	0.989
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 7$ и РВГ							
0.15	0.169	0.213	0.243	0.335	0.427	0.599	0.873	0.994
0.1	0.129	0.145	0.179	0.251	0.336	0.500	0.813	0.989
0.05	0.073	0.078	0.097	0.153	0.212	0.356	0.696	0.971
0.025	0.032	0.042	0.056	0.091	0.135	0.248	0.577	0.942
0.01	0.014	0.020	0.025	0.045	0.071	0.146	0.426	0.881
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 9$ и РВГ							
0.15	0.171	0.198	0.227	0.309	0.390	0.541	0.828	0.989
0.1	0.127	0.142	0.167	0.232	0.296	0.445	0.757	0.979
0.05	0.068	0.070	0.092	0.136	0.187	0.309	0.629	0.951
0.025	0.037	0.038	0.049	0.079	0.187	0.208	0.502	0.908
0.01	0.013	0.018	0.022	0.039	0.060	0.120	0.358	0.828
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 15$ и РВГ							
0.15	0.144	0.179	0.212	0.267	0.331	0.459	0.736	0.967
0.1	0.097	0.134	0.151	0.197	0.252	0.367	0.653	0.944
0.05	0.064	0.072	0.077	0.116	0.153	0.245	0.517	0.893
0.025	0.028	0.038	0.044	0.065	0.091	0.161	0.396	0.825
0.01	0.012	0.016	0.019	0.031	0.046	0.089	0.268	0.717

Таблица 4

Модели распределений статистик критериев при проверке сложных гипотез о согласии с нормальным распределением и одновременном оценивании двух параметров методом максимального правдоподобия

Критерии согласия	Модель распределения статистик критериев
Ω^2 Андерсона — Дарлинга	$G(S_\Omega \vert H_0) = Su(-2.7377, 1.7186, 0.1023, 0.0980)$
ω^2 Крамера — Мизеса — Смирнова	$G(S_\omega \vert H_0) = Sl(-2.5084,\ 1.8289,\ 0.1953,\ 0.0018)$
Колмогорова	$G(S_K \vert H_0) = \gamma(6.9372,\ 0.0560,\ 0.2486)$
χ^2 Пирсона при $k = 9$ и АОГ	$G(X_n^2 \vert H_0) = \gamma(3.1121,\ 1.9551,\ 0.0422)$
χ^2 Пирсона при $k = 9$ и РВГ	$G(X_n^2 \vert H_0) = \gamma(3.2465,\ 1.9313,\ 0.0980)$
χ^2 Пирсона при $k = 15$ и АОГ	$G(X_n^2 \vert H_0) = \gamma(5.3451,\ 2.1221,\ 0.7022)$
χ^2 Пирсона при $k = 15$ и РВГ	$G(X_n^2 \vert H_0) = \gamma(5.7292,\ 2.9454,\ 0.5000)$

Таблица 5

Процентные точки распределений статистик критериев при проверке сложных гипотез о согласии с нормальным распределением и одновременном оценивании двух параметров методом максимального правдоподобия

Критерии согласия	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
Ω^2 Андерсона — Дарлинга	0.559	0.630	0.751	0.872	1.035
ω^2 Крамера — Мизеса — Смирнова	0.090	0.103	0.126	0.148	0.178
Колмогорова	0.789	0.836	0.909	0.976	1.056
χ^2 Пирсона при $k = 9$ и АОГ	9.567	10.760	12.698	14.559	16.936
χ^2 Пирсона при $k = 9$ и РВГ	9.836	11.042	12.986	14.858	17.216
χ^2 Пирсона при $k = 15$ и АОГ	16.989	18.549	21.035	23.390	26.369
χ^2 Пирсона при $k = 15$ и РВГ	17.210	18.770	21.230	23.540	26.420

В случае проверки сложных гипотез и объемов выборок $n = 20$ и $n = 50$ для всех исследуемых критериев распределения $G(S_{20}|H_0)$ и $G(S_{50}|H_0)$ существенно отличаются от «предельного» $G(S_n|H_0)$ при $n = 1000$ и от χ^2_{k-1}-распределения для статистики Никулина. Поэтому мощность оценивалась по смоделированным парам распределений вида $G(S_{20}|H_0)$, $G(S_{20}|H_1)$ и $G(S_{50}|H_0)$, $G(S_{50}|H_1)$.

Критерий Никулина применяется при проверке сложных гипотез. Для него при РВГ для этой пары гипотез мощность оказывается максимальной при некотором оптимальном числе интервалов k, зависящем от объема выборки n [5], аналогично при АОГ. Однако в последнем случае оптимальное число интервалов k смещено в область больших значений. В случае данной пары конкурирующих гипотез при больших значениях k предпочтительнее оказывается использование АОГ, а при меньших (см. при $k = 7$) — использование РВГ.

Мощность критериев согласия при малых объемах выборок n можно сравнить с мощностью критериев, построенных специально для проверки отклонения распределения от нормального закона: с мощностью критериев Шапиро — Уилка, Эппса — Палли и критерия Д'Агостино со статистикой z_2. Оценки мощности данных критериев нормальности, полученные в [6] и уточненные здесь при объемах моделируемых выборок статистик $N = 10^6$, приведены в табл. 6. Как видим, «специальные» критерии относительно рассматриваемой пары гипотез в среднем оказываются несколько мощнее.

Таблица 6

Мощность критериев проверки отклонения распределения от нормального закона (Шапиро — Уилка, Эппса — Палли и Д'Агостино со статистикой z_2) относительно конкурирующей гипотезы H_1 (логистический закон)

α	Нормальный закон					
	Шапиро — Уилка		Эппса — Палли		Д'Агостино z_2	
	$n = 20$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 50$
0.1	0.181	0.202	0.178	0.249	0.189	0.327
0.05	0.117	0.141	0.111	0.165	0.111	0.223
0.01	0.044	0.067	0.037	0.062	0.032	0.089

2. Мощности критериев при проверке сложных гипотез в случае пары «распределение Вейбулла — гамма-распределение». Вычисленные оценки мощности критериев для различных значений уровня значимости α при проверке сложной гипотезы H_0 о согласии эмпирического распределения с распределением Вейбулла, когда по выборке находились ОМП параметров θ_0 и θ_1 этого закона при известном параметре $\theta_2 = 0$, против конкурирующей гипотезы H_1, соответствующей гамма-распределению с параметрами $\theta_0 = 3,12154$, $\theta_1 = 0,557706$, $\theta_2 = 0$, приведены в табл. 7 и 8. Критерии в таблицах упорядочены по убыванию мощности.

Модели распределений, являющиеся приближением предельных распределений $G(S|H_0)$ статистик критериев при проверке сложной гипотезы H_0 относительно распределения Вейбулла, приводятся в табл. 9, а процентные точки в табл. 10. В таблицы не включен критерий Никулина, для которого предельное распределение известно. В табл. 9 через $\ln N(\theta_1, \theta_0)$ обозначено логарифмически нормальное распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{x\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \theta_1)^2/(2\theta_0^2)}.$$

В работе [7], опираясь в том числе на результаты наших более ранних исследований [8], делается излишне резкий вывод, суть которого заключается в том, что рекомендации по применению АОГ в критериях типа χ^2 едва ли можно считать состоятельными. В этой связи следует отметить, что и в [8], и в [9] мы подчеркивали безоговорочно положительный эффект АОГ в случае близких конкурирующих гипотез для критериев χ^2 Пирсона и отношения правдоподобия, но этого не говорилось относительно критерия Никулина. Более того, результаты и выводы, содержащиеся там, говорили о некотором преимуществе РВГ. Результаты данных исследований подчеркивают более сложный характер зависимости мощности критерия Никулина (критериев Рао — Робсон — Никулина) от числа интервалов и способа группирования и в некоторых случаях показывают положительный эффект от АОГ.

Т а б л и ц а 7

Мощность критериев согласия при проверке сложной гипотезы H_0 (распределение Вейбулла 2, 2, 0) относительно конкурирующей гипотезы H_1 (гамма-распределение с параметрами 3,12154, 0,557706, 0)

α	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
	Мощность критерия Ω^2 Андерсона — Дарлинга					
0.15	0.435	0.667	0.817	0.952	0.999	1.000
0.1	0.353	0.589	0.757	0.928	0.998	1.000
0.05	0.244	0.466	0.650	0.876	0.995	1.000
0.025	0.167	0.361	0.547	0.811	0.990	1.000
0.01	0.100	0.252	0.424	0.715	0.977	1.000
	Мощность критерия ω^2 Крамера — Мизеса — Смирнова					
0.15	0.396	0.603	0.750	0.913	0.996	1.000
0.1	0.316	0.520	0.679	0.875	0.993	1.000
0.05	0.212	0.394	0.560	0.797	0.984	1.000
0.025	0.143	0.295	0.452	0.712	0.968	1.000
0.01	0.082	0.196	0.330	0.593	0.936	1.000
	Мощность критерия χ^2 Никулина при $k = 9$ и АОГ					
0.15	0.324	0.511	0.665	0.869	0.993	1.000
0.1	0.246	0.423	0.584	0.818	0.987	1.000
0.05	0.153	0.299	0.454	0.720	0.973	1.000
0.025	0.096	0.209	0.347	0.619	0.951	1.000
0.01	0.051	0.129	0.238	0.492	0.909	0.999
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 9$ и АОГ					
0.15	0.347	0.525	0.678	0.868	0.992	1.000
0.1	0.273	0.439	0.596	0.818	0.986	1.000
0.05	0.172	0.311	0.463	0.719	0.970	1.000
0.025	0.104	0.218	0.352	0.617	0.946	1.000
0.01	0.053	0.133	0.237	0.483	0.898	0.999
	Мощность критерия Колмогорова					
0.15	0.340	0.510	0.646	0.830	0.981	1.000
0.1	0.262	0.420	0.558	0.762	0.965	1.000
0.05	0.164	0.293	0.420	0.640	0.925	0.999
0.025	0.101	0.200	0.306	0.519	0.867	0.997
0.01	0.052	0.115	0.193	0.375	0.763	0.988

Таблица 8

Мощность критериев согласия Никулина и χ^2 Пирсона
при проверке сложной гипотезы H_0 (распределение Вейбулла 2, 2, 0)
относительно конкурирующей гипотезы H_1
(гамма-распределение с параметрами 3,12154, 0,557706, 0)
в зависимости от способа группирования и числа интервалов

α	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
	Мощность критерия χ^2 Никулина при $k = 15$ и АОГ					
0.15	0.365	0.487	0.634	0.828	0.986	1.000
0.1	0.291	0.406	0.558	0.770	0.976	1.000
0.05	0.195	0.302	0.443	0.666	0.952	1.000
0.025	0.131	0.230	0.348	0.569	0.919	1.000
0.01	0.078	0.165	0.250	0.455	0.862	0.999
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 15$ и АОГ					
0.15	0.385	0.491	0.637	0.839	0.988	1.000
0.1	0.305	0.405	0.559	0.780	0.980	1.000
0.05	0.196	0.293	0.442	0.676	0.959	1.000
0.025	0.124	0.218	0.344	0.574	0.928	1.000
0.01	0.065	0.151	0.234	0.448	0.868	0.999
	Мощность критерия χ^2 Никулина при $k = 9$ и РВГ					
0.15	0.295	0.455	0.599	0.806	0.981	1.000
0.1	0.220	0.367	0.509	0.740	0.968	1.000
0.05	0.133	0.250	0.378	0.624	0.938	1.000
0.025	0.080	0.167	0.276	0.512	0.894	0.999
0.01	0.040	0.097	0.176	0.380	0.822	0.997
	Мощность критерия χ^2 Никулина при $k = 15$ и РВГ					
0.15	0.273	0.421	0.558	0.774	0.975	1.000
0.1	0.202	0.335	0.468	0.702	0.960	1.000
0.05	0.120	0.224	0.341	0.582	0.923	1.000
0.025	0.071	0.147	0.244	0.469	0.874	0.999
0.01	0.036	0.085	0.153	0.343	0.796	0.997
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 9$ и РВГ					
0.15	0.259	0.361	0.465	0.639	0.896	0.996
0.1	0.187	0.282	0.376	0.552	0.851	0.992
0.05	0.114	0.181	0.257	0.421	0.764	0.982
0.025	0.062	0.113	0.170	0.310	0.664	0.964
0.01	0.028	0.057	0.096	0.198	0.529	0.926

Продолжение табл. 8

α	$n=100$	$n=200$	$n=300$	$n=500$	$n=1000$	$n=2000$
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k=15$ и РВГ					
0.15	0.252	0.348	0.454	0.638	0.910	0.998
0.1	0.179	0.268	0.364	0.553	0.869	0.996
0.05	0.099	0.165	0.244	0.415	0.784	0.990
0.025	0.053	0.102	0.158	0.303	0.688	0.978
0.01	0.026	0.052	0.089	0.196	0.559	0.955

Таблица 9

Модели распределений статистик критериев при проверке сложных гипотез о согласии с распределением Вейбулла и одновременном оценивании параметров формы и масштаба методом максимального правдоподобия

Критерии согласия	Модель распределения статистик критериев
Ω^2 Андерсона — Дарлинга	$G(S_\Omega \vert H_0) = Sl(1.4612, 2.0543, 0.6704, 0.0165)$
ω^2 Крамера — Мизеса — Смирнова	$G(S_\omega \vert H_0) = LnN(-2.9747, 0.5320)$
Колмогорова	$G(S_K \vert H_0) = \gamma(7.2210, 0.0535, 0.245)$
χ^2 Пирсона при $k=9$ и АОГ	$G\big(X_n^2 \vert H_0\big) = \gamma(3.1809, 1.9248, 0)$
χ^2 Пирсона при $k=9$ и РВГ	$G\big(X_n^2 \vert H_0\big) = \gamma(3.3897, 1.8906, 0)$
χ^2 Пирсона при $k=15$ и АОГ	$G\big(X_n^2 \vert H_0\big) = \gamma(5.5355, 2.0817, 0.51)$
χ^2 Пирсона при $k=15$ и РВГ	$G\big(X_n^2 \vert H_0\big) = \gamma(5.3077, 2.1504, 0.86)$

Таблица 10

Процентные точки распределений статистик критериев при проверке сложных гипотез о согласии с распределением Вейбулла и одновременном оценивании параметров формы и масштаба методом максимального правдоподобия

Критерии согласия	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
Ω^2 Андерсона — Дарлинга	0.563	0.635	0.757	0.879	1.036
ω^2 Крамера — Мизеса — Смирнова	0.089	0.102	0.124	0.145	0.174
Колмогорова	0.780	0.824	0.894	0.957	1.036
χ^2 Пирсона при $k=9$ и АОГ	9.563	10.735	12.688	14.521	16.905
χ^2 Пирсона при $k=9$ и РВГ	9.890	11.096	13.004	14.912	17.378
χ^2 Пирсона при $k=15$ и АОГ	17.004	18.560	21.037	23.358	26.438
χ^2 Пирсона при $k=15$ и РВГ	17.270	18.800	21.290	23.630	26.480

Заключение. Объединяя выводы работы [1] с данными результатами, можно подвести следующие итоги. Для случая проверки простых гипотез рассмотренные критерии можно расположить по мощности следующим образом:

$$\chi^2 \text{ Пирсона (АОГ)} \succ \Omega^2 \text{ Андерсона — Дарлинга } \succ \omega^2 \text{ Мизеса} \succ \text{Колмогорова.}$$

Такая шкала справедлива при использовании в критерии χ^2 Пирсона АОГ, при котором минимизируются потери в информации Фишера. В случае близких конкурирующих гипотез преимущество в мощности критерия χ^2 Пирсона может быть существенным.

При проверке сложных гипотез порядок предпочтения оказывается существенно иным:

$$\Omega^2 \text{ Андерсона — Дарлинга } \succ \omega^2 \text{ Мизеса} \succ Y_n^2 \text{ (АОГ)} \succ \chi^2 \text{ Пирсона (АОГ)} \succ \text{Колмогорова.}$$

При очень близких гипотезах может быть:

$$\Omega^2 \text{ Андерсона — Дарлинга } \succ Y_n^2 \text{ (АОГ)} \succ \omega^2 \text{ Мизеса} \succ \chi^2 \text{ Пирсона (АОГ)} \succ \text{Колмогорова.}$$

Указанные выводы носят интегрированный характер. Такое упорядочение не является жестким. Иногда критерий имеет преимущество по мощности при одних значениях α и объемах выборок n и уступает при других значениях α и n.

Внимательный читатель заметит, что мощность непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез оказывается существенно выше мощности тех же критериев, которую они имеют при проверке простых (относительно тех же альтернатив). Это в случае использования ОМП. Но если оценки параметров находить в результате минимизации самих статистик критериев (находить MD-оценки), то никакого роста мощности по сравнению с проверкой простых гипотез нет [3].

Следует заметить, что мощность критерия χ^2 Пирсона при переходе от проверки простых гипотез к проверке сложных не возрастает. Не следует забывать, что мощность критериев типа χ^2 (Пирсона и Никулина) зависит не только от гипотез H_0, H_1 и объема выборок n, но при заданных гипотезах H_0 и H_1 и от способа группирования и числа интервалов. Число интервалов, при котором мощность критериев для пары H_0 и H_1 максимальна, зависит от этих гипотез и от способа группирования. Увеличение числа интервалов не всегда приводит к росту мощности критериев типа χ^2 [5].

При близких гипотезах H_0 и H_1 при использовании критерия χ^2 Пирсона выбор АОГ дает положительный эффект как при простых, так и при сложных гипотезах. Однако это не означает, что применение АОГ всегда гарантирует максимальную мощность данного критерия. При конкретных и не очень близких гипотезах оптимальным может оказаться некоторый другой способ группирования, который может быть найден в результате максимизации мощности критерия.

Вывод о безоговорочно положительном эффекте применения АОГ нельзя распространять на критерий Никулина: при одной и той же паре гипотез H_0 и H_1 с одним числом интервалов k критерий оказывается более мощным при АОГ, с другим k — более мощным при РВГ. Зависимость мощности от способа группирования оказывается более сложной и требует исследования.

В данной работе мы не рассматривали другие модифицированные критерии типа χ^2, в частности критерий Джапаридзе — Никулина [10, 11], относительно которого можно предположить, что он обладает мощностью того же порядка, что и критерий Никулина. Следует отметить, что интерес к модифицированным критериям типа χ^2 в последнее время возрастает [12]. Это связано не только с тем, что известны асимптотические распределения статистик критериев, но и с тем, что идеи, лежащие в основе построения статистик, позволяют строить соответствующие критерии для широкого круга задач, где применение других критериев невозможно [13, 14]. Кроме того, критерии типа χ^2 в случае необходимости всегда можно настроить так, чтобы они наилучшим образом различали заданную пару конкурирующих гипотез H_0 и H_1, подбирая соответствующим образом разбиение на интервалы и число интервалов.

Авторы выражают признательность Д. М. Чибисову, Ю. Н. Тюрину и М. С. Никулину за внимание к работе и ценные замечания, способствующие ее улучшению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б. Постовалов С. Н.* Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. I. Проверка простых гипотез // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11, № 2(34). С. 96–111.

2. *Р 50.1.037-2002.* Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. 2. Непараметрические критерии. М.: Изд-во стандартов, 2002.

3. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.* О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67, № 7. С. 62–71.

4. *Мартынов Г. В.* Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978.

5. *Лемешко Б. Ю., Чимитова Е. В.* О выборе числа интервалов в критериях согласия типа χ^2 // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2003. Т. 69, № 1. С. 61–67.

6. *Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б.* Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона // Метрология. 2005. № 2. С. 3–24.

7. *Воинов В. Г.* Об оптимальных свойствах критерия Рао — Робсон — Никулина // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2006. Т. 72, № 3. С. 65–70.

8. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н., Чимитова Е. В.* О распределениях статистики и мощности критерия типа χ^2 Никулина // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67, № 3. С. 52–58.

9. *Лемешко Б. Ю., Чимитова Е. В.* Об ошибках и неверных действиях, совершаемых при использовании критериев согласия типа χ^2 // Измерительная техника. 2002. № 6. С. 5–11.

10. *Джапаридзе К. О., Никулин М. С.* К вычислению статистик типа хи-квадрат // Проблемы теории вероятностных распределений. Т. 12. СПб.: Наука, 1992. С. 59–90.

11. *Dzhaparidze K. O., Nikulin M. S.* On the computation of chi-square-type statistics // J. Math. Sci. 1995. V. 75, № 5. P. 1910–1921.

12. *Voinov V., Alloyarova R., Pya N.* A modified chi-squared goodness-of-fit test for the three-parameter Weibull distribution and its applications in reliability // Mathematical Methods for Reliability, Survival Analysis and Quality of Life. London: Hermes, 2007. P. 193–206.

13. *Bagdonavicius V., Nikulin M.* Accelerated Life Models. Modeling and Statistical Analysis. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2002.

14. *Gerville-Reache L., Couallier V., Nikulin M.* Statistique des Essais Accélérés. London: Hermes, 2007.

Лемешко Борис Юрьевич
Лемешко Станислав Борисович
Постовалов Сергей Николаевич
Новосибирский государственный технический университет
пр. К. Маркса, 20, 630092 г. Новосибирск
lemeshko@fpm.ami.nstu.ru; skyer@mail.ru;
Postovalov@ngs.ru

Статья поступила 25 ноября 2007 г.
Окончательный вариант 21 февраля 2008 г.