УДК 123.456.789

О критериях отсутствия тренда в математическом ожидании

И. В. Веретельникова, Б. Ю. Лемешко[1]
Новосибирский государственный технический университет

Методами статистического моделирования исследованы распределения статистик множества параметрических и непараметрических критериев, предназначенных для проверки гипотез о случайности или об отсутствии тренда в математическом ожидании. Предложена и реализована процедура интерактивного моделирования распределений статистик критериев, что позволяет корректно применять соответствующие критерии в условиях нарушения стандартных предположений. Проведен сравнительный анализ мощности критериев относительно различных конкурирующих гипотез. Сделаны выводы о предпочтительности использования тех или иных критериев.

Ключевые слова: проверка гипотезы, статистическое моделирование, линейный тренд, периодический тренд, смешанный тренд, мощность критерия.

1. Введение

Для проверки гипотезы о случайности или об отсутствии тренда в математическом ожидании в разное время предложено множество параметрических и непараметрических критериев. Однако имеющиеся источники не позволяют судить о преимуществах тех или иных критериев. Существующие работы не содержат четких рекомендаций, очерчивающих область применения и предпосылки, выполнение которых обеспечивает корректность статистических выводов при использовании рассматриваемых критериев.

Основной предпосылкой, обеспечивающей корректное применение параметрических критериев, как правило, является предположение о нормальном законе распределения шума, что далеко не всегда выполняется на практике. Использование непараметрических критериев опирается на асимптотические распределения статистик этих критериев. При ограниченных объемах выборок распределения статистик параметрических и непараметрических критериев могут существенно отличаться от соответствующих предельных распределений статистик, используемых в процедуре проверки гипотезы. В случае непараметрических критериев проблема зачастую усугубляется из-за ярко выраженной дискретности статистики [1-4]. В таких ситуациях использование при проверке гипотезы предельного (асимптотического) распределения статистики вместо «истинного» распределения этой статистики может приводить к неверному выводу.

В данной работе методами статистического моделирования исследовались распределения статистик и мощность ряда статистических критериев, ориентированных на проверку гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании наблюдаемой последовательности случайных величин (результатов измерений). Рассмотрен ряд параметрических (автокорреляции, модифицированный автокорреляции, Дюффа–Роя, Морана, Люнга–Бокса, Вальда–Вольфовитца) и непараметрических (ранговый Вальда–Вольфовитца, инверсий, Бартелса,

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания (№ 2.541.2014/К).

Фостера–Стюарта, Кокса–Стюарта, Холлина, сериальный Вальда–Вольфовитца, кумулятивной суммы, знаково-ранговый, Рамачандрана–Ранганатана, числа серий знаков первых разностей) критериев.

2. Общие сведения о проверяемых статистических гипотезах

При проверке гипотезы об отсутствии тренда в математическом ожидании задача формулируется следующим образом. Предполагается, что наблюдается временной ряд значений $x_1, x_2, ..., x_n$ взаимно независимых случайных величин с математическими ожиданиями $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ и одинаковыми (но неизвестными) дисперсиями. Проверяется гипотеза H_0: $\mu_i = \mu$, $i = 1, 2, ..., n$, о том, что все выборочные значения принадлежат к одной генеральной совокупности со средним μ, против конкурирующей гипотезы о наличии тренда H_i: $|\mu_{i+1} - \mu_i| > 0$, $i = 1, 2, ..., n-1$.

Анализ мощности критериев проводился для ситуации принадлежности наблюдаемых случайных величин нормальному закону. Проверяемой гипотезе H_0 соответствует выполнение предположения о независимости наблюдаемых случайных величин (отсутствие тренда). В качестве конкурирующих гипотез рассматривались различные ситуации, соответствующие наличию тренда в дисперсии.

Наличие линейного тренда в наблюдаемом ряду случайных величин моделировалось в соответствии с соотношением

$$X_i = a \cdot t_i + \xi_i ,$$

где ξ_i представляют собой независимые случайные величины, распределённые по заданному закону (например, по стандартному нормальному закону), $t \in [0,1]$. Справедливой проверяемой гипотезе H_0 соответствует значение параметра $a = 0$.

Моменты отсчетов t_i вычислялись в соответствии с выражением $t_i = (i-1)\Delta t$, где шаг $\Delta t = 1/n$ связывался с объемом выборки n. Исследовалась мощность критериев относительно конкурирующих гипотез с линейным трендом, задаваемым значениями параметра $a = 0.5, 4$. Рассматриваемые конкурирующие гипотезы в дальнейшем обозначены как:

$$H_1: \ X_i = 0.5t_i + \xi_i ;$$

$$H_2: \ X_i = 4t_i + \xi_i .$$

Примеры реализации временных рядов при тренде со значениями параметра $a = 0.5$ и $a = 4$ при объеме выборки $n = 100$ приведены на рис. 1.

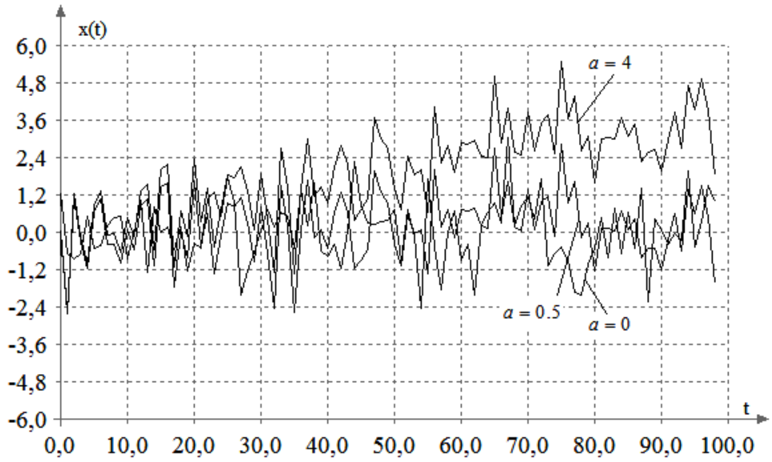

Рис. 1. Линейный тренд, соответствующий гипотезам H_0, H_1, H_2

В случае наличия периодического тренда элементы временного ряда могут моделироваться, например, в соответствии с выражением

$$X_i = b \cdot \sin(2k\pi t_i) + \xi_i$$

при $k = 1, 2, 3, \ldots$, а в случае смешанного тренда – в соответствии с

$$X_i = a \cdot t_i + b \cdot \sin(2k\pi t_i) + \xi_i$$

При этом отсутствие периодической составляющей тренда задаётся значением $b = 0$, а отсутствию линейной – $a = 0$.

При анализе мощности относительно периодического и смешанного тренда в математическом ожидании рассматривались конкурирующие гипотезы:

$$H_3: \; X_i = 0.5\sin(2\pi t_i) + \xi_i;$$
$$H_4: \; X_i = 0.5 t_i + 0.5\sin(2\pi t_i) + \xi_i.$$

Рассматриваемые в работе критерии сравнивались по мощности относительно конкурирующих гипотез $H_1 \div H_4$

3. Критерии обнаружения тренда в математическом ожидании

Критерий автокорреляции. Если выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайна, то значение каждого ее элемента не должно зависеть от величины предшествующего и последующего членов. Для проверки этой независимости используется статистика [5]

$$r_{1,n} = \frac{n\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + n x_1 x_n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

При справедливости проверяемой гипотезы статистика $r_{1,n}$ распределена асимптотически нормально с математическим ожиданием и дисперсией

$$E[r_{1,n}] = -\frac{1}{n-1}, \; D[r_{1,n}] = \frac{n(n-3)}{(n+1)(n-1)^2}.$$

Применяя критерий, обычно используют нормализованную статистику

$$r_{1,n}^{*} = \frac{r_{1,n} - E[r_{1,n}]}{\sqrt{D[r_{1,n}]}}. \tag{1}$$

Гипотеза о случайности (об отсутствии тренда) отклоняется при больших по модулю значениях статистики (1). Критерий автокорреляции относится к параметрическим критериям.

Нормализующими преобразованиями статистики этого критерия являются статистики Морана (2), Люнга-Бокса (3) и Дюффа-Роя (4) [5]:

$$r_{1,n}^{M} = (n-1)^{1/2} \frac{n r_{1,n} + 1}{n-2}; \tag{2}$$

$$r_{1,n}^{LB} = \left[\frac{n(n+2)}{n-1}\right]^{1/2} r_{1,n}; \tag{3}$$

$$r_{1,n}^{DR} = \left[\frac{n-1}{n(n-2)}\right]^{1/2} (n r_{1,n} + 1). \tag{4}$$

Проверяемая гипотеза отклоняется при больших и малых значениях статистик критериев.

Модификация критерия автокорреляции. В [6**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] рассматривается модификация критерия, статистика которого представляет собой сумму оценок коэффициентов корреляции первого и второго порядков:

$$r_{1,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \bar{x})(x_{i+1} - \bar{x}) + \sum_{i=1}^{n-2}(x_i - \bar{x})(x_{i+2} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

При справедливости H_0 распределение статистики $r_{1,2}$ асимптотически нормально с математическим ожиданием и дисперсией:

$$E[r_{1,2}] = -\frac{2n-3}{n(n-1)},$$

$$D[r_{1,2}] = \frac{2n^4 - 13n^3 + 15n^2 + 28n - 34}{n^2(n+1)(n-1)^2}.$$

Нормализованная статистика имеет вид

$$r_{1,2}^* = \frac{r_{1,2} - E[r_{1,2}]}{\sqrt{D[r_{1,2}]}}. \qquad (5)$$

Гипотеза H_0 отклоняется при больших по модулю значениях статистики.

Критерий Вальда–Вольфовитца. Статистика критерия Вальда–Вольфовитца [7] базируется на коэффициенте сериальной корреляции и имеет вид

$$R_1 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + x_n x_1.$$

Величина R_1 распределена асимптотически нормально с математическим ожиданием

$$E[R_1] = (S_1^2 - S_2)/(n-1)$$

и дисперсией

$$D[R_1] = \frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + \frac{(S_1^2 - S_2)^2}{(n-1)^2} - \frac{S_1^4 - 4S_1^2 S_2 + 4S_1 S_3 + S_2^2 - 2S_4}{(n-1)(n-2)},$$

где $S_r = x_1^r + ... + x_n^r$.

Асимптотическим распределением нормализованной статистики

$$R_1^* = \frac{R_1 - E[R_1]}{\sqrt{D[R_1]}} \qquad (6)$$

является стандартный нормальный закон $N(0,1)$.

Критерий Вальда-Вольфовитца – параметрический. Гипотеза H_0 отклоняется при больших по модулю значениях статистики.

Ранговый критерий Вальда–Вольфовитца. Пусть R_i – ранг измерения x_i в упорядоченном по возрастанию ряду значений $x_1, x_2, ..., x_n$. Статистика рангового критерия сериальной корреляции Вальда-Вольфовитца имеет вид [7]:

$$R = \sum_{i=1}^{n-1}\left(R_i - \frac{n+1}{2}\right)\left(R_{i+1} - \frac{n+1}{2}\right).$$

Распределение статистики R асимптотически нормально с параметрами

$$E[R] = 0, \; D[R] = \frac{n^2(n+1)(n-3)(5n+6)}{720}.$$

Гипотеза H_0 отклоняется при больших по модулю значениях статистики

$$R^* = \frac{R}{\sqrt{D[R]}}. \quad (7)$$

Критерий инверсий. Инверсия имеет место, если в выборке значений $x_1, x_2, ..., x_n$, записанных в порядке их появления, за некоторым значением x_i следует меньшее по величине, т.е. $x_i > x_j$, где $i < j \le n$. Статистикой критерия случайности является общее число инверсий I в выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ [8].

Гипотеза о случайности не отклоняется, если $I_{\alpha/2} < I < I_{1-\alpha/2}$. Возможное количество инверсий зависит от объема выборки. Математическое ожидание и дисперсия статистики I имеют вид $E[I] = n(n-1)/4$, $D[I] = (2n^3 + 3n^2 - 5n)/72$ [8]. Нормализованная статистика:

$$I^* = \frac{I - E[I]}{\sqrt{D[I]}} \quad (8)$$

приближенно описывается стандартным нормальным законом. Гипотеза H_0 отклоняется при больших по модулю значениях статистики $|I^*| \ge U_{1-\alpha/2}$.

Критерий инверсий непараметрический, и закон распределения случайных составляющих x_i не влияет на распределение его статистики.

Иногда рассматривают критерий со статистикой T, которая определяет число *обратных инверсий* ($x_i < x_j$, $i < j$), или критерий со статистикой $K = T - I$.

Критерий Кокса–Стюарта. Непараметрический критерий Кокса–Стюарта [9] может использоваться для проверки последовательности измерений на предмет наличия тренда и в среднем, и в дисперсии.

Для проверки гипотезы об отсутствии тренда в средних значениях по выборке объема n используется критерий со статистикой

$$S_1 = \sum_{i=1}^{[n/2]} (n - 2i + 1) h_{i,n-i+1},$$

где $h_{i,j} = 1$, если $x_i > x_j$, и $h_{i,j} = 0$, если $x_i \le x_j$ ($i < j$).

Нормализованная статистика

$$S_1^* = \frac{S_1 - E[S_1]}{\sqrt{D[S_1]}}, \quad (9)$$

где $E[S_1] = \frac{n^2}{8}$, $D[S_1] = \frac{n(n^2 - 1)}{24}$, при справедливости проверяемой гипотезы H_0 приближенно описывается стандартным нормальным законом.

Критерии Фостера–Стюарта. Данный непараметрический критерий может применяться для проверки гипотез об отсутствии тренда как в средних значениях, так и в дисперсиях. Для проверки гипотезы об отсутствии тренда в средних значениях используется критерий со статистикой [10] $d = \sum_{i=2}^{n} d_i$, где $d_i = u_i - l_i$; $u_i = 1$, если $x_i > x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_1$, иначе $u_i = 0$; $l_i = 1$, если $x_i < x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_1$, иначе $l_i = 0$; область значений $-(n-1) \le d \le n-1$.

При отсутствии тренда нормализованная статистика

$$t = \frac{d}{\hat{\sigma}_d}, \quad (10)$$

$$\hat{\sigma}_d = \sqrt{\mu} \approx \sqrt{2\ln n - 0,8456},$$

приближенно описываются распределением Стьюдента с $\nu = n$ степенями свободы. Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при большом по модулю значению статистки (10).

Критерий Бартелса. Пусть в последовательности n измерений R_i – ранг i-го наблюдения x_i. Бартелсом [11] был предложен ранговый критерий случайности ряда, основанный на статистике

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(R_i - R_{i+1})^2}{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2}.$$

Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших по модулю значениях статистики

$$B^* = \frac{B - E[B]}{\sqrt{D[B]}} = \frac{B-2}{2\sqrt{5/(5n+7)}}, \qquad (11)$$

которая при отсутствии тренда приближенно подчиняется стандартному нормальному закону.

Критерий Холлина. Предложенный Холлином знаково-ранговый критерий основан на статистике [12]

$$r = \frac{1}{k(n-1)}\sum_{i=2}^{n}\delta\left[(x_i - \tilde{x})(x_{i-1} - \tilde{x})\right]R_i R_{i-1}, \qquad (12)$$

где k – коэффициент, зависящий от объема выборки (рекомендуемые значения k приведены в табл. 1); $\tilde{x}$ – медиана вариационного ряда $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$; R_i – ранг величины $z_i = |x_i - \tilde{x}|$ в упорядоченном по возрастанию ряду значений $z_1 \le z_2 \le \ldots \le z_n$;

$$\delta(y) = \begin{cases} 1, & y > 0; \\ -1, & y < 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Таблица 1. Значения k для рангово-знакового критерия Холлина

n	5	10	20	50	100	200	400
k	10.11	36.95	140.62	851.62	3370	13407	53480

Ряд значений x_i признается случайным, если $|r| < r_\alpha$. Критические значения r_α можно найти, например, в [5].

Сериальный критерий Вальда-Вольфовитца. Под серией понимается последовательность элементов одной из нескольких выборок в упорядоченной по возрастанию объединенной выборке, ограниченная с обеих сторон элементами другой выборки (на границах последовательности – с одной стороны).

Пусть имеется выборка значений случайной величины x в порядке их появления; $\tilde{x}$ – выборочная медиана. Значения $x_i \ge \tilde{x}$ обозначим символом a, а значения $x_i < \tilde{x}$ – символом b. Тогда статистикой критерия [7] является N – общее число полученных серий элементов a и b.

Гипотеза о случайности ряда не отвергается с вероятностью α, если $n_1(\alpha) < N < n_2(\alpha)$, в противном случае она отклоняется в пользу альтернативы о неслучайности ряда. Критические значения $n_1(\alpha)$ и $n_2(\alpha)$ можно найти в [5].

Нормализованная статистика имеет вид

$$N_S^* = \frac{N_s - (2n_a n_b / (n_a + n_b) + 1)}{\sqrt{2n_a n_b(2n_a n_b - n_a - n_b) / ((n_a + n_b)^2 (n_a + n_b - 1))}},$$

где n_a и n_b – соответственно количества элементов a и b в исходной последовательности. В качестве приближенного распределения статистики используется стандартный нормальный закон. Проверяемая гипотеза отклоняется с уровнем значимости α, если $\left|N_s^*\right| > u_{1-\alpha/2}$.

Критерий Рамачандрана–Ранганатана. Данный непараметрический критерий учитывает не только количество, но и длины серий (число элементов в сериях). Статистика критерия [5] имеет вид

$$RR = \sum_j j^2 n_j \ ,$$

где j – длина серии, n – объем выборки, n_j – количество серий длины j.

Гипотеза о случайности отвергается при больших значениях статистики RR.

Критерий кумулятивной суммы. Данный непараметрический критерий проверки отсутствия тренда основан на сумме [13, 14]

$$V = \sum_{i=0}^{n} \delta(X_i - \tilde{X}), \tag{13}$$

где $\tilde{X}$ - выборочная медиана и $\delta(z) = 1$, если $z \ge 0$, иначе $\delta(z) = -1$. Оценка $\tilde{X}$ находится по вариационному ряду $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$, соответствующему исходной выборке $X_1, X_2, ..., X_n$: при n четном $\tilde{X} = (x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)})/2$; при n нечетном $\tilde{X} = x_{((n-1)/2+1)}$.

Статистикой критерия CS является число переходов через ноль суммы V (13). Критерий кумулятивной суммы является двусторонним: проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, если $CS_{\alpha/2} \le CS \le CS_{1-\alpha/2}$.

Ранговый критерий Дюффа–Роя. В [15] предложен непараметрический аналог критерия автокорреляции, статистика которого имеет вид:

$$r_1 = \sum_{i=1}^{n-1}\left(R_i - \frac{n+1}{2}\right)\left(R_{i+1} - \frac{n+1}{2}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \frac{n+1}{2}\right)^2 , \tag{14}$$

Распределение статистики (14) асимптотически нормально с математическим ожиданием и дисперсией

$$E[r_1] = -\frac{1}{n},\ D[r_1] = \frac{5n^3 - 19n^2 + 10n + 16}{5n^2(n-1)^2} .$$

Гипотеза о случайности (об отсутствии тренда) отклоняется при больших по модулю значениях статистики

$$r_1^* = \frac{r_1 - E[r_1]}{\sqrt{D[r_1]}} .$$

Критерий числа серий знаков первых разностей. Для выборки $X_1, X_2, ..., X_n$ вычисляются $n-1$ значений вида [16]

$$z_i = \begin{cases} -1, & X_{i+1} < X_i; \\ 1, & X_{i+1} > X_i; \\ 0, & X_{i+1} = X_i. \end{cases}$$

В ряду значений z_i фиксируется количество серий S, которое и является статистикой рассматриваемого критерия.

Гипотеза случайности ряда не отклоняется при $S_{\alpha/2} < S < S_{1-\alpha/2}$. Таблица критических значений для статистики S доступна в [5]. При $n > 30$ распределение статистики S удовлетворительно аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием и дисперсией:

$$E[S] = \frac{2n-1}{3}, \quad D[S] = \frac{16n-29}{90}.$$

Нормализованная статистика имеет вид (15)

$$S^* = \frac{S - E[S]}{\sqrt{D[S]}}, \tag{15}$$

приближенным распределением которой при справедливости проверяемой гипотезы о случайности (об отсутствии тренда) является стандартный нормальный закон. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших по модулю значениях S^*.

4. Сравнительный анализ мощности критериев

В процессе исследования распределений статистик и оценки мощности рассматриваемого множества критериев, ориентированных на проверку гипотезы об отсутствии тренда в математическом ожидании, были зафиксированы некоторые особенности, которые могут влиять на формирование выводов при использовании соответствующих критериев. Отмеченные в ходе исследований достоинства и недостатки соответствующих критериев кратко сформулированы в табл. 2, в которой анализируемые критерии упорядочены по убыванию мощности.

Таблица 2. Основные достоинства и недостатки критериев, применяемых при проверке гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании

№ п/п	Критерий	Достоинства	Недостатки
1	Инверсий	Высокая мощность по отношению к линейному тренду. При $n \geq 30$ дискретностью нормализованных статистик можно пренебречь.	При $n < 30$ необходимо учитывать дискретность нормализованных статистик.
2	Обратных инверсий		
3	К-инверсий		
4	Кокса–Стюарта	Мощность выше среднего. При $n \geq 40$ дискретностью нормализованной статистики можно пренебречь.	При $n < 40$ необходимо учитывать дискретность нормализованной статистики.
5	Модификация критерия автокорреляции	Относительно неплохая мощность.	Отличием распределения нормализованной статистики от стандартного нормального закона можно пренебречь лишь при $n > 200$.
6	Рамачандрана–Ранганатана	Относительно неплохая мощность.	Сильная зависимость распределения статистики от n. Необходимость использования таблицы критических значений.
7	Дюффа–Роя	При $n > 17$ отличием дискретного распределения нормализованной статистики от стандартного нормального закона можно пренебречь.	Невысокая мощность критерия.

Продолжение таблицы 2.

№ п/п	Критерий	Достоинства	Недостатки
8	Автокорреляции	Отклонением распределения нормализованной статистики от стандартного нормального закона можно пренебречь при $n > 30$.	Невысокая мощность критерия.
9	Морана		Невысокая мощность критерия. Отклонением распределения статистики от стандартного нормального закона можно пренебречь лишь при $n > 50$.
10	Люнга–Бокса		Невысокая мощность критерия. Распределение статистики очень медленно сходится к стандартному нормальному закону.
11	Вальда–Вольфовица	При объёмах выборок $n > 20$ отклонением распределения нормализованной статистики от стандартного нормального закона можно пренебречь.	Невысокая мощность критерия.
12	Холлина	Средняя мощность.	Распределения статистики зависят от n. Критерий непараметрический, но распределение статистики реагирует на асимметричность наблюдаемого закона.
13	Ранговый Вальда–Вольфовица	При $n > 10$ в качестве распределения предложенной модификации нормализованной статистики можно использовать стандартный нормальный закон.	По мощности несколько уступает критериям Дюффа–Роя и Вальда–Вольфовица. Эквивалентен ранговому критерию Дюффа–Роя.
14	Ранговый Дюффа–Роя	Распределение статистики при $n > 17$ хорошо аппроксимируется стандартным законом. Дискретностью распределения статистики можно пренебречь при $n > 10$.	По мощности несколько уступает критериям Дюффа–Роя и Вальда–Вольфовица. Эквивалентен ранговому критерию Вальда–Вольфовица.
15	Бартелса	При $n > 10$ отличием дискретного распределения нормализованной статистики от стандартного нормального закона можно пренебречь	Невысокая мощность критерия.
16	Фостера–Стюарта		Высокая дискретность распределения статистики, которая сохраняется при больших n. Использование асимптотического t_n-распределения Стьюдента для оценки p-value приводит к большим погрешностям. Мощность ниже среднего относительно линейного тренда и низкая относительно нелинейного.
17	Кумулятивной суммы	Хорошая мощность относительно линейного тренда.	Дискретность распределения статистики и зависимость его от n. Очень низкая мощность относительно нелинейного тренда.

Окончание таблицы 2.

№ п/п	Критерий	Достоинства	Недостатки
18	Сериальный Вальда–Вольфовица		Долго сохраняется дискретность распределения нормализованной статистики. Низкая мощность.
19	Числа серий знаков первых разностей		Дискретность распределения нормализованной статистики даже при больших объёмах выборок. Очень низкая мощность.

Методами статистического моделирования (для вероятностей ошибок первого рода $\alpha = 0.15,\ 0.1,\ 0.05,\ 0.01$) были получены оценки мощности рассмотренных критериев относительно конкурирующих гипотез, соответствующих наличию линейного (гипотезы H_1, H_2), периодического (H_3) и смешанного (H_4) тренда в математическом ожидании.

При близкой конкурирующей гипотезе H_1 наибольшую мощность показали критерии инверсий и Кокса-Стюарта. Остальные критерии плохо различают нулевую гипотезу и альтернативу.

В таблице 3 представлены оценки мощности критериев только при уровне значимости $\alpha = 0.1$ и объеме выборок n=100. В таблице критерии расположены в порядке убывания мощности $1-\beta$ относительно гипотезы H_1.

Таблица 3. Оценки мощности критериев проверки отсутствия (линейного) тренда в математическом ожидании относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3, H_4 (n=100, $\alpha = 0.1$)

№ п/п	Критерий	$1-\beta$			
		H_1	H_2	H_3	H_4
1	Критерий обратных инверсий	0.403	1.000	0.837	0.343
2	Критерий К-инверсий	0.403	1.000	0.835	0.340
3	Критерий инверсий	0.401	1.000	0.835	0.340
4	Кокса–Стюарта	0.308	1.000	0.686	0.263
5	Рамачандрана–Ранганатана	0.139	0.984	0.344	0.282
6	Модификация критерия автокорреляции	0.125	1.000	0.463	0.245
7	кумулятивной суммы	0.124	1.000	0.081	0.032
8	Фостера–Стюарта	0.117	0.798	0.086	0.105
9	Холлина	0.116	1.000	0.313	0.177
10	Автокорреляции	0.113	1.000	0.320	0.179
11	Морана	0.113	1.000	0.320	0.179
12	Люнга–Бокса	0.113	1.000	0.320	0.179
13	Дюффа–Роя	0.113	1.000	0.320	0.179
14	Вальда–Вольфовица	0.113	1.000	0.320	0.179
15	Ранговый критерий Вальда–Вольфовица	0.112	1.000	0.314	0.177
16	Ранговый критерий Дюффа–Роя	0.112	1.000	0.314	0.177
17	Бартелса	0.112	1.000	0.311	0.176
18	Сериальный критерий Вальда–Вольфовица	0.109	0.997	0.203	0.138
19	числа серий знаков первых разностей	0.100	0.098	0.100	0.098

5. Заключение

Методами статистического моделирования исследованы распределения статистик множества параметрических и непараметрических критериев случайности и отсутствия тренда в математическом ожидании. Проведен сравнительный анализ мощности критериев относительно некоторых конкурирующих гипотез, что позволяет судить о предпочтительности применения тех или других критериев. Отмечены достоинства и недостатки отдельных критериев.

В рамках развиваемой программной системы ISW реализован интерактивный режим исследования распределений статистик, позволяющий оценивать достигнутый уровень значимости p_{value} в ситуации нарушения стандартных предположений или в случае неизвестного распределения статистики, задаваемого лишь таблицей процентных точек. Это делает формируемый статистический вывод о результатах проверки гипотезы более информативным и более обоснованным.

Литература

1. Лемешко Б.Ю., Комиссарова А.С., Щеглов А.Е. Применение некоторых критериев проверки гипотез случайности и отсутствия тренда // Метрология. – 2010. – № 12. – С. 3-25.
2. Лемешко Б.Ю., Комиссарова А.С., Щеглов А.Е. Свойства и мощность некоторых критериев случайности и отсутствия тренда // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 1(46). – С. 53-66.
3. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. Аналитический обзор критериев проверки случайности и отсутствия тренда // Труды XII международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения” АПЭП-2014. Т.6, Новосибирск, 2014. – С.16-23.
4. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. О критериях проверки отсутствия тренда в характеристиках рассеяния // Материалы Российской НТК “Обработка информации и математическое моделирование”, Новосибирск. 2015. – С. 42-53.
5. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.
6. Knoke J.D. Testing for randomness against autocorrelation: The parametric case // Biometrika. 1975. – V.62. – P. 571-575.
7. Wald A., Wolfowitz J. On a test whether two samples are from the same population / A. Wald, J. Wolfowitz // Ann. Math Statist. 1940. Vol. 11. – P. 147-162.
8. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1973.
9. Cox D.R., Stuart A. Quick sign tests for trend in location and dispersion // Biometrika. 1955. – V.42. – P.80-95.
10. Foster F.G., Stuart A. Distribution-free tests in time series dated on the breaking of records // JRSS. 1954. – V. B16, №1. – P.1-22.
11. Bartels R. The rank version of von Neumann’s ratio test for randomness // JASA. 1982. V. 77, №377. P. 40-46.
12. Hollin M., Laforet A., Merald G. Distribution-free tests against dependence: signed or unsigned ranks? // J. of Stat. Planning and Inference. 1990. V. 24. – P. 151-165.
13. Mc Gielchrist C.A., Woodyer K.D. Note on a distribution-free CISIM technique // Technometrics. 1975. V. 17, №3. – P. 321-325.
14. Woodward R.H., Goldsmith P.L. Cumulative sum techniques. I.C.I. Monograph. №3, Oliver and Boyd, 1964.
15. Dufor J.–M., Roy R. Some robust exact results on sample for randomness // J. of Econometrics. 1985. – V. 29. – P. 257-273.
16. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. – М.: ИЛ, 1956.

Статья поступила в редакцию 28.02.2016;

Лемешко Борис Юрьевич
Д.т.н., профессор, г.н.с. кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20), e-mail: Lemeshko@ami.nstu.ru

Веретельникова Ирина Викторовна
Аспирантка кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20), e-mail: ira-veterok@mail.ru.

About the trend tests in the mathematical expectation

I.V. Veretelnikova, B. Yu. Lemeshko

Novosibirsk State Technical University

Distributions of various parametric and nonparametric tests are studied using methods of statistical modeling. Such tests are designed to test hypotheses for randomness or absence of a trend in mathematical expectation. Procedure of interactive simulation of distributions of the test statistics is proposed and implemented. Such procedure allows valid usage of corresponding tests in case of violation of standard assumptions. The comparative analysis of the power of the tests against different competing hypotheses is shown. Preferences for using different criteria are given.

Keywords: checking a hypothesis, statistical modeling, linear trend, periodic trend, mixed trend, power of the test.