Материалы X международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения”
АПЭП-2010. Т.6, Новосибирск, 2010. – С.13-17.

Исследование распределений статистик критериев тренда и случайности

Александра С. Беркович[1], Борис Ю. Лемешко[2], Алексей Е. Щеглов[3]
[1]Новосибирский Государственный Технический Университет, Новосибирск, Россия
sandra.berkovich@gmail.com
[2]Новосибирский Государственный Технический Университет, Новосибирск, Россия
lemeshko@fpm.ami.nstu.ru
[3]Новосибирский Государственный Технический Университет, Новосибирск, Россия
tleha@ngs.ru

***Аннотация* – Проведен сравнительный анализ мощности критериев тренда и случайности (Фостера-Стюарта, Кокса-Стюарта, автокорреляции, Вальда-Вольфовитца, Бартелса). Исследованы распределения статистик критериев при различных объемах выборки и различных вероятностных законах.**

***Ключевые слова* – критерий Фостера-Стюарта, критерий Кокса-Стюарта, критерий автокорреляции, критерий Вальда-Вольфовитца, критерий Бартелса.**

I. ВВЕДЕНИЕ

Критерии тренда и случайности предназначены для проверки гипотез о случайности расположения полученных выборочных данных, т.е. отсутствия взаимосвязи между значениями наблюдаемой случайной величины и их номерами в выборочной последовательности.

Наиболее часто критерии тренда находят применение при статистическом контроле и предупредительном регулировании технологических процессов в промышленности, позволяя заранее статистически обоснованно выявить намечающуюся тенденцию ухудшения качества продукции. Также данная группа критериев имеет большое практическое значение для медицины. Наличие тренда в исследуемом ряду данных о заболеваниях является объективным критерием оценки надвигающейся эпидемии и темпов ее роста. Количество возможных ситуаций, в которых выявление тренда дает практически полезную информацию, чрезвычайно велико, и каждый инженер или исследователь повседневно встречается с необходимостью использовать критерии тренда и случайности в своей работе.

Следует отметить, что одной из основных предпосылок применения многих критериев данного класса является предположение о принадлежности анализируемых данных нормальному закону. Тем не менее, на практике такое предположение достаточно часто нарушается. Для многих статистических критериев нарушение предположения о нормальности приводит к существенным изменениям в законе распределения статистики критерия. Если этому не придавать значения и пользоваться стандартными процедурами анализа, то можно делать ошибочные выводы. Поэтому исследователю необходимо обладать достоверной информацией о чувствительности распределения статистики критерия и его числовых характеристик к виду наблюдаемого закона распределения.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Цель настоящей работы заключалась в исследовании влияния на распределения статистик критериев тренда и случайности различной степени отклонения от нормального закона и оценка мощности критериев по отношению к некоторым альтернативам. В частности, исследовалось, что происходит с распределениями статистик, если закон распределения наблюдаемых величин асимметричен, с “тяжелыми” хвостами, либо представляет собой симметричный закон, в различной степени отличающийся от нормального. Исследовалась зависимость распределений статистик критериев от объема выборки. В основу исследований положена методика статистического моделирования распределений статистик.

В рассматриваемых критериях используется временной ряд $x_1,...,x_n$ значений взаимно независимых случайных величин с математическими ожиданиями $\mu_1,...,\mu_n$ и одинаковыми (но неизвестными) дисперсиями. Проверяется гипотеза о том, что все выборочные значения принадлежат к одной генеральной совокупности со средним μ:

$$H_0 : \mu_i = \mu,\ i = 1,2,...,n$$

против конкурирующей гипотезы о наличии тренда

$$H_1 : |\mu_{i+1} - \mu_i| > 0,\ i = 1,2,...,n-1.$$

III. ТЕОРИЯ

Критерий Фостера-Стюарта. Используется для проверки отсутствия тренда как средних, так и дисперсий. Статистики критерия имеют вид [1]:

$$S=\sum_{i=2}^{n}S_i\ ;\ d=\sum_{i=2}^{n}d_i\ ,$$

где

$$d_i=u_i-l_i\ ;\ S_i=u_i+l_i\ ;$$

$$u_i=1,\ \text{если}\ x_i>x_{i-1},x_{i-2},...,x_1,\ \text{иначе}\ u_i=0\ ;$$

$$l_i=1,\ \text{если}\ x_i<x_{i-1},x_{i-2},...,x_1,\ \text{иначе}\ l_i=0\ .$$

Статистика S используется для проверки наличия тренда в дисперсиях, а статистика d – для обнаружения тренда в средних. Очевидно, что

$$0\le S\le n-1\ \text{и}\ -(n-1)\le d\le n-1.$$

При отсутствии тренда величины

$$t=\frac{d}{f}\ \text{и}\ \tilde{t}=\frac{S-f^2}{l}\ ,$$

приближенно подчиняются распределению Стьюдента с $\nu=n$ степенями свободы. Формулы для f и l

$$l=\sqrt{2\ln n-3{,}4253}\ ,\ \ f=\sqrt{2\ln n-0{,}8456}$$

применимы при $n>50$, их значения при $n\le 50$ приведены в [2].

Нулевая гипотеза отсутствия тренда отклоняется с заданным уровнем значимости α, если

$$|t|\ \left(\left|\tilde{t}\right|\right)>t_{1-\alpha/2}\ .$$

Вследствие дискретности распределения статистики критерия даже при больших объемах выборки ($n=100{,}200$) *существенно отличаются от распределения Стьюдента* с n степенями свободы (см. Рис.1).

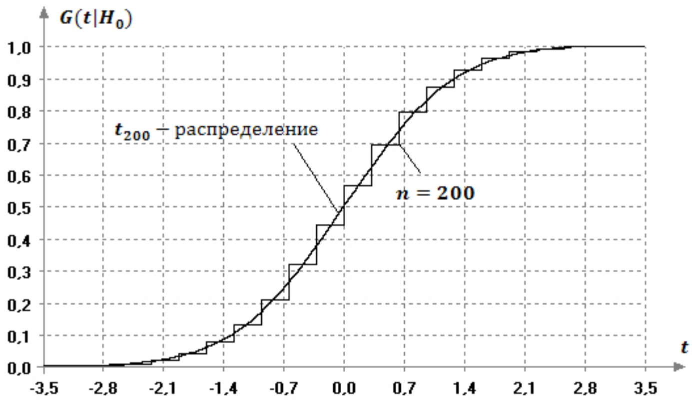


Рис. 1. Распределение статистики критерия Фостера-Стюарта для обнаружения тренда в средних при n=200 и распределение Стьюдента с числом степеней свободы, равном 200

Критерий Кокса-Стюарта. Критерий используется для проверки наличия тренда среднего и дисперсии в последовательности наблюдений. В критерии проверки отсутствия тренда в средних в выборке объема n используется статистика [3]

$$S_1=\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(n-2i+1)h_{i,n-i+1}\ ,$$

где $h_{i,j}=1$, если $x_i>x_j$, и $h_{i,j}=0$, если $x_i\le x_j$ ($i<j$).

Нормализованная статистика имеет вид

$$S_1^*=\frac{S_1-M(S_1)}{\sqrt{D(S_1)}}\ ,$$

где

$$M(S_1)=\frac{n^2}{8}\ ,$$

$$D(S_1)=\frac{n(n^2-1)}{24}\ .$$

При $\left|S_1^*\right|>u_{1-\alpha/2}$, где $u_{1-\alpha/2}$ – квантиль стандартного нормального распределения, проверяемая гипотеза об отсутствии тренда отклоняется.

Критерий для проверки гипотезы о тренде дисперсии в выборке строится следующим образом. Выборка $x_1,...,x_n$ разбивается на n/k подвыборок $x_1,...,x_k$; $x_{k+1},...,x_{2k}$; $x_{2k+1},...,x_{3k}$; ...; $x_{n-k+1},...,x_n$ (если n не делится на k, отбрасывается необходимое число наблюдений в центре). Для каждой i-й подвыборки находится размах w_i $(1\le i\le r)$ ($r=\left[\frac{n}{k}\right]$). Далее последовательность размахов w_i проверяется на наличие тренда критерием со статистикой S_1. В [2] рекомендуется выбирать k из следующих соотношений:

$$n\ge 90\rightarrow k=5\ ;\ 64\le n<90\rightarrow k=4\ ;$$

$$48\le n<64\rightarrow k=3\ ;\ n<48\rightarrow k=2\ .$$

Распределение статистики при малых n является дискретным, но быстро стремится к непрерывному (см. Рис.2).

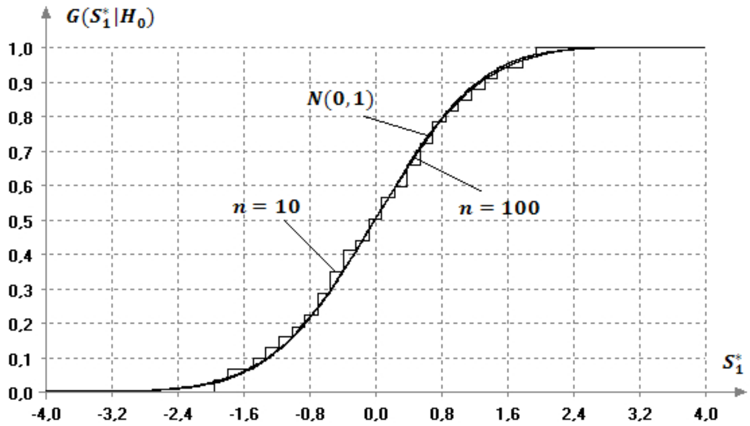


Рис. 2. Сходимость распределения статистики критерия Кокса-Стюарта для обнаружения тренда в средних к стандартному нормальному закону

В настоящей работе критерии Фостера-Стюарта и Кокса-Стюарта рассматриваются только для обнаружения тренда в средних.

Критерий автокорреляции. Если выборка значений x случайна, то значение каждого ее элемента не должно зависеть от величины предшествующего и последующего членов. Для проверки этой независимости используется статистика [4]

$$r_{1,n}=\frac{n\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+nx_1x_n}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\ ,$$

являющаяся коэффициентом корреляции первого порядка между элементами первичной выборки ($x_1,...,x_n$) и элементами выборки, полученной из нее сдвигом на одну единицу ($x_2,x_3,...,x_n,x_1$). Величину $r_{1,n}$ можно считать распределенной асимптотически нормально со средним $M(r_{1,n})$ и дисперсией $D(r_{1,n})$, где

$$M(r_{1,n}) = -\frac{1}{n-1},$$

$$D(r_{1,n}) = \frac{n(n-3)}{(n+1)(n-1)^2}.$$

Поэтому в качестве критерия случайности может рассматриваться нормализованная статистика

$$r_{1,n}^* = \frac{\left|r_{1,n} - M(r_{1,n})\right|}{\sqrt{D(r_{1,n})}}.$$

Гипотеза о случайности отклоняется при $\left|r_{1,n}^*\right| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Результаты моделирования показали, что при $n > 10$ распределение статистики достаточно хорошо согласуется со стандартным нормальным законом.

Критерий Вальда-Вольфовитца. Пусть R_i – ранг наблюдения x_i в упорядоченном по возрастанию ряду значений $x_1, x_2, ..., x_n$. Коэффициент сериальной корреляции Вальда-Вольфовитца имеет вид [5]:

$$R = \sum_{i=1}^{n-1}\left(R_i - \frac{n+1}{2}\right)\left(R_{i+1} - \frac{n+1}{2}\right).$$

Распределение статистики асимптотически нормально со средним $M(R)$ и дисперсией $D(R)$, где

$$M(R) = 0,$$

$$D(R) = \frac{n^2(n+1)(n-3)(5n+6)}{720}.$$

Гипотеза случайности отклоняется, если

$$\left|R^*\right| = \frac{|R|}{\sqrt{D(R)}} > u_{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Результаты моделирования показали, что распределение статистики критерия *смещено по отношению к предельному*, и близость к стандартному нормальному закону достигается лишь при больших объемах выборок (см. Рис.3).

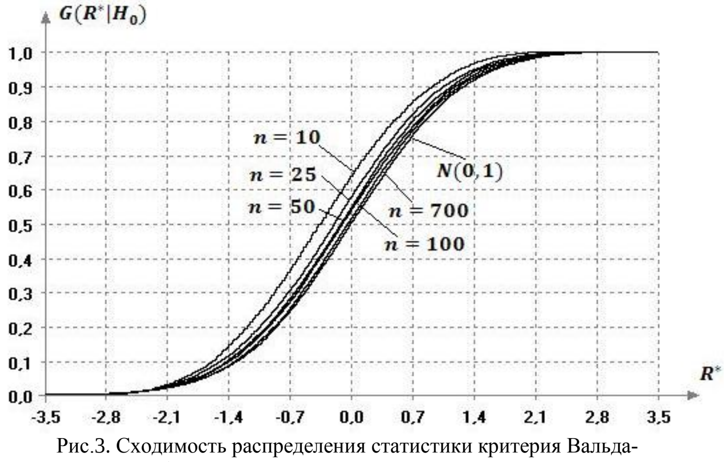


Рис.3. Сходимость распределения статистики критерия Вальда-Вольфовитца к стандартному нормальному закону

Критерий Бартелса. Пусть R_i – ранг i-го наблюдения в последовательности n наблюдений x_i. Бартелсом [6] был предложен ранговый критерий случайности ряда, основанный на статистике

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(R_i - R_{i+1})}{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2}.$$

Нормализованная статистика

$$B^* = \frac{B - M(B)}{\sqrt{D(B)}} = \frac{B-2}{2\sqrt{\frac{5}{5n+7}}}.$$

Если $\left|B^*\right| < u_{1-\alpha/2}$, то гипотеза случайности не отклоняется.

Распределение статистики достаточно быстро сходится к стандартному нормальному (см. Рис.4).

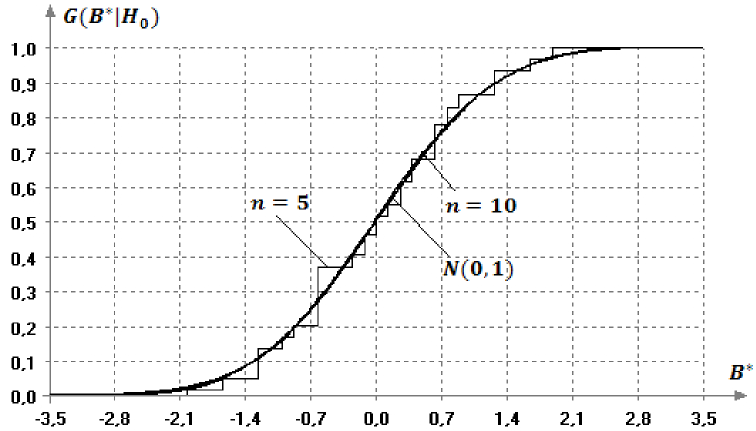


Рис.4. Сходимость распределения статистики критерия Бартелса к стандартному нормальному закону

IV. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

A. *Исследование распределений статистик в случае нарушения предположения о нормальности*

Критерий автокорреляции относится к параметрическим критериям, в этой связи были проведены исследования распределений статистики критерия в случае принадлежности наблюдений различным законам, в том числе семейству с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_3}{2\theta_1\Gamma\left(\frac{1}{\theta_3}\right)}\exp\left\{-\left(\frac{|x-\theta_1|}{\theta_2}\right)^{\theta_3}\right\} \qquad (1)$$

и параметрами формы $\theta_3 = 0{,}2$; 0,5; 1; 1,5; 2; 4; 8. В частности, при $\theta_3 = 2$ выражение (1) дает плотность нормального закона распределения. На рисунке 5 представлены полученные в результате моделирования распределения статистики критерия автокорреляции в случае принадлежности наблюдений законам распределения семейства (1) при различных параметрах формы: вид закона менялся от близкого к распределению Коши, до близкого к равномерному закону.

Как следует из представленной на рисунке 5 картины, в случае принадлежности $\xi_1, ..., \xi_n$ достаточно широкому кругу законов распределение статистики критерия автокорреляции существенно не отличается от распределения, имеющего место в случае принадлежности наблюдений нормальному закону. Если закон, которому принадлежат наблюдаемые величины, симметричен и с не слишком тяжелыми хвостами, то распределение статистики не отличается значимо от “классического”.

При сильной асимметричности закона наблюдаемых случайных величин (например, в случае показательного закона) распределение статистики становится отличным от “классического”. В то же время, асимметричность закона влияет на распределение статистики менее значимо, чем “тяжесть” хвостов. В случае принадлежности $\xi_1,...,\xi_n$ асимметричным законам экстремальных значений (минимального или максимального) распределения статистики практически не отличаются от “классического”.

Отметим, что влияние закона наблюдаемых случайных величин на распределение статистики критерия автокорреляции такое же, как для критериев, связанных с проверкой гипотез о парной корреляции [7].

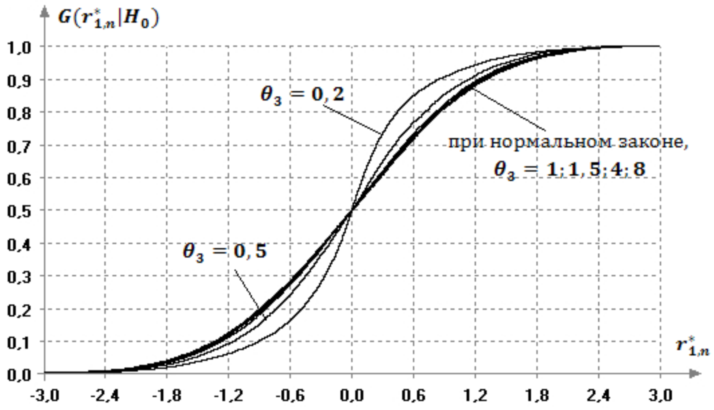


Рис. 5. Распределения статистики критерия автокорреляции в зависимости от параметра формы семейства (1) при n=25

B. *Сравнительный анализ мощности критериев*

О преимуществах того или иного критерия при заданной вероятности ошибки 1-го рода α (отклонить верную гипотезу H_0) можно судить по величине мощности $1-\beta$, где β – вероятность ошибки 2-го рода (не отклонить гипотезу H_0 при справедливости конкурирующей гипотезы H_1). Пусть проверяемой гипотезе H_0 соответствует выполнение предположения о независимости наблюдаемых величин $\xi_1,...,\xi_n$. Без потери общности можно рассматривать $\xi_1,...,\xi_n$, принадлежащие стандартному нормальному закону. В качестве конкурирующих гипотез рассматривались различные ситуации при наличии тренда.

В случае линейного тренда моделировались случайные величины

$$x_i = a \cdot t + \xi_i\,, \tag{2}$$

относительно которых проверялась гипотеза H_0. В (2) ξ_i представляют собой независимые случайные величины, распределённые по стандартному нормальному закону, $t \in [0,1]$.

Величины x_i (2) вычислялись в соответствии с выражением

$$x_i = a \cdot (i-1)\Delta t + \xi_i\,, \tag{3}$$

где шаг Δt определялся как $\Delta t = 1/n$ в зависимости от объема выборки n. Псевдослучайные величины ξ_i генерировались в соответствии со стандартным нормальным законом.

На рисунке 6 для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ приведены значения мощности $1-\beta$ рассматриваемых в данной работе критериев тренда и случайности относительно конкурирующих гипотез H_1 ($a = 0{,}5$) и H_2 ($a = 4$) с линейным трендом (3) в зависимости от объема выборки n. Сравнительный анализ мощности критериев показал, что критерий Фостера-Стюарта значительно уступает критериям Кокса-Стюарта, автокорреляции, Вальда-Вольфовитца и Бартелса. В некоторой степени это может объясняться сильной дискретностью распределения его статистики.

Рис.6. Мощности критериев тренда и случайности относительно конкурирующих гипотез с линейным трендом

Аналогичные исследования мощности критериев тренда и случайности были проведены относительно конкурирующих гипотез с периодическим трендом вида

$$x_i = a \cdot \sin(2\pi t) + \xi_i\,, \tag{4}$$

где, как и в предыдущем случае, ξ_i – независимые случайные величины, распределённые по стандартному нормальному закону, $t \in [0,1]$, $\Delta t = 1/n$, а величины x_i вычислялись в соответствии с (4) как

$$x_i = a \cdot \sin(2\pi(i-1)\Delta t) + \xi_i\,.$$

Также была исследована мощность критерия относительно альтернатив со смешанным трендом вида

$$x_i = a \cdot t + a \cdot \sin(2\pi t) + \xi_i\,.$$

Сравнительный анализ мощности относительно конкурирующих гипотез с периодическим и смешанным трендом показал, что критерий Фостера-Стюарта значительно уступает остальным рассматриваемым критериям. Критерии автокорреляции, Вальда-Вольфовитца и Бартелса близки по мощности.

V. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные оценки мощности критериев позволяют судить об их способности обнаруживать наличие линейного и нелинейного тренда. Сравнительный анализ мощности критериев показал, что при проверке гипотезы об отсутствии тренда следует отдать предпочтение критериям Бартелса, Вальда-Вольфовитца и автокорреляции. При проверке на линейный тренд можно рекомендовать применение критерия Кокса-Стюарта. Критерий Фостера-Стюарта показал наименьшую мощность во всех случаях.

VI. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование распределений статистик критериев тренда и случайности в зависимости от объема выборки.

Для параметрического критерия автокорреляции показано, что применение критерия будет корректным, даже если мы имеем дело с законом, отличающимся от нормального. Однако закон должен быть симметричен и не должен иметь “тяжелых” хвостов.

Проведен сравнительный анализ мощности критериев, даны рекомендации по их применению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Foster F.G., Stuart A. Distribution-free tests in timeseries dated on the breaking of records // JRSS. 1954. V. B16, №1. P. 1-22.

[2] Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. — М.: Физматлит, 2006.

[3] Cox D.R., Stuart A. Quick sign tests for trend in location and dispersion // Biometrica. 1955. V. 42. P. 80-95.

[4] Knoke J.D. Testing for randomness against autocorrelation: The parametric case // Biometrica. 1975. V. 62. P. 571-575.

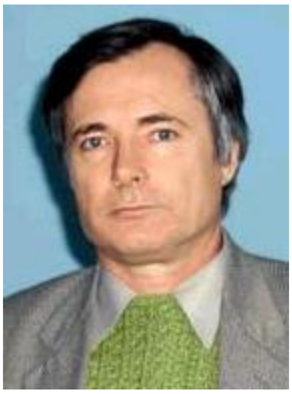
[5] Wald A., Wolfowitz J. An exact test for randomness in the non-parametric case based on serial correlation // AMS. 1943. V. 14. P. 378-388.

[6] Bartels R. The rank version of von Neumann’s ratio test for randomness // JASA. 1982. V. 77, №377. P. 40-46.

[7] Лемешко Б.Ю., Помадин С.С. Исследование распределений статистик корреляционного анализа при отклонении многомерного закона от нормального // Тр. V межд. конф. "Актуальные проблемы электронного приборостроения" АПЭП-2000. Новосибирск, 2000. - Т. 7. - С. 184-187.

Беркович Александра Семеновна

В 2009 году получила степень бакалавра прикладной математики и информатики в Новосибирском государственном техническом университете. С 2009 года является магистрантом Новосибирского государственного технического университета.



Лемешко Борис Юрьевич

Профессор кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета (НГТУ), д.т.н., декан факультета прикладной математики и информатики НГТУ

Щеглов Алексей Евгеньевич

В 2008 году получил степень магистра прикладной математики и информатики в Новосибирском государственном техническом университете. С 2008 года является аспирантом Новосибирского государственного технического университета.