

В.И. Денисов, Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов



**Прикладная статистика**  
**Правила проверки согласия опытного распределения с**  
**теоретическим**

*Методические рекомендации*

**Часть I. КРИТЕРИИ ТИПА  $\chi^2$**

Новосибирск - 1998

Денисов В.И., Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. **Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Методические рекомендации. Часть I. Критерии типа  $\chi^2$ .** – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – С. 126. (С.139 – с дополнением).

Методические рекомендации предназначены для использования в качестве руководства по применению критериев согласия типа  $\chi^2$  при статистической обработке результатов наблюдений в различных приложениях: анализе данных физических и технологических экспериментов, обработке результатов измерений, в задачах исследования надежности, контроля качества и т.д.

Основное внимание уделено способам разбиения наблюдаемой выборки на интервалы, в частности, асимптотически оптимальному группированию, обеспечивающему максимальную мощность используемому критерию при близких альтернативах.

Методические рекомендации предназначены для студентов различных направлений и специальностей, изучающих курс математической статистики, для научных и инженерных работников, аспирантов, специалистов различных отраслей, использующих аппарат теории вероятностей и математической статистики при описании результатов наблюдений и обработке экспериментальных наблюдений.

Планируется, что с готовностью второй части рекомендаций для непараметрических критериев согласия, охватывающих их применение в случае простых и сложных гипотез, методические рекомендации заменят стандарт СТ СЭВ 1190-78.

Методические рекомендации подготовлены на кафедре прикладной математики Новосибирского государственного технического университета, работа поддержана техническим комитетом по стандартизации ТК 125 “Стандартизация статистических методов управления качеством”.

© Новосибирский государственный  
технический университет, 1998 г.

## С о д е р ж а н и е

Введение .....	4
1. Область применения .....	5
2. Общие положения .....	6
3. Критерии типа $\chi^2$ при простых гипотезах .....	8
4. Порядок проверки простой гипотезы .....	10
5. Связь мощности критериев со способом группирования наблюдений .....	11
6. Критерии типа $\chi^2$ при сложных гипотезах .....	12
7. Асимптотически оптимальное группирование .....	11
8. Характер влияния способов группирования и метода оценивания на распределения статистик типа $\chi^2$ .....	23
9. Выбор числа интервалов .....	32
10. Рекомендации по использованию асимптотически оптимального группирования в критериях согласия .....	33
Литература .....	60
<i>Приложение А.</i> Таблицы асимптотически оптимального группирования наблюдений в критериях согласия типа $\chi^2$ .....	62
<i>Приложение Б.</i> Квантили $\chi_r^2$ распределения .....	139

## Введение

Необходимость разработки настоящих рекомендаций вызвана следующими факторами.

Во-первых, в связи с тем, что в регламентирующих документах практически не оговорены правила применения критериев согласия при проверке сложных гипотез, практика использования таких критериев в задачах контроля качества, исследования надежности и в других приложениях зачастую приводит к некорректному применению и, как следствие, неверным выводам. Это касается как критериев согласия типа  $\chi^2$ , так и непараметрических критериев типа Колмогорова или типа  $\omega^2$  Мизеса.

Во-вторых, в правилах применения критериев типа  $\chi^2$  способы группирования наблюдений (способы разбиения области определения случайной величины на интервалы) не учитывают асимптотических свойств этого критерия. Неоднозначность процедуры группирования, отражается на мощности применяемого критерия, его способности различать близкие гипотезы. Не учет этих свойств, как правило, приводит к неоправданному принятию проверяемой гипотезы.

Рекомендации предназначены для использования в качестве руководства по применению критериев согласия типа  $\chi^2$  при статистической обработке результатов наблюдений в различных приложениях: анализе данных физических и технологических экспериментов, обработке результатов измерений, в задачах исследования надежности, контроля качества и т.д. Основное внимание уделено способам разбиения наблюдаемой выборки на интервалы, в частности, асимптотически оптимальному группированию, обеспечивающему максимальную мощность используемому критерию при близких альтернативах.

## 1. Область применения

Методические рекомендации определяют правила применения критериев типа  $\chi^2$  при проверке гипотез о согласии наблюдаемых выборочных данных с предполагаемым законом распределения случайной величины. Сфера применения критериев согласия чрезвычайно широка. Это задачи, возникающие в различных областях техники, в массовом производстве, в финансах и экономике, при обработке результатов измерений, при контроле качества и испытаниях продукции, при обработке экспериментальных наблюдений в научных исследованиях.

Действие рекомендаций распространяются на правила и рекомендации по стандартизации, метрологии, сертификации и аккредитации, использующие методы статистического анализа.

## 2. Общие положения

Множество непрерывных законов распределений, используемых в задачах статистического анализа (при контроле качества, исследованиях надежности и т.д.), немногим превышает 100, а для описания наблюдаемых случайных величин в прикладных исследованиях в основном используется порядка 30 параметрических законов и семейств распределений. Естественно, что это не покрывает того многообразия случайных величин, которое встречается на практике. Корректное применение критериев согласия часто приводит (и должно приводить) к отклонению гипотез о принадлежности выборки удобному и привычному закону распределения, например нормальному, так как законы реальных случайных величин, которые являются следствием большого числа причин, сложнее тех моделей, которые обычно используются для их описания. Следовательно и модели должны быть более сложными.

Целью первичной обработки экспериментальных наблюдений обычно является выбор закона распределения, наиболее хорошо описывающего случайную величину, выборку которой мы наблюдали. Проверка того, насколько хорошо наблюдаемая выборка описывается теоретическим законом, осуществляются с использованием различных **критериев согласия**. Целью проверки гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим является стремление удостовериться в том, что данная модель теоретического закона не противоречит наблюдаемым данным, и использование ее не приведет к существенным ошибкам при вероятностных расчетах. Некорректное использование критериев согласия может приводить к необоснованному принятию (*чаще всего*) или необоснованному отклонению проверяемой гипотезы.

При проверке согласия различают **простые** и **сложные** гипотезы. **Простая** проверяемая гипотеза имеет вид  $H_0: f(x, \theta) = f(x, \hat{\theta})$ , где  $f(\cdot)$  - функция плотности, а  $\theta_0$  - известный скалярный или векторный параметр теоретического распределения, с которым проверяется согласие. **Сложная** гипотеза имеет вид  $H_0: F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ , где  $\Theta$  - пространство параметров и оценка скалярного или векторного параметра  $\hat{\theta}$  вычисляется по той же самой выборке, по которой проверяется гипотеза о согласии.

Сама процедура проверки гипотезы осуществляется по следующей схеме. В соответствии с применяемым критерием согласия вычисляется значение  $S^*$  статистики  $S$  как некоторой функции от выборки и теоретического закона распределения  $f(x, \theta_0)$  (или  $f(x, \hat{\theta})$  при сложной гипотезе). Для используемых на практике критериев обычно известны асимптотические (предельные) распределения  $g(s)$  соответствующих статистик при условии истинности гипо-

тезы  $H_0$ . В общем случае для *простых и сложных гипотез эти распределения отличаются*. Далее в принятой практике статистического анализа чаще всего сравнивают полученное значение статистики  $S^*$  с критическим  $S_\alpha$  для данного уровня значимости  $\alpha$  и нулевую гипотезу отвергают, если  $S^* > S_\alpha$  (см. рис. 1). Критическое значение  $S_\alpha$ , определяемое из уравнения

$$\alpha = \int_{S_\alpha}^{\infty} g(s) ds ,$$

обычно берётся из соответствующей статистической таблицы.

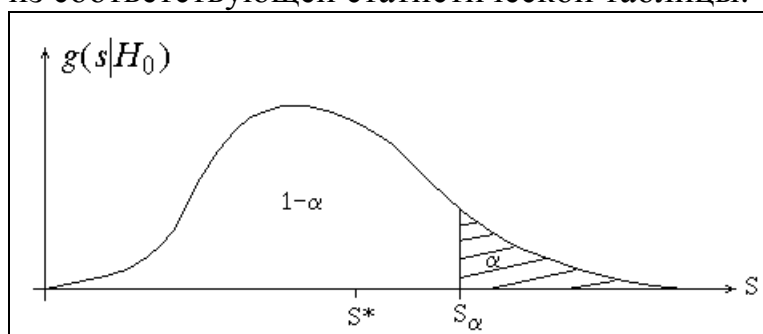


Рис. 1. Распределение статистики при истинной гипотезе  $H_0$

Естественно, что больше информации о степени согласия можно почерпнуть из величины вероятности возможного превышения полученного значения статистики при истинности нулевой гипотезы  $P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{\infty} g(s) ds$ .

Именно она позволяет судить о том, насколько хорошо выборка согласуется с теоретическим распределением, так как по существу представляет собой вероятность истинности нулевой гипотезы (рис. 2). Гипотеза о согласии не отвергается, если  $P\{S > S^*\} > \alpha$ .

Задачи оценивания параметров и проверки гипотез опираются на выборки независимых случайных величин. Случайность самой выборки предопределяет, что возможны и ошибки в результатах статистических выводов. С результатами проверки гипотез связывают ошибки 2 видов: ошибка 1-го рода состоит в том, что отклоняется гипотеза  $H_0$ , когда она верна; ошибка 2-го рода состоит в том, что принимается гипотеза  $H_0$ , в то время как справедлива альтернативная (конкурирующая) гипотеза  $H_1$ . Величина  $\alpha$  задаёт вероятность ошибки 1-го рода. Обычно в критериях согласия не рассматривают конкретную альтернативу и тогда конкурирующая гипотеза имеет вид  $H_0: f(x, \theta) \neq f(x, \theta_0)$ . Если гипотеза  $H_1$  определена и имеет, например, вид  $H_0: f(x, \theta) = f_1(x, \theta_1)$ , то задание  $\alpha$  определяет для используемого критерия проверки гипотез и вероятность  $\beta$  ошибки 2-го рода. На рис. 3  $g(s|H_0)$

отображает плотность распределения статистики  $S$  при истинности гипотезы  $H_0$ , а  $g(s | H_1)$  - плотность распределения при справедливости гипотезы  $H_1$ .

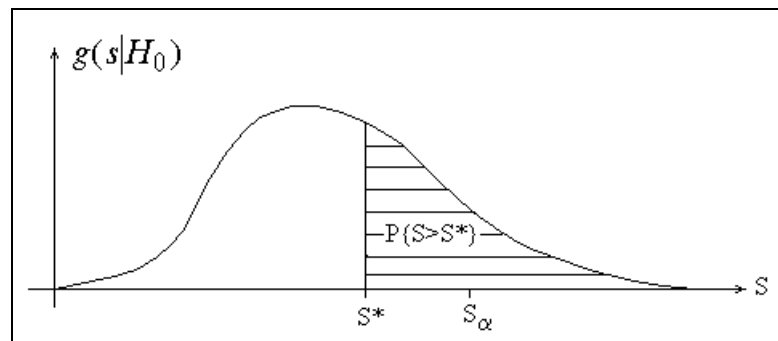


Рис. 2. Распределение статистики при истинной гипотезе  $H_0$

**Мощность критерия** представляет собой величину  $1 - \beta$ . Очевидно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении  $\alpha$ , тем лучше он различает гипотезы  $H_0$  и  $H_1$ . Особенно важно, чтобы используемый критерий хорошо различал близкие альтернативы. Графически требование максимальной мощности критерия означает, что на рис. 3 плотности  $g(s | H_0)$  и  $g(s | H_1)$  должны быть максимально "раздвинуты".

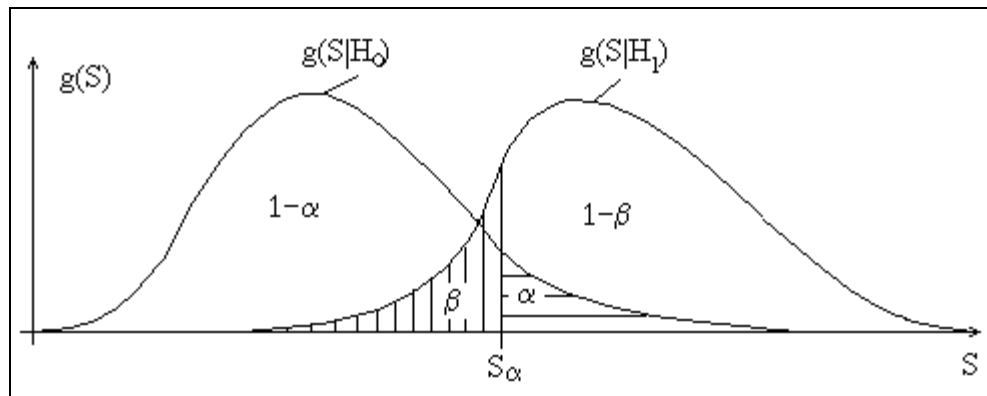


Рис. 3. Распределения статистик при справедливости гипотез  $H_0$  и  $H_1$

### 3. Критерии типа $\chi^2$ при простых гипотезах

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  - выборка значений наблюдаемой случайной величины объемом  $N$ . Процедура проверки гипотез с применением критериев типа  $\chi^2$  предусматривает группирование наблюдений. Область определения случайной величины разбивается на  $k$  непересекающихся интервалов граничными точками

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k,$$



где  $x_0$  - нижняя грань области определения случайной величины,  $x_k$  - верхняя грань. В соответствии с заданным разбиением подсчитывают количества  $n_i$  выборочных значений, попавших в  $i$ -й интервал, и вычисляют вероятности попадания в интервал  $P_i(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \theta) dx$ , соответствующие теоретическому закону с функцией плотности  $f(x, \theta)$ . При проверке **простой** гипотезы известны как вид функции плотности, так и все параметры закона (известен скалярный или векторный параметр  $\theta$ ). При этом  $N = \sum_{i=1}^k n_i$ ,  $\sum_{i=1}^k P_i(\theta) = 1$ . В основе статистик, используемых в критериях согласия типа  $\chi^2$ , лежит измерение отклонений  $n_i / N$  от  $P_i(\theta)$ .

К критериям такого рода, в частности, относятся критерий  $\chi^2$  Пирсона, критерий отношения правдоподобия [1] и критерии типа  $\chi^2$  [2,3,4].

Статистика *критерия согласия  $\chi^2$  Пирсона* вычисляется в соответствии с соотношением

$$\chi^2 = N \sum_{i=1}^k \frac{(n_i / N - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}. \quad (1)$$

В случае проверки **простой** гипотезы в пределе при  $N \rightarrow \infty$  она подчиняется  $\chi_r^2$ -распределению с  $r = k - 1$  степенями свободы, если верна нулевая гипотеза. Эта же статистика подчиняется нецентральному  $\chi_r^2$ -распределению с тем же числом степеней свободы и параметром нецентральности

$$\lambda = N \sum_{i=1}^k \frac{(P_i(\theta_1) - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}, \quad (2)$$

если верна конкурирующая гипотеза, и выборка соответствует распределению того же типа, но с параметром  $\theta_1$ . При заданном уровне значимости  $\alpha$  нулевая гипотеза о согласии не должна отвергаться, если

$$P\{S_{\chi^2} > S_{\chi^2}^*\} = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} \int_{S_{\chi^2}^*}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds > \alpha,$$

где  $S_{\chi^2}^*$  - вычисленное в соответствии с (1) значение статистики.

В критерии *отношения правдоподобия* используется статистика [1]

$$S_{\text{оп}} = -2 \ln l = -2 \sum_{i=1}^k n_i \ln \left( \frac{P_i(\theta)}{n_i / N} \right), \quad (3)$$

которая при верной нулевой гипотезе также асимптотически распределена как  $\chi_r^2$  с  $r = k - 1$  степенями свободы. Если верна конкурирующая гипотеза и выборка принадлежит распределению того же типа, но с параметром  $\theta_1$ , мерой близости сравниваемых законов является величина

$$-2 \ln l = 2N \sum_{i=1}^k P_i(\theta_1) \ln \left( \frac{P_i(\theta_1)}{P_i(\theta)} \right). \quad (4)$$

#### 4. Порядок проверки простой гипотезы

При проверке простой гипотезы основное внимание следует обратить на способ группирования выборки (способ разбиения области определения случайной величины на интервалы), так как это определяет способность критерия различать близкие гипотезы.

Проверка простой гипотезы осуществляется следующим образом.

1. В зависимости от объема выборки  $N$  в соответствии с рекомендациями, изложенными в разделе 10, выбирается количество интервалов  $k$ .

2. Граничные точки интервалов должны выбираться таким образом, чтобы количества наблюдений, попавших в интервал  $n_i$ , или ожидаемые количества попаданий в интервал  $NP_i(\theta)$  оказались не менее  $5 \div 10$ .

Интервалы могут выбираться равной длины, в этом случае необходимо подсчитать количества  $n_i$  и вычислить значения вероятностей  $P_i(\theta)$ .

Интервалы могут выбираться равновероятными, тогда  $P_i(\theta) = 1/k$ , но необходимо вычислить значения граничных точек  $x_i$ , разделяющих интервалы.

Можно разбивать выборку на интервалы в соответствии с асимптотически оптимальным группированием для данного закона распределения (см. раздел 11). Такое разбиение наиболее предпочтительно.

3. После подсчета  $n_i$  и  $P_i(\theta)$  вычисляется значение  $S^*$  применяемой статистики в соответствии с соотношением (1) или (3).

4. Если  $S^* < S_{r,\alpha}$ , где число степеней свободы  $r = k - 1$ ,  $S_{r,\alpha}$  - определяется из уравнения

$$\frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} \int_{S_{r,\alpha}}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds = \alpha \quad (5)$$

при заданном уровне значимости  $\alpha$ , то гипотеза  $H_0$  о согласии не отвергается. Соответствующие значения  $S_{r,\alpha}$  могут быть взяты из таблицы, представленной в приложении Б.

При вычислении вероятности

$$P\{S > S^*\} = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} \int_{S^*}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds \quad (6)$$

гипотеза о согласии не отвергается, если  $P\{S > S^*\} > \alpha$ .

## 5. Связь мощности критериев со способом группирования наблюдений

Очевидно, что группирование наблюдений приводит к потере информации, и эти потери зависят от выбора варианта группировки данных. На практике обычно строят интервалы равной длины или, в лучшем случае, интервалы равной вероятности. Потери информации о законе распределения в этих ситуациях различны и различна способность критериев распознавать близкие гипотезы.

Мерой внутренней близости распределений случайных величин служит фишеровская информация, и этот внутренний характер связан с мощностью различения между близкими значениями параметра. Так как в любой статистике не больше информации, чем в исходной выборке, то мощность различения с помощью статистики не больше, чем с помощью всей выборки. Следовательно, если нужно выбирать между несколькими статистиками, следует предпочесть ту, для которой потери фишеровской информации минимальны [5, с.299-300].

Несложно показать, разлагая  $P_i(\theta_1)$  в соотношении (2) в ряд Тейлора при малых  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta$  и пренебрегая членами высшего порядка, что

$$\begin{aligned} \lambda &\approx N \sum_{i=1}^k \frac{[P_i(\theta) + \nabla^T P_i(\theta) \delta\theta - P_i(\theta)]^2}{P_i(\theta)} = N \sum_{i=1}^k \frac{\delta\theta^T \nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta) \delta\theta}{P_i(\theta)} = \\ &= N \delta\theta^T \left( \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta)}{P_i(\theta)} \right) \delta\theta = N \delta\theta^T \mathbf{J}_\Gamma(\theta) \delta\theta, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\mathbf{J}_\Gamma(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\hat{\theta}) \nabla^T P_i(\hat{\theta})}{P_i(\hat{\theta})} \quad (8)$$

- информационная матрица Фишера по группированным данным. Мощность критерия  $\chi^2$  Пирсона представляет собой неубывающую функцию от  $\lambda$ . Матрица потерь информации, вызванных группированием,  $\Delta J = J(\theta) - J_\Gamma(\theta)$ , где  $J(\theta)$  - информационная матрица Фишера по негруппированным наблюдениям с элементами

$$J(\theta_i, \theta_j) = \int \left( \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_j} \right) f(x, \theta) dx, \quad (9)$$

является неотрицательно определенной, и, следовательно,  $\delta\theta^T \Delta J \delta\theta \geq 0$ . А так как  $\delta\theta^T J_\Gamma(\theta) \delta\theta = \delta\theta^T J(\theta) \delta\theta - \delta\theta^T \Delta J \delta\theta$ , то очевидно, что с ростом потерь информации падает и мощность критерия при близких конкурирующих гипотезах.

Аналогично, с ростом правой части соотношения (4) увеличивается мощность критерия отношения правдоподобия. Действуя, как и в предыдущем случае, и пренебрегая членами высшего порядка, будем иметь

$$-2 \ln l \approx 2N \sum_{i=1}^k \left( P_i(\theta) + \nabla^T P_i(\theta) \delta\theta \right) \ln \left( 1 - \frac{\nabla^T P_i(\theta) \delta\theta}{P_i(\theta)} \right).$$

Далее, раскладывая  $\ln(1+x)$  по формуле Тейлора и вновь пренебрегая членами выше второго порядка, получаем

$$\begin{aligned} 2 \ln l &\approx 2N \sum_{i=1}^k \left( P_i(\theta) + \delta\theta^T \nabla P_i(\theta) \right) \left[ \frac{\nabla^T P_i(\theta) \delta\theta}{P_i(\theta)} - \frac{\delta\theta^T \nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta) \delta\theta}{2P_i^2(\theta)} \right] \approx \\ &\approx 2N \sum_{i=1}^k \left( \delta\theta^T \nabla P_i(\theta) + \frac{\delta\theta^T \nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta) \delta\theta}{2P_i(\theta)} \right) = \\ &= N \delta\theta^T \left[ \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta)}{P_i(\theta)} \right] \delta\theta = N \delta\theta^T J_\Gamma(\theta) \delta\theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Это соотношение аналогично выражению (7).

## 6. Критерии типа $\chi^2$ при сложных гипотезах

При справедливости  $H_0$  в случае проверки **сложной** гипотезы и при условии, что оценки параметров находятся в результате минимизации статистики  $S_{\chi^2}$  по этой же самой выборке, статистика  $S_{\chi^2}$  асимптотически распределена как  $\chi_r^2$  с числом степеней свободы  $r = k - m - 1$ , где  $m$  - количество оцененных параметров. Статистика  $S_{\chi^2}$  имеет это же распределение, если в качестве метода оценивания выбирается метод максимального правдоподобия и оценки вычисляются по сгруппированным данным в результате максимизации по  $\theta$  функции правдоподобия

$$L(\theta) = \gamma \prod_{i=1}^k P_i^{n_i}(\theta), \quad (11)$$

где  $\gamma$  - некоторая константа и  $P_i(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \theta) dx$  - вероятность попадания наблюдения в  $i$ -й интервал значений, зависящая от  $\theta$ .

При вычислении же оценок максимального правдоподобия по негруппированным данным эта статистика распределена в пределе как сумма независимых слагаемых  $\chi_{k-m-1}^2 + \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2$ , где  $\xi_1, \dots, \xi_m$  - стандартные нормальные случайные величины, независимые между собой и с  $\chi_{k-m-1}^2$ , а  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  - некоторые числа между 0 и 1 [2,6,7]. И ее функция распределения лежит между  $\chi_{k-1}^2$  - и  $\chi_{k-m-1}^2$ -распределениями. В этом случае, принимая нулевую гипотезу, мы должны удостовериться, что статистика  $S_{\chi^2}$  не превышает критических значений  $\chi_{k-m-1, \alpha}^2$  и  $\chi_{k-1, \alpha}^2$ , где  $\alpha$  - задаваемый уровень значимости. И если  $\chi_{k-m-1, \alpha}^2 < S_{\chi^2}^* < \chi_{k-1, \alpha}^2$ , то, принимая или отклоняя гипотезу о согласии, мы можем с одинаковым риском совершить ошибку.

Вышесказанное относится и к критерию отношения правдоподобия.

О влиянии способа группирования на распределения этих статистик при использовании оценок максимального правдоподобия по негруппированным данным см. в п.9.

В работах [2-4] рекомендуется видоизменение стандартной статистики  $S_{\chi^2}$ , при котором предельное распределение есть обычное распределение  $\chi_r^2$  с  $r = k - 1$  степенями свободы и в том случае, когда при проверке **сложной** гипотезы в качестве оценок используются оценки максимального правдоподобия параметров по негруппированным данным. При этом вектор  $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_k)^T$  предполагается заданным и граничные точки интервалов определяются соотношениями  $x_i(\theta) = F^{-1}(P_1 + \dots + P_i)$ ,  $i = \overline{1, (k-1)}$ . Предложенная статистика имеет вид [3]

$$Y_N^2(\theta) = S_{\chi^2} + N^{-1} a^T(\theta) \Lambda(\theta) a(\theta), \quad (12)$$

где  $S_{\chi^2}$  определяется по (1), матрица  $\Lambda(\theta) = \left\| J(\theta_l, \theta_j) - \sum_{i=1}^k \frac{w_{\theta_i} w_{\theta_j}}{P_i} \right\|^{-1}$ , элементы и размерность которой определяются оцениваемыми компонентами вектора параметров  $\theta$ ,  $J(\theta_l, \theta_j)$  - элементы информационной матрицы  $M(\theta)$  по негруппированным данным,  $a(\theta_l) = w_{\theta_l} n_l / P_1 + \dots + w_{\theta_k} n_k / P_k$  - элементы вектора  $a(\theta)$ , и

$$w_{\theta_i} = -f[x_i(\theta), \theta] \frac{\partial x_i(\theta)}{\partial \theta_i} + f[x_{i-1}(\theta), \theta] \frac{\partial x_{i-1}(\theta)}{\partial \theta_i}. \quad (13)$$

Для распределений, определяемых только параметрами сдвига и масштаба, справедливо соотношение

$$\left\| \sum_{i=1}^k \frac{w_{\theta_i} w_{\theta_j}}{P_i} \right\| = \sum_{i=1}^k \frac{\nabla^T P_i(\theta) \nabla P_i(\theta)}{P_i(\theta)} = \mathbf{J}_\Gamma(\theta) \quad (14)$$

и, следовательно,

$$\Lambda(\theta) = [\mathbf{J}(\theta) - \mathbf{J}_\Gamma(\theta)]^{-1}. \quad (15)$$

Следовательно, как и в соотношениях (7,10), в данном случае параметр нецентральности предельного нецентрального  $\chi_{k-1}^2$  распределения (см. [3]) зависит от величины потерь информации при группировании.

## 7. Порядок проверки сложной гипотезы

При проверке сложной гипотезы и вычислении оценок параметров в результате минимизации соответственно статистик (1) и (3), или в результате максимизации (11) порядок проверки аналогичен случаю простой гипотезы (см. раздел 4) с заданием числа степеней свободы  $r = k - m - 1$ , где  $m$  - количество оцененных по данной выборке параметров. При этом остаются в силе рекомендации по способам группирования.

При вычислении оценок максимального правдоподобия по исходным негруппированным выборочным данным и использовании для проверки гипотезы статистики (12) число степеней свободы предельного распределения  $r = k - 1$ .

При вычислении оценок максимального правдоподобия по исходным негруппированным выборочным данным и применении для проверки гипотезы статистик (1) или (3) следует руководствоваться следующими соображениями.

1. Значения  $S_{r,\alpha}$  процентных точек  $\chi_r^2$ -распределения при числе степеней свободы  $r = k - m - 1$  меньше, чем значения процентных точек действительных предельных распределений статистик (1) и (2) для такой ситуации (см. раздел 9). Поэтому, если  $S^* < S_{r,\alpha}$ , то гипотеза  $H_0$  о согласии при заданном уровне значимости  $\alpha$  заведомо не должна отвергаться.

2. Значения процентных точек действительных распределений статистик (1) и (2) существенно отличаются от процентных точек  $\chi_r^2$ -распределения при числе степеней свободы  $r = k - m - 1$ . В то же время вероятности вида  $P_{\chi^2}\{S \leq S^*\}$ , вычисляемые в соответствии с  $\chi_r^2$ -распределением

$$P_{\chi^2}\{S \leq S^*\} = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} \int_0^{S^*} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds,$$

достаточно близки к вероятностям  $P\{S \leq S^*\}$ , соответствующим действительным распределениям статистик, при больших значениях  $S^*$ , и  $P_{\chi^2}\{S \leq S^*\}$  много больше  $P\{S \leq S^*\}$  при малых значениях  $S^*$  (см. раздел 9). Поэтому, если  $P_{\chi^2}\{S > S^*\} = 1 - P_{\chi^2}\{S \leq S^*\} > \alpha$ , то гипотеза о согласии не должна отвергаться.

## 8. Асимптотически оптимальное группирование

На основании соотношений (7,10) можно утверждать, что чем меньше потери информации, связанные с группированием наблюдений, тем выше мощность соответствующих критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах.

Потери от группирования можно уменьшить, решая задачу *асимптотически оптимального группирования* и подбирая граничные точки так, чтобы  $M_{\Gamma}(\theta)$  стремилась к информационной матрице по негруппированным данным  $M(\theta)$ . В случае скалярного параметра эта задача сводится к максимизации информационного количества Фишера о параметре по группированной выборке

$$\max_{x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k} \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \ln P_i(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \cdot P_i(\theta). \quad (16)$$

А в случае вектора параметров в качестве критериев оптимальности могут быть выбраны различные функционалы от информационной матрицы Фишера. Наиболее естественно максимизировать определитель информационной матрицы, т.е. решать задачу

$$\max_{x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k} \det \mathbf{J}_{\Gamma}(\theta). \quad (17)$$

Применяя на практике критерии типа  $\chi^2$ , к сожалению, наиболее часто используют интервалы равной длины или, в лучшем случае, интервалы равной вероятности. Естественно, что в такой ситуации мощность критерия обычно далека от максимально возможной.

В качестве иллюстрации на рис. 4 для случая простой гипотезы приведены построенные функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке согласия с экспоненциальным распределением для числа интервалов  $k = 3, 10$ , объеме выборки  $n = 1000$ , при уровне значимости  $\alpha = 0.05$  в случае асимптотически оптимального группирования и при разбиения на интервалы равной вероятности. В качестве альтернативы рассматривается также экспоненциальное распределение, но с другим значением параметра. При построении кривых были использованы таблицы мощности критерия  $\chi^2$

Пирсона из [8]. Графики наглядно иллюстрируют предпочтительность асимптотически оптимального группирования.

На рис. 5 в аналогичной ситуации приведены функции мощности критерия  $\chi^2$  при проверке простой гипотезы о согласии с распределением Вейбулла, когда в качестве альтернативы рассматривается распределение с другим значением параметра формы. Как видим на рис. 4 и 5, в обоих случаях мощность критерия при асимптотически оптимальном группировании существенно выше. Выбор в качестве объекта сравнения случая равновероятного группирования обоснован определённой этой процедуры разбиения и ее оптимальностью при отсутствии конкретных альтернатив [9].

В общем случае информационная матрица Фишера зависит не только от граничных точек  $x_i$ , но и от параметров исследуемого распределения. Однако для достаточно широкого ряда распределений при решении задач асимптотически оптимального группирования граничные точки интервалов удается получить в виде, инвариантном относительно параметров распределений, и на их основе формировать таблицы асимптотически оптимального группирования.

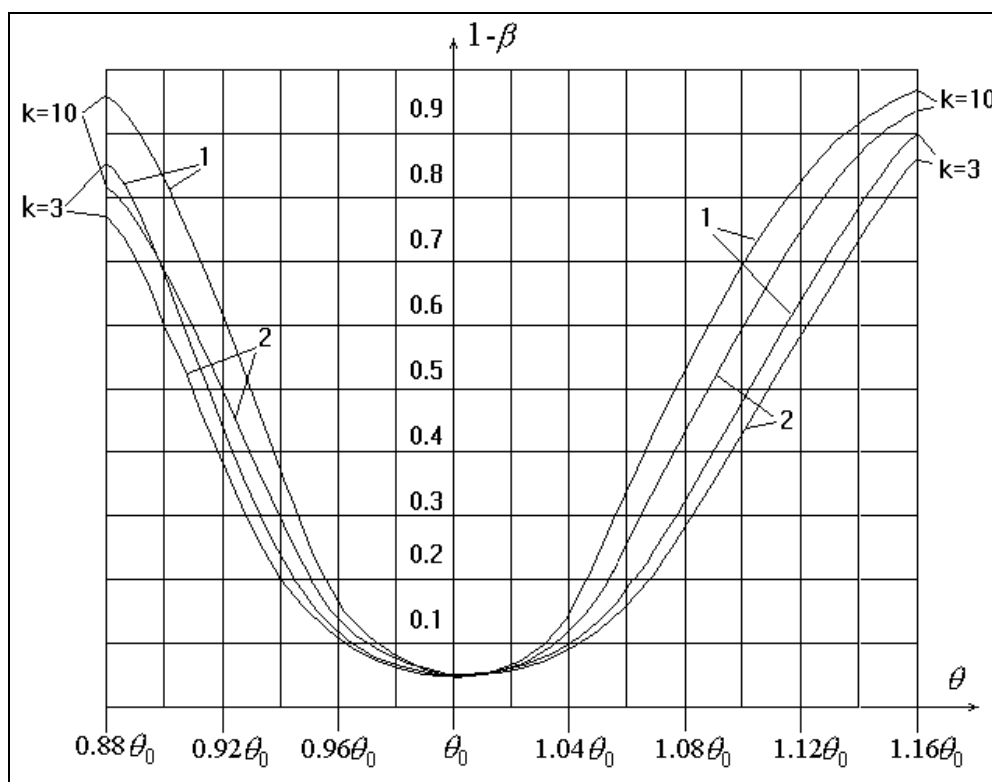


Рис. 4. Функция мощности критерия  $\chi^2$  при проверке согласия с экспоненциальным распределением (альтернатива - экспоненциальное распределение с другим значением параметра) для уровня значимости  $\alpha = 0.05$ , объема выборки  $n = 1000$ , числа интервалов  $k = 3, 10$ : 1 - для оптимального группирования; 2 - для равновероятного группирования

Совокупность таблиц асимптотически оптимального группирования, построенная для распределений экспоненциального, полунормального, Рэлея,



Максвелла, модуля многомерного нормального вектора, Парето, Эрланга, Лапласа, нормального, логарифмически-нормальных (ln и lg), Коши, Вейбулла, распределений минимального и максимального значения, двойного показательного, гамма-распределения, представлена в приложении А. Эти *таблицы могут использоваться как при проверке гипотез, так и при оценивании*. Полученные таблицы используются в программной системе [10] при проверке согласия по критериям  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия и при вычислении робастных оценок.

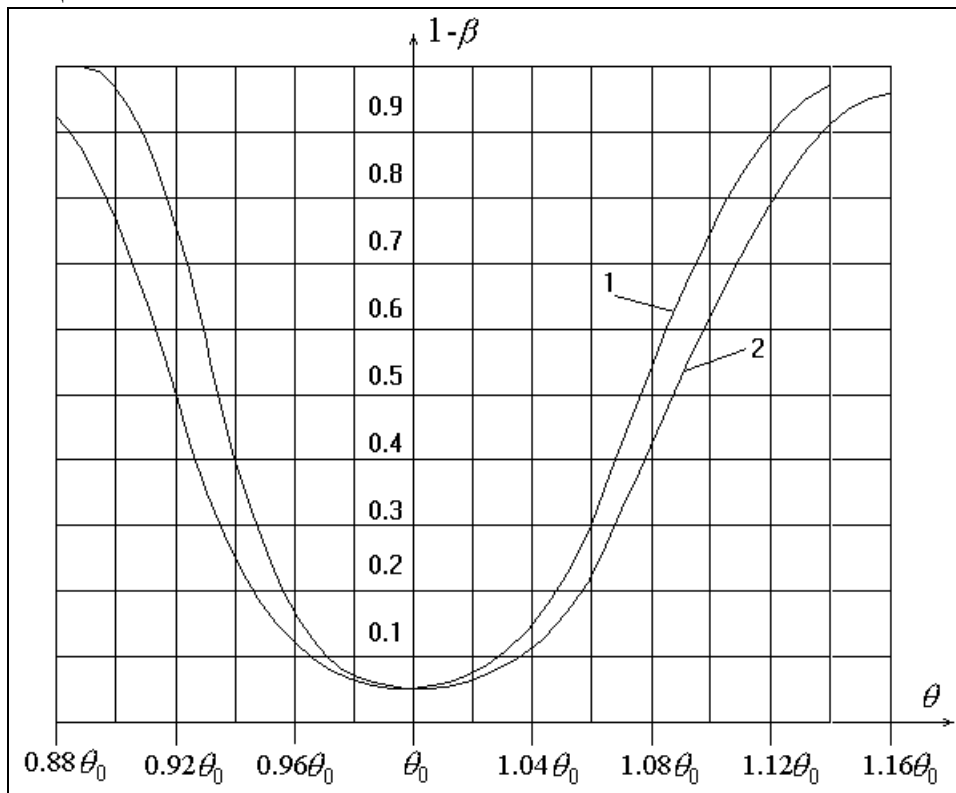


Рис. 5. Функция мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с распределением Вейбулла (альтернатива - распределение Вейбулла с другим параметром формы): уровень значимости  $\alpha = 0.05$ , объем выборки  $N = 1000$ , количество интервалов  $k = 10$ ; 1 - для оптимального группирования; 2 - для равновероятного группирования.

Для многих законов распределений граничные точки интервалов не могут быть выражены в виде, инвариантном относительно параметров распределений, т.е. они остаются функциями этих параметров. Это касается, например, таких законов, как гамма- и бета-распределения [11,12], экспоненциального семейства распределений. В этом случае формирование таблиц асимптотически оптимального группирования теряет смысл. Однако возможно решение задачи асимптотически оптимального группирования при конкретных значениях параметров в процессе проверки гипотез о согласии, как это реализуется в таких ситуациях в программной системе [10].

Положительный эффект применения асимптотически оптимального группирования на результатах статистического анализа проявляется при малых отклонениях выборки от предположений. В приведенных ниже примерах [13], построенных с использованием программной системы [10], демонстрируется, как практически отражаются различные малые отклонения от предположений на статистических выводах.

**Пример 1.** На рис. 6 приведены результаты моделирования выборки объемом  $N=1000$  в соответствии с логистическим распределением с функцией плотности

$$f(x) = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x-\mu)}{\sigma\sqrt{3}}\right\} / \left[1 + \exp\left\{-\frac{\pi(x-\mu)}{\sigma\sqrt{3}}\right\}\right]^2,$$

и параметрами  $\theta_0 = 2, \theta_1 = 1, \theta_2 = 0..$  При проверке согласия использовано асимптотически оптимальное группирование при числе интервалов  $k = 9$ . На этом и последующих рисунках для параметров распределений использованы обозначения  $t[0] = \theta_0, t[1] = \theta_1, t[2] = \theta_2,$   $t[0] = \theta_0, t[1] = \theta_1, t[2] = \theta_2,$   $t[0] = \theta_0, t[1] = \theta_1, t[2] = \theta_2,$  На рисунках отражаются результаты проверки гипотез о согласии: вычисленные значения  $S^*$  соответствующих статистик  $S$  и вероятности превышения полученного значения статистики при истинности нулевой гипотезы  $P\{S > S^*\}$ . Гипотеза о согласии не отвергается, если  $P\{S > S^*\} > \alpha$ . Проверка согласия осуществляется по критериям отношения правдоподобия,  $\chi^2$  Пирсона, применение которых предусматривает группирование наблюдений, а также по непараметрическим критериям Колмогорова, Смирнова,  $\omega^2$  и  $\Omega^2$  Мизеса [8]. Статистику критерия  $\omega^2$  называют статистикой Смирнова-Мизеса, статистику  $\Omega^2$  - Андерсона-Дарлингга.

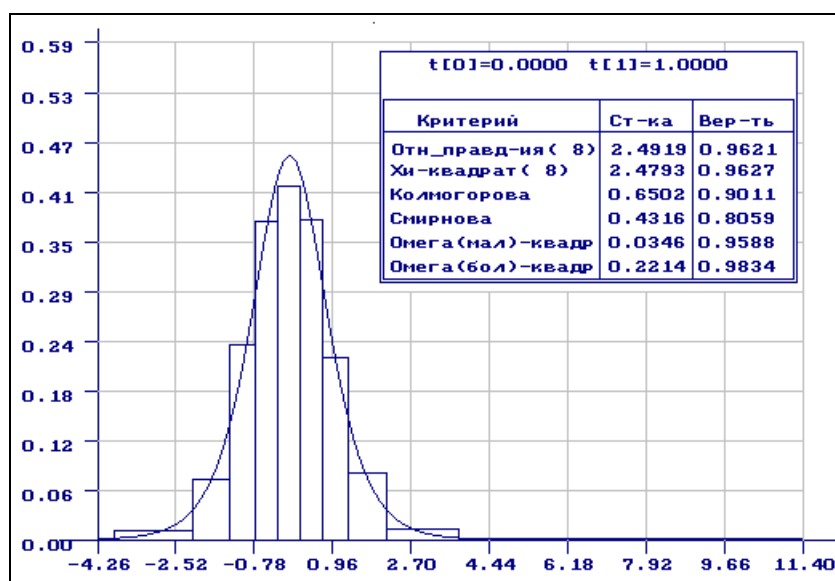


Рис. 6. Результаты моделирования логистического распределения

Посмотрим, что получается, если мы будем проверять согласие полученной выборки с нормальным распределением с параметрами  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_1 = 1$ . На рис. 7 представлены результаты проверки согласия при использовании в критериях отношения правдоподобия и  $\chi^2$  Пирсона равновероятного группирования. Как видим, по всем критериям, в том числе непараметрическим, при уровне значимости  $\alpha \leq 0.1327$  нет оснований для отклонения гипотезы о согласии.

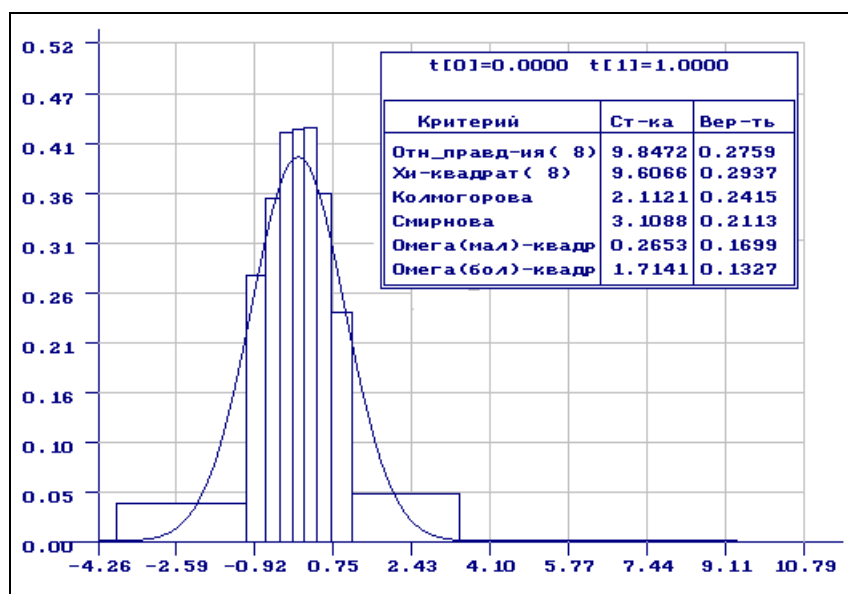


Рис. 7. Результаты проверки согласия выборки, распределенной по логистическому закону, с нормальным распределением (равновероятное группирование)

Результаты анализа, приведенные на рис. 8 отличаются тем, что в критериях отношения правдоподобия и  $\chi^2$  Пирсона использовалось асимптотически оптимальное группирование (табл. А.28-А.29,  $k = 9$ ). В этом случае гипотеза о согласии при  $\alpha > 0.0861$  должна быть отклонена. В данном примере логистическое и нормальное распределения имеют отличие в середине области определения.

**Пример 2.** На рис. 9 приведены результаты моделирования выборки объемом  $N = 200$  в соответствии с распределением Лапласа с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)$$

и параметрами  $\theta_0 = 1, \theta_1 = 1$ . Было высказано предположение, что наблюдаемая выборка принадлежит нормальному закону с параметрами  $\theta_0 = 1, \theta_1 = 1.2$ . Результаты проверки согласия с нормальным распределением представлены на рис. 10-11. Результатам анализа на рис. 10 соответствовало равновероятное

группирование в критериях согласия при числе интервалов  $k = 7$ , а на рис. 11 - асимптотически оптимальное группирование (табл. А.28-А.29,  $k = 7$ ). Как видим, в первом случае гипотеза о согласии будет принята, если уровень значимости  $\alpha \leq 0.1845$ , во втором - по критериям отношения правдоподобия и  $\chi^2$  Пирсона гипотеза о согласии должна быть отклонена. В отличие от предыдущего примера рассматриваемые здесь распределения отличаются на “хвостах”.

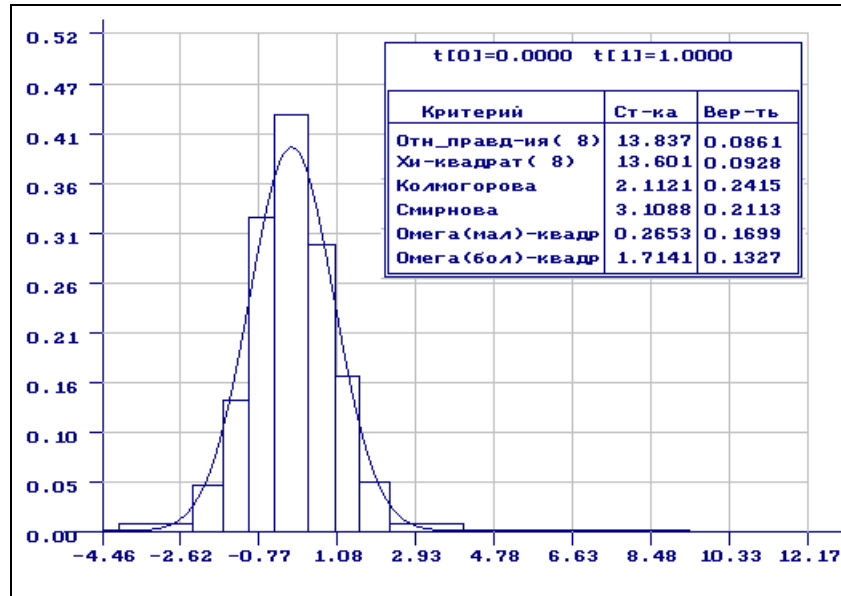


Рис. 8. Результаты проверки согласия выборки, распределенной по логистическому закону, с нормальным распределением (асимптотически оптимальное группирование)

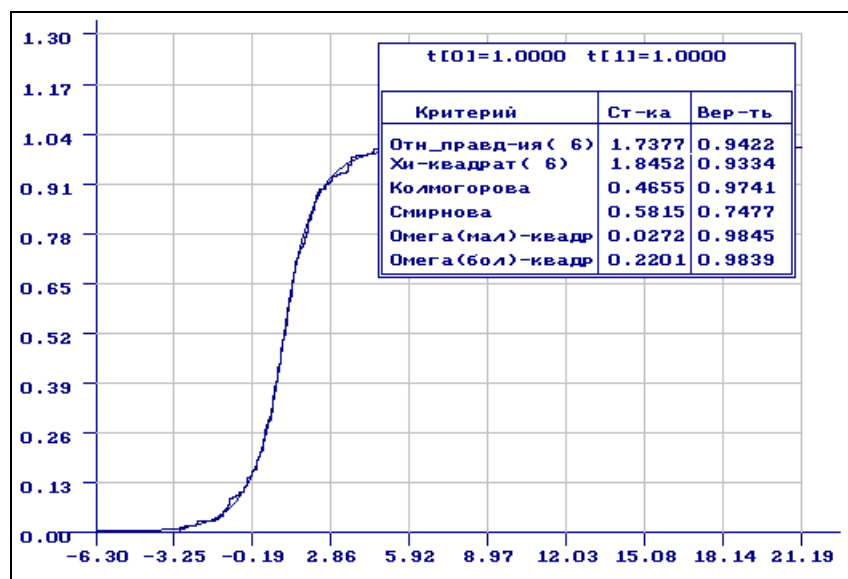


Рис.9. Результаты моделирования распределения Лапласа: эмпирическая функция и функция распределения Лапласа

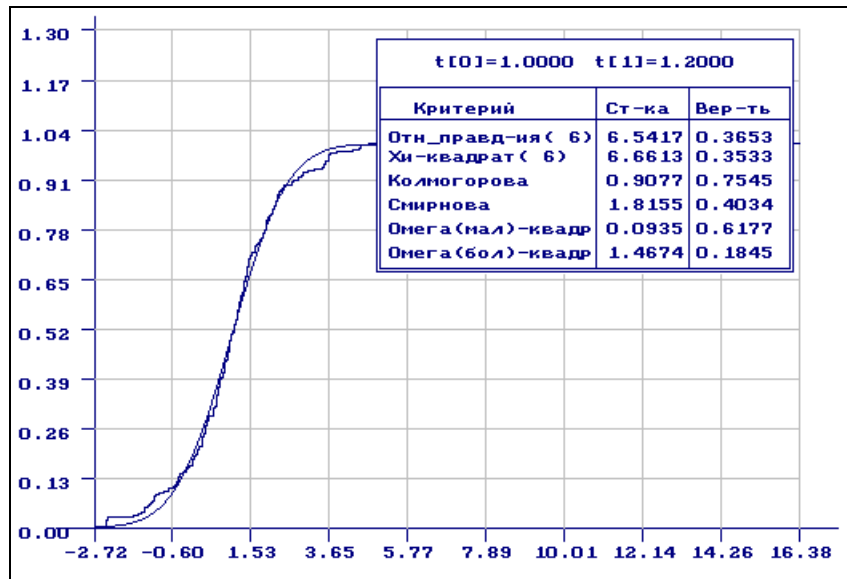


Рис. 10. Результаты проверки согласия выборки, распределенной по закону Лапласа, с нормальным распределением: эмпирическая функция и функция распределения нормального закона (равновероятное группирование)

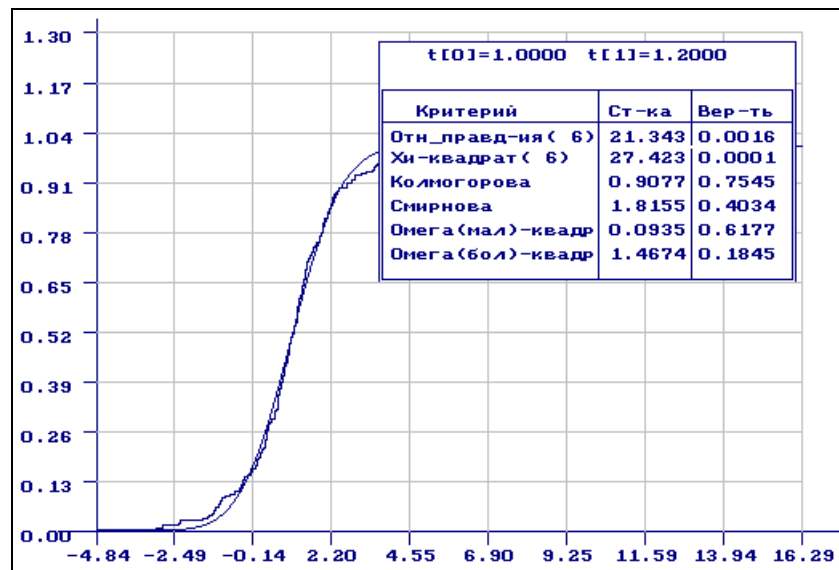


Рис. 11. Результаты проверки согласия выборки, распределенной по закону Лапласа, с нормальным распределением: эмпирическая функция и функция распределения нормального закона (асимптотически оптимальное группирование)

**Пример 3.** Выборка объёмом 200 наблюдений, смоделированная в соответствии с распределением Вейбулла с параметрами  $\theta_0 = 2$ ,  $\theta_1 = 2$ ,  $\theta_2 = 0$ , была “засорена” 10 наблюдениями нормального закона с параметрами  $\theta_0 = 2$ ,  $\theta_1 = 1$ ,  $\theta_2 = 0$ .. При анализе в данном примере осуществлялось группирование для числа интервалов  $k = 7$ . На рис. 12 отражены результаты проверки согласия “смеси” с исходным распределением Вейбулла при использовании равновероятного группирования, а на рис. 13 - асимптотически

оптимального (табл. А.22-А.23,  $k=7$ ). На рис. 14 приведены функция распределения Вейбулла и эмпирическая функция “смеси”. Как видим, и в данном случае при асимптотически оптимальном группировании критерии отношения правдоподобия и  $\chi^2$  Пирсона улавливают наличие отклонений от предположений.

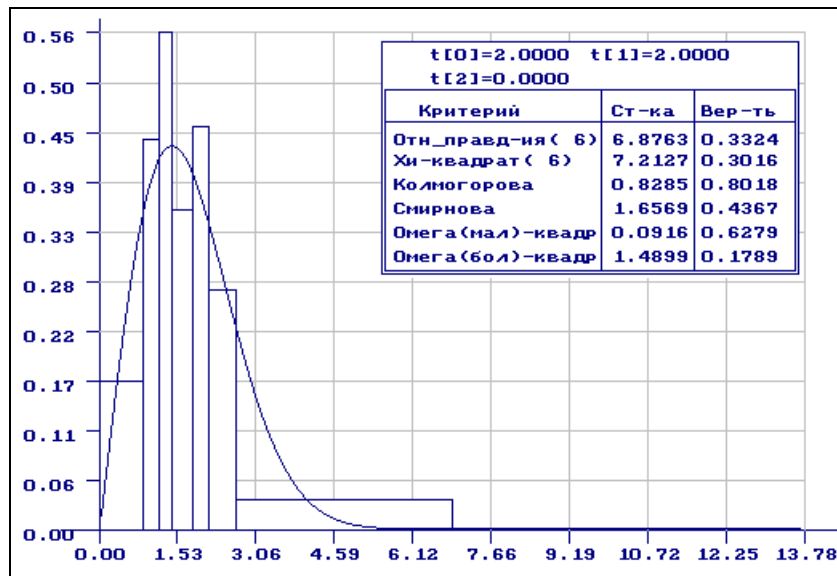


Рис. 12. Результаты проверки смеси с распределением Вейбулла с параметрами  $\theta_0 = 2, \theta_1 = 1, \theta_2 = 0$ .  
(равновероятное группирование)

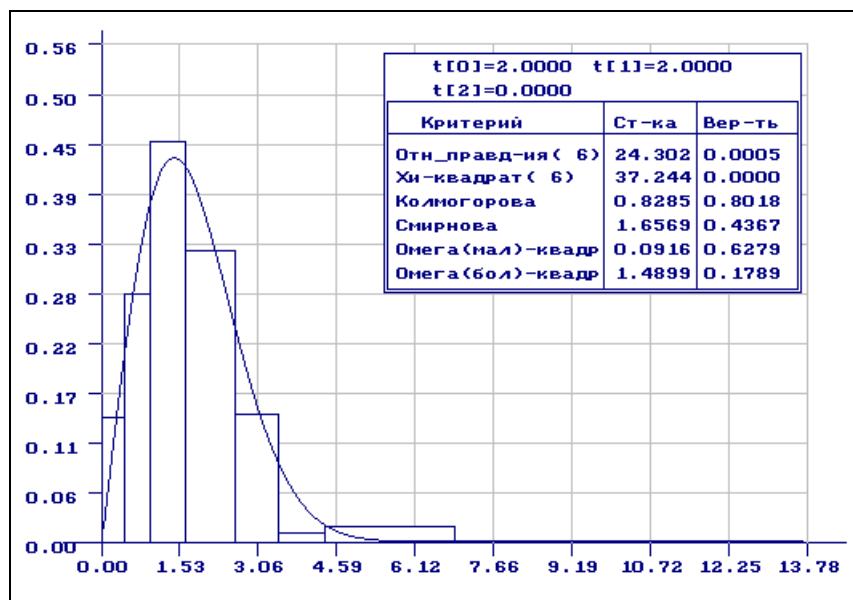


Рис. 13. Результаты проверки смеси с распределением Вейбулла с параметрами  $\theta_0 = 2, \theta_1 = 1, \theta_2 = 0$ .  
(асимптотически оптимальное группирование)

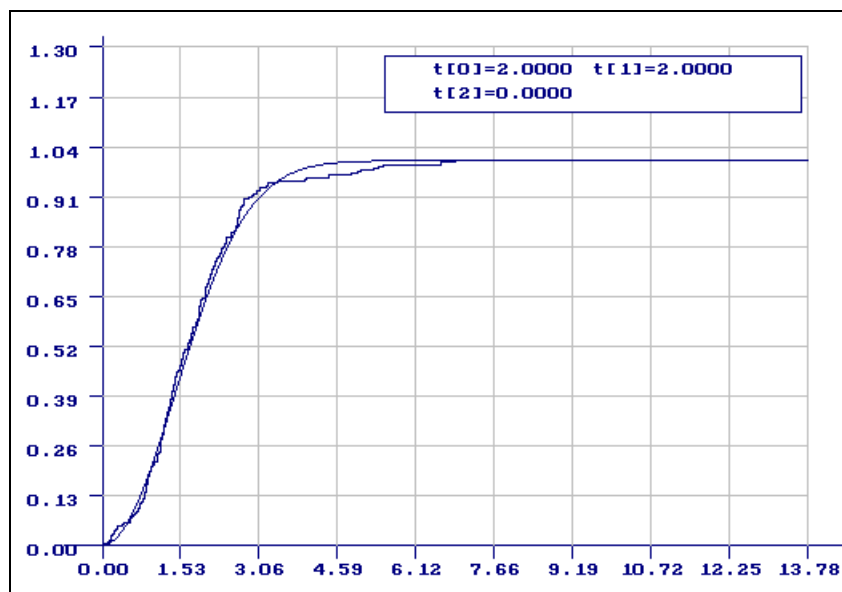


Рис. 14. Эмпирическая функция распределения “смеси” и теоретическая функция распределения Вейбулла с параметрами  $\theta_0 = 2$ ,  $\theta_1 = 1$ ,  $\theta_2 = 0$ .

Рассмотренные примеры показывают, что при использовании асимптотически оптимального группирования критерии типа  $\chi^2$  лучше, чем непараметрические критерии типа Колмогорова, Смирнова,  $\omega^2$  и  $\Omega^2$  Мизеса улавливают малые отклонения от предположений в наблюдаемых данных.

## 9. Характер влияния способов группирования и метода оценивания на распределения статистик типа $\chi^2$

В критериях согласия типа  $\chi^2$  при вычислении соответствующих им статистик осуществляют группирование наблюдений. Вычисленные по конкретной выборке значения рассматриваемых статистик очень сильно зависят от того, как сгруппированы данные: выбрали интервалы группирования одним способом - нулевая гипотеза  $H_0$  о согласии должна быть отвергнута, другим - нет оснований её отвергать. Очевидно, что *предельные распределения* статистик критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия *зависят* не только от числа оцененных параметров, но и *от способа группирования*, вида исследуемого закона распределения  $f(x, \theta)$ , метода оценивания и типа оцениваемого параметра.

Для статистики  $\chi^2$  Пирсона, вычисляемой в соответствии с соотношением (1), при справедливой **простой** гипотезе  $H_0$  предельное распределение  $g(S(H_0))$  есть  $\chi^2$ -распределение с числом степеней свободы  $k-1$ . При **сложной** гипотезе, если по выборке оценивалось  $p$  параметров закона,

статистика подчиняется  $\chi_r^2$ -распределению с  $k - p - 1$  степеней свободы. При справедливой альтернативной гипотезе  $H_0$  предельное распределение  $g(S(H_1))$  представляет собой нецентральное  $\chi^2$ -распределение с тем же числом степеней свободы и параметром нецентральности, определяемым соотношением (2).

В случае проверки **сложных** гипотез и оценивании по выборке параметров распределений использование в качестве предельных  $\chi_{k-m-1}^2$ -распределений справедливо лишь при определении оценок параметров по сгруппированным данным [1]. При вычислении же, например, оценок максимального правдоподобия по негруппированным данным предельное распределение статистики лежит между  $\chi_{k-1}^2$  и  $\chi_{k-m-1}^2$ .

Вышесказанное относится и к критерию отношения правдоподобия, статистика которого определяется соотношением (3).

$\chi_r^2$ -распределения используются в качестве предельных для статистик  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия независимо от того, каким образом сгруппированы данные в интервалы. При практическом использовании критериев согласия выбирают либо интервалы равной длины, либо интервалы равной вероятности (равной частоты), либо асимптотически оптимальные интервалы [15]. Использование интервалов равной вероятности было предложено ещё в работе [16]. Разбиение области определения случайной величины (размаха выборки) на интервалы равной длины неоднозначно. Более определенными способами являются равновероятное и асимптотически оптимальное группирование. При асимптотически оптимальном группировании мощность этих критериев для близких альтернатив максимальна [15].

Очевидно, что выбор способа группирования, в том числе равновероятного или асимптотически оптимального, при верной альтернативной гипотезе отражается на предельных распределениях статистик  $g(S(H_1))$ . При использовании асимптотически оптимального группирования распределения  $g(S(H_0))$  и  $g(S(H_1))$  максимально “сдвинуты” относительно друг друга [15]. Надо полагать, что распределение статистик  $g(S(H_0))$  при справедливой нулевой гипотезе также зависит от способа группирования.

Если значения одной и той же статистики так сильно отличаются при различных способах группирования, то можем ли мы при практическом использовании критерия согласия не учитывать этого и использовать один и тот же предельный закон? Насколько сильно законы распределения статистик отличаются от соответствующего  $\chi_r^2$ -распределения, особенно при определении оценок по негруппированным данным?

Для ответа на эти вопросы в работах [17,18] методами статистического моделирования были проведены исследования законов распределения статистик типа  $\chi^2$  при простых и различных сложных гипотезах, при спра-



ведливости гипотезы  $H_0$  и справедливости конкурирующей гипотезы  $H_1$ , при равновероятном и асимптотически оптимальном группировании.

На приводимых рисунках сопоставляются полученные в результате моделирования эмпирические распределения статистик с соответствующими  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределениями. Цифрой “1” на рисунках отмечено распределение статистики при асимптотически оптимальном группировании, а “2” - при равновероятном группировании. На рис. 15-17 в качестве примера представлены распределения статистики  $S_{\chi^2}$  при справедливой гипотезе  $H_0$  для 5 интервалов группирования и оценивании по негруппированным данным параметров нормального распределения.

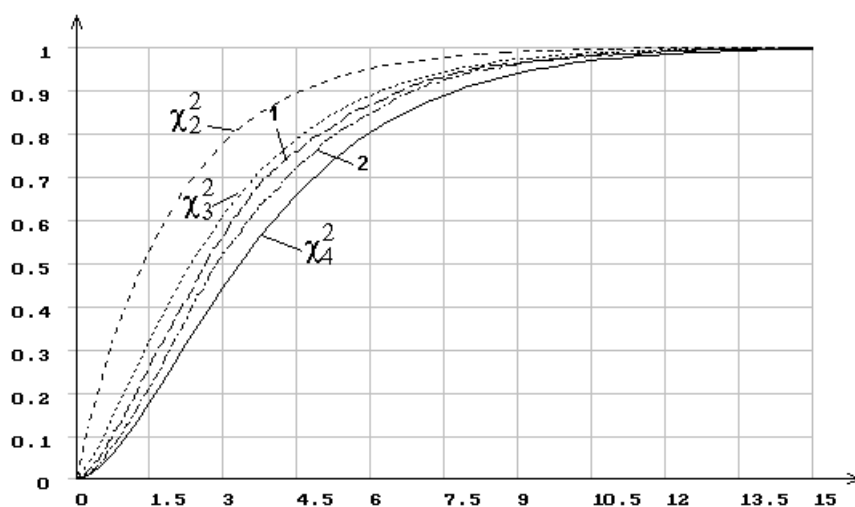


Рис. 15. Распределение статистики  $S_{\chi^2}$  при 5 интервалах группирования и оценивании масштабного параметра нормального распределения.

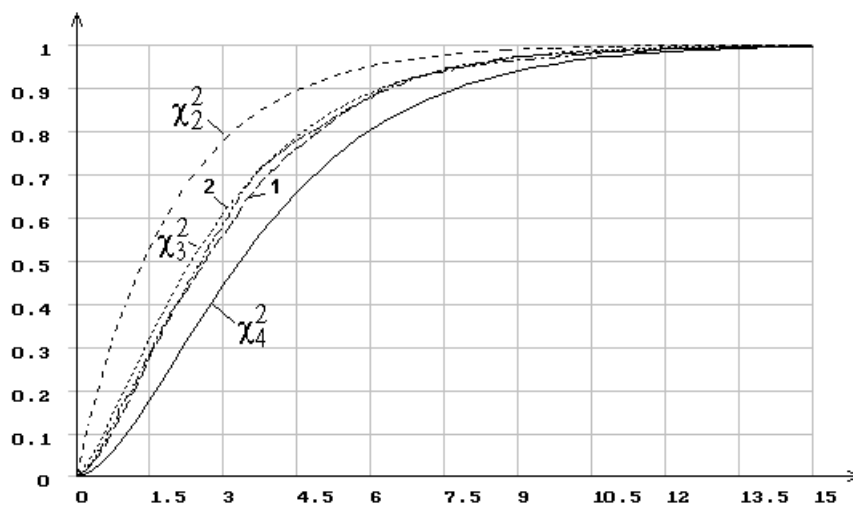


Рис. 16. Распределение статистики  $S_{\chi^2}$  при 5 интервалах группирования и оценивании параметра сдвига нормального распределения.

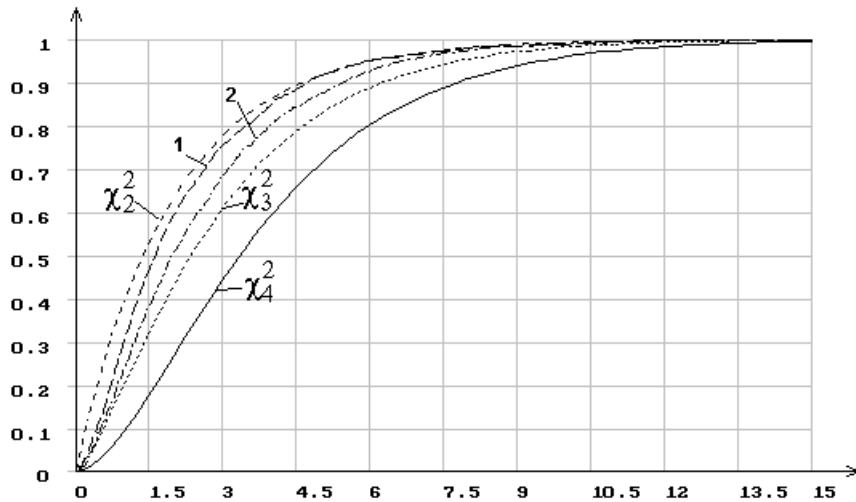


Рис. 17. Распределение статистики  $S_{\chi^2}$  при 5 интервалах группирования и оценивании двух параметров нормального распределения.

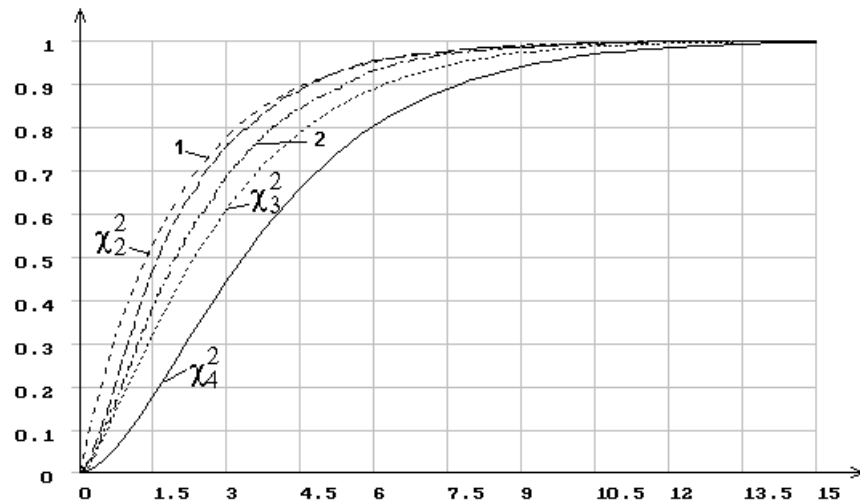


Рис. 18. Распределение статистики  $S_{оп}$  при 5 интервалах группирования и оценивании двух параметров нормального распределения.

Для сравнения на рис. 18 представлены распределения статистики  $S_{..}$  при 5 интервалах группирования и оценивании обоих параметров нормального распределения при асимптотически оптимальном и равновероятном группировании.

Какие изменения происходят с распределениями статистик с ростом числа интервалов показывают рис. 19-21, где приведены распределения статистики  $S_{\chi^2}$  при 7 интервалах группирования и оценивании параметров нормального распределения.

Результаты моделирования и анализа показали, что распределения статистик критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия при проверке сложных гипотез и вычислении оценок по негруппированным данным существенно отличаются при различных способах группирования. При этом эмпирический закон распределения статистики при асимптотически оптимальном

группировании ближе к теоретическому  $\chi_{k-m-1}^2$ -распределению, чем при равновероятном группировании. Более того, *распределения статистик зависят* не только от количества оцененных по выборке параметров, но и *от того, какой параметр оценивался*. Например, оценивание параметра сдвига приводит к более значительному изменению распределения статистики, чем оценивание масштабного параметра. Распределения статистик зависят и от вида наблюдаемого закона. Но эта зависимость не проявляется так резко, как в случае применения для проверки сложных гипотез непараметрических критериев, например, типа Колмогорова.

Следует отметить, что эмпирические распределения статистики отношения правдоподобия оказываются ближе к предельному теоретическому  $\chi_{k-m-1}^2$ -распределению, чем соответствующие эмпирические распределения статистики  $\chi^2$  Пирсона.

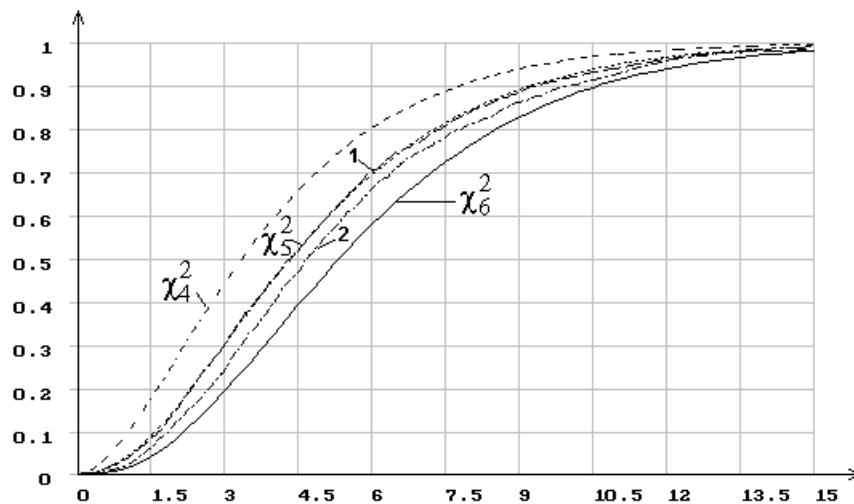


Рис. 19. Распределение статистики  $S_{\chi^2}$  при 7 интервалах и оценивании масштабного параметра нормального распределения

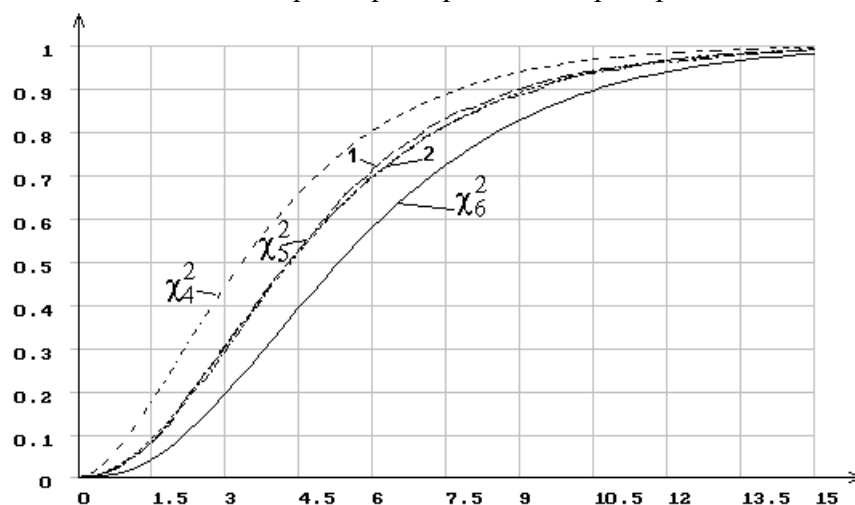


Рис. 20. Распределение статистики  $S_{\chi^2}$  при 7 интервалах и оценивании параметра сдвига нормального распределения

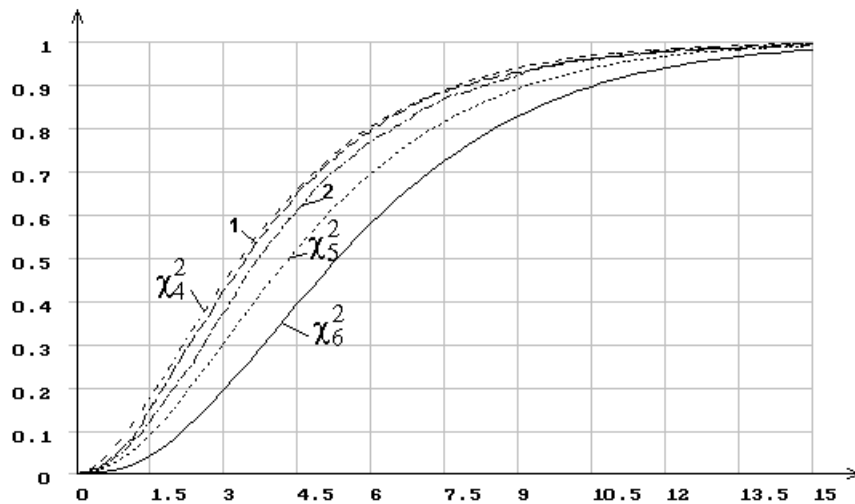


Рис. 21. Распределение статистики  $S_{\chi^2}$  при 7 интервалах и оценивании двух параметров нормального распределения.

$\chi_r^2$ -распределение с числом степеней свободы  $r$  является частным случаем гамма-распределения с основным параметром, равным  $r/2$ , и масштабным - 0.5. Оценивание одного из параметров учитывается уменьшением числа степеней свободы на 1. На самом деле, если измерять изменение предельного закона “в степенях свободы”, то оказывается, что оценивание даже параметра сдвига обычно приводит к изменению “числа степеней” на величину меньшую 1, еще к меньшему изменению в степенях свободы приводит оценивание масштабного параметра. Это особенно заметно при оценивании 2-х параметров и указывает на то, что использование в критериях согласия  $\chi_{k-m-1}^2$ -распределения чревато занижением вероятности вида  $P\{S > S^*\}$  и определенным риском отвергнуть верную гипотезу  $H_0$ . Занижение  $P\{S > S^*\}$  более существенно при малом числе интервалов группирования. В целом этот риск существенно меньше в случае применения асимптотически оптимального группирования.

Полученные в результате моделирования эмпирические законы распределения статистик рассматриваемых критериев практически всегда с достаточно высокой точностью описываются *гамма-распределением*.

Использование в критериях согласия  $\chi_{k-m-1}^2$ -распределения для вычисления вероятности вида  $P\{S > S^*\}$  связано с риском отвергнуть верную гипотезу  $H_0$ . В случае применения асимптотически оптимального группирования этот риск существенно меньше. В качестве примера в табл. 1 приводятся значения вероятностей  $P\{S > S^*\}$  для различных значений статистики  $S^*$ , вычисленные по  $\chi_4^2$ -распределению и в соответствии с “действительными” распределениями статистик при 7 интервалах группирования и оценивании 2-х

параметров нормального распределения. Эти данные, вместе с другими результатами, позволяют судить о том, что в случае применения асимптотически оптимального группирования и использования  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределения ошибки при вычислении вероятности  $P\{S > S^*\}$  практически незначимы.

Таблица 1.

Значения вероятностей вида $P\{S > S^*\}$					
Знач. $S^*$	Распределение $\chi^2_4$	Распределение статистики $S_{\cdot}$		Распределение статистики $S_{\chi^2}$	
		При АОГ	При РВГ	При АОГ	При РВГ
3	0.5578	0.5876	0.6293	0.5914	0.6304
4	0.4060	0.4303	0.4700	0.4356	0.4716
5	0.2873	0.3049	0.3384	0.3108	0.3403
6	0.1991	0.2108	0.2370	0.2165	0.2389
7	0.1359	0.1430	0.1626	0.1481	0.1643
8	0.0916	0.0956	0.1096	0.0999	0.1111
9	0.0611	0.0632	0.0729	0.0666	0.0741
10	0.0404	0.0413	0.0480	0.0440	0.0489
11	0.0266	0.0268	0.0313	0.0288	0.0320
12	0.0173	0.0173	0.0202	0.0187	0.0207
13	0.0113	0.0110	0.0130	0.0120	0.0133

Исследование распределений статистик при вычислении ОМП по негруппированным данным и дальнейшем увеличении числа интервалов показало возрастающую близость распределений статистик к  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределениям. Это говорит о том, что при использовании для вычисления вероятностей вида  $P\{S > S^*\}$   $\chi^2_{k-m-1}$ -распределения с ростом числа интервалов (при достаточном объеме выборки) ошибки будут снижаться.

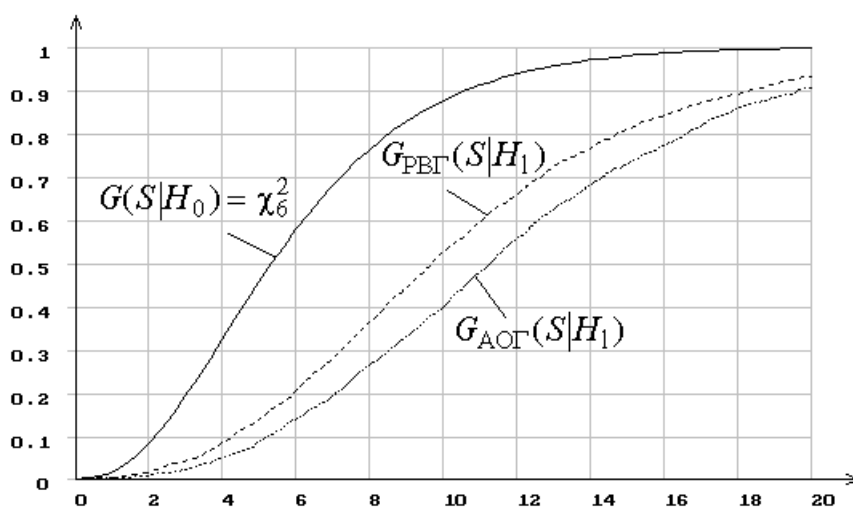


Рис. 22. Распределения статистики  $S_{\chi^2}$  при проверке простой гипотезы  $H_0$

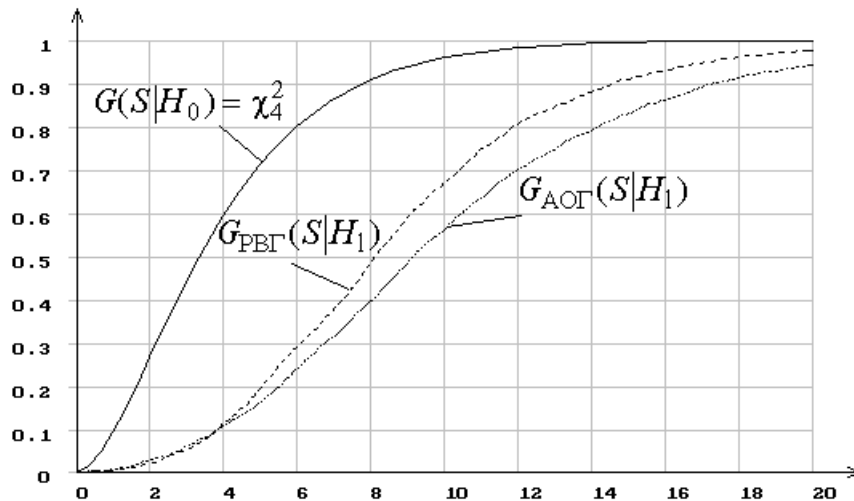


Рис. 23. Распределения статистики  $S_{\chi^2}$  при проверке сложной гипотезы  $H_0$

Как отражается способ группирования на предельных распределениях статистики  $S_{\chi^2}$  при справедливости альтернативной гипотезы  $H_1$  показано на рис. 22-23, где приведены полученные в результате моделирования функции распределения  $G(S(H_1))$  при использовании асимптотически оптимального и равновероятного группирования, когда гипотеза  $H_0$  соответствует нормальному закону распределения, а гипотеза  $H_1$  - логистическому. Эти два закона достаточны близки и трудно различаются с помощью критериев согласия. На рис. 22 приведены эмпирические распределения статистики при простой гипотезе  $H_0$ , а на рис. 23 - при сложной. Количество интервалов группирования - 7. Из рисунков видно, насколько выше мощность критерия при асимптотически оптимальном группировании по сравнению равновероятным.

Моделирование распределений статистики  $Y_N^2(\theta)$ , определяемой соотношением (12), при использовании оценок максимального правдоподобия параметров по негруппированным данным показало, что её эмпирические распределения при верной нулевой гипотезе  $g(S(H_0))$  также зависят от способа группирования. Но это различие одного и того же порядка для распределений статистик при оценивании (для статистики  $Y_N^2(\theta)$ ) и без оценивания параметров (для статистики  $S_{\chi^2}$ ). В целом законы распределения, описывающие выборки, достаточно близки  $\chi_{k-1}^2$ -распределениям. О степени близости можно судить по оценкам параметров гамма-распределения, полученным по смоделированным и представленным в табл. 2 выборкам статистики  $Y_N^2(\theta)$  ( $H_0$ : нормальное распределение, моделировалось 2000 выборок объемом  $N = 500$ , число интервалов  $k = 5$ ).

Таблица 2.

Оцениваемый параметр нормального закона	Параметры “предельного” гамма-распределения при АОГ	Параметры “предельного” гамма-распределения при РВГ
Параметры не оценивались	2.0508, 0.5302, 0.0	1.9855, 0.4770, 0.0
Масштабный параметр	2.0612, 0.4988, 0.0	1.9195, 0.4827, 0.0
Параметр сдвига	1.9702, 0.5063, 0.0	1.9833, 0.5035, 0.0
Оба параметра	1.9366, 0.5051, 0.0	2.0345, 0.5089, 0.0

Распределения статистики  $Y_N^2(\theta)$  при справедливой конкурирующей гипотезе  $g(S(H_1))$ , также как и распределения статистики  $S_{\chi^2}$ , существенно зависят от способа группирования.

Результаты компьютерного моделирования и анализа позволили сделать следующие выводы. Если по наблюдаемой выборке не оценивались параметры закона (**простая** гипотеза), то распределения статистик типа  $\chi^2$  при справедливой гипотезе  $H_0$  достаточно хорошо согласуются с  $\chi_{k-1}^2$  как при равновероятном, так и при асимптотически оптимальном группировании. Различия между распределениями статистик при равновероятном и асимптотически оптимальном группировании заметны, но не значимы. При этом распределения статистик при равновероятном группировании в целом оказываются ближе к  $\chi_{k-1}^2$  распределению.

В условиях, когда оценки параметров определяются по негруппированным наблюдениям, распределения этих статистик хорошо согласуются с гамма-распределениями. При этом:

1. Распределения статистик критериев отношения правдоподобия и  $\chi^2$  Пирсона существенно зависят от способа группирования, особенно при малом числе интервалов.
2. Распределения статистик зависят не только от количества оцененных по выборке параметров, но и от того, какой параметр оценивался. В частности, оценивание параметра сдвига приводит к более значительному изменению распределений статистик, чем оценивание масштабного параметра. Картина аналогичная той, что наблюдается для распределений статистик типа Колмогорова, Смирнова и  $\omega^2$  Мизеса при проверке сложных гипотез [19].
3. Эмпирические распределения статистики отношения правдоподобия оказываются ближе к предельному теоретическому  $\chi_{k-m-1}^2$ -распределению, чем соответствующие эмпирические распределения статистики  $\chi^2$  Пирсона.
4. В целом, при малом числе интервалов и оценивании  $m$  параметров число степеней свободы предельного распределения уменьшается на “число степеней свободы” меньше  $m$ . При этом эмпирический закон

распределения статистики при асимптотически оптимальном группировании ближе к теоретическому  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределению, чем при равновероятном группировании.

5. С ростом числа интервалов  $k$  разность между функцией распределения  $\chi^2_{k-m-1}$  и действительными функциями распределения статистик отношения правдоподобия и  $\chi^2$  Пирсона в случае асимптотически оптимального группирования убывает существенно быстрее.
6. Численный анализ показал, что при использовании для вычисления вероятностей  $P\{S > S^*\}$  функции распределения  $\chi^2_{k-m-1}$  при асимптотически оптимальном группировании и малом числе интервалов ( $k < 10$ ) при малых значениях  $P\{S > S^*\}$  (именно при малых вероятностях принимается решение отклонить гипотезу  $H_0$  или нет) погрешность имеет величины, которые не существенны для практических задач. То есть в этом случае, используя  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределение, мы не совершаем большой ошибки. В то же время ошибка в определении критического значения  $S_\alpha$  может быть достаточно большой. Поэтому целесообразно принимать решение именно по величине  $P\{S > S^*\}$ .
7. С ростом количества интервалов (при соответствующем объеме выборки) отличие распределений статистик  $S_{\chi^2}$  и  $S_{\cdot}$  от распределений  $\chi^2_{k-m-1}$  и при асимптотически оптимальном и при равновероятном группировании становится несущественным.

***При справедливости конкурирующей гипотезы  $H_1$  распределения статистик типа  $\chi^2$  и при простых и при сложных гипотезах сильно зависят от варианта группирования.*** Разность  $G(S(H_0)) - G(S(H_1))$  при близких альтернативах и асимптотически оптимальном группировании максимальна, следовательно, максимальна мощность критерия [13].

## 10. Выбор числа интервалов

По поводу выбора числа интервалов проведено немало исследований, существует достаточно много противоречивых рекомендаций, часть из которых приведена в [14]. Отметим, что все соотношения для определения количества интервалов носят эмпирический характер и обычно дают завышенные величины.

При асимптотически оптимальном группировании относительно скалярного параметра при 10-11 интервалах в группированной выборке сохраняется около 98% информации, при оптимальном группировании относительно вектора параметров (два параметра) для 15 интервалов - около 95%. Дальнейшее увеличение количества интервалов существенного значения не имеет.



Выбор конкретного числа интервалов должен осуществляться из следующих соображений. При оптимальном группировании вероятности попадания в интервалы в общем случае не равны. Обычно минимальны вероятности попадания в крайние интервалы. Поэтому  $k$  желательно выбирать из условия, чтобы для любого интервала при оптимальном группировании ожидаемое количество наблюдений  $NP_i(\theta)$  было не менее  $5 \div 10$ . По крайней мере минимальная ожидаемая частота должна быть больше 1.

При разбиении области изменения случайной величины на равновероятные интервалы или интервалы равной длины при выборе количества интервалов следует придерживаться рекомендаций, приведенных для асимптотически оптимального группирования.

## **11. Рекомендации по использованию асимптотически оптимального группирования в критериях согласия**

Применяя критерии согласия типа  $\chi^2$ , можно по разному разбивать область определения случайной величины на интервалы: равной длины, равных вероятностей или асимптотически оптимальные.

Использование асимптотически оптимальных интервалов обеспечивает максимальную мощность используемого критерия, снижает риск принятия неверной нулевой гипотезы  $H_0$ .

Если гипотеза  $H_0$  справедлива или, наоборот, совершенно не соответствует характеру выборки, то выводы по критериям согласия при равновероятном, равноотстоящем и асимптотически оптимальном группировании обычно оказываются очень близкими по вычисляемой величине вероятности  $P\{S > S^*\} > \alpha$ . И гипотеза  $H_0$  при любом группировании однозначно принимается или однозначно отвергается.

Наличие в выборке малых отклонений от предположений (от гипотезы  $H_0$ ) в случае равновероятного и равноотстоящего группирования оказывается незамеченным критерием, а в случае асимптотически оптимального группирования эти отклонения будут заметны, что в принципе снижает риск принятия неверной нулевой гипотезы  $H_0$ .

Естественно, что применяя критерии согласия типа  $\chi^2$  необязательно использовать только асимптотически оптимальное группирование наблюдений. Можно использовать и равновероятное группирование, и разбиение на интервалы равной длины. Но тогда мы должны помнить, что в этом случае критерии типа  $\chi^2$  будут хуже различать близкие гипотезы (близкие альтернативы).

В приложении А приведены таблицы асимптотически оптимального группирования для ряда распределений. Представлены таблицы двух видов. В

таблицах первого рода содержатся граничные точки в виде, инвариантном относительно параметров распределения, в таблицах другого - вероятности попадания в соответствующие интервалы.

Порядок использования асимптотически оптимального группирования в связи с конкретным законом распределения определяется таблицей 3. В строках таблицы отражены функция плотности закона распределения, количество информации Фишера о соответствующем параметре по группированным и негруппированным данным, указываются номера таблиц в приложении А, в которых содержатся оптимальные для данной ситуации граничные точки в виде  $t_i = \varphi(x_i, \theta)$ , инвариантном относительно  $\theta$ , и соответствующие значения вероятностей  $P_i$  попадания наблюдений в  $i$ -й интервал.

Для тех законов распределения, для которых решение задачи асимптотически оптимального группирования нельзя получить в виде, инвариантном относительно параметров распределений, например, для распределений типа Накагами, бета- и т.п., и таблицы асимптотически оптимального группирования отсутствуют, в соответствующих колонках табл.3 стоят прочерки. В таких случаях для того, чтобы применить асимптотически оптимальное группирование, можно рекомендовать решение задач асимптотически оптимального группирования вида (12)-(13) в процессе проверки согласия при определенных значениях параметров, используя содержащиеся в табл. 3 выражения для элементов информационной матрицы Фишера по группированным данным.

Для законов распределения, определяемых одним параметром, (экспоненциального, Парето, Рэлея и т.п.) одна и та же пара таблиц асимптотически оптимального группирования ( $t_i$  и  $P_i$ ) используется при проверке *простых* и *сложных* гипотез.

Для законов распределения, определяемых 2-мя параметрами, в случае *сложной гипотезы и оценивании только одного параметра* требуемая пара таблиц асимптотически оптимального группирования указана в строке для этого параметра. В случае *сложной гипотезы и оценивании 2-х параметров* или в случае *простой гипотезы* используется пара таблиц, указанная в строке с двумя параметрами. В колонках для информационного количества Фишера по группированным и негруппированным данным в такой строке даны выражения для недиагональных элементов соответствующих информационных матриц  $J(\theta_i, \theta_j)$ , а  $J(\theta_i, \theta_j) = J(\theta_j, \theta_i)$ .

Например, при оценивании по выборке только параметра сдвига нормального закона должна использоваться пара таблиц А.24-А.25, при оценивании только параметра масштаба - пара таблиц А.26-А.27, а при проверке простых гипотез и сложных гипотез, сопровождаемых оцениванием по данной выборке обоих параметров нормального закона, - пара таблиц А.28-А.29.

Таблица 3.

**Функции плотности распределений, элементы информационных матриц Фишера по группированным и негруппированным наблюдениям, соответствующие таблицы асимптотически оптимального группирования**

№ п/п	Функция плотности распределения	Пар-рас-я	Количество информации Фишера для параметра		Таблицы АОГ		
			по группированным наблюдениям	по негрупп-м	$t_i$	$P_i$	
1	2	3	4		5	6	7
1.	Экспоненциальное $f(x) = \theta_0 e^{-\theta_0(x-\theta_1)}$ , $x \in (\theta_1, \infty)$ , $t_i = \theta_0(x_i - \theta_1)$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{(t_i e^{-t_i} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}})^2}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$		$\frac{1}{\theta_0^2}$	A.1	A.2
2.	Полунормальное $\frac{2}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta_1)^2 / 2\theta_0^2}$ , $x \in (\theta_1, \infty)$ , $t_i = (x_i - \theta_1) / \theta_0$	$\theta_0$	$\frac{2}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{(t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2/2} - t_i e^{-t_i^2/2})^2}{\pi \{\Phi_0(t_i) - \Phi_0(t_{i-1})\}}$ , $\Phi_0(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt$		$\frac{2}{\theta_0^2}$	A.6	A.7
3.	Рэлея $f(x) = \frac{(x-\theta_1)}{\theta_0^2} e^{-(x-\theta_1)^2 / 2\theta_0^2}$ $x \in (\theta_1, \infty)$ , $t_i = (x_i - \theta_1) / \theta_0$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{(t_{i-1}^2 e^{-t_{i-1}^2/2} - t_i^2 e^{-t_i^2/2})^2}{e^{-t_{i-1}^2/2} - e^{-t_i^2/2}}$		$\frac{4}{\theta_0^2}$	A.3	A.2
4.	Максвелла $f(x) = \frac{2(x-\theta_1)^2}{\theta_0^3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}}$ $x \in (\theta_1, \infty)$ , $t_i = (x_i - \theta_1) / \theta_0$	$\theta_0$	$\frac{4}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_{i-1}^3 \varphi(t_{i-1}) - t_i^3 \varphi(t_i)]^2}{\Phi_0(t_i) - 2t_i \varphi(t_i) - \Phi_0(t_{i-1}) + 2t_{i-1} \varphi(t_{i-1})}$		$\frac{6}{\theta_0^2}$	A.4	A.5

Продолжение таблицы 3.

1	2	3	4	5	6	7
5.	<p>Модуля нормального вектора</p> $\frac{2(x - \theta_1)^{m-1}}{(2\theta_0^2)^{m/2} \Gamma(m/2)} e^{-(x-\theta_1)^2/2\theta_0^2}$ <p><math>x \in (\theta_1, \infty)</math>,  <math>t_i = (x_i - \theta_1) / \theta_0</math>,  <math>\xi = 2^{m/2-1} \Gamma(m/2)</math></p>	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( t_{i-1}^m e^{-t_{i-1}^2/2} - t_i^m e^{-t_i^2/2} \right)^2}{\xi^2 [F(t_i) - F(t_{i-1})]}$ <p>при четном <math>m</math></p> $F(t) = 1 - e^{-t^2/2} \left( 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \dots + \frac{t^{m-2}}{2^{m/2-1} \Gamma(m/2)} \right)$ <p>при нечетном -  <math>F(t) = \Phi_0(t) -</math></p> $- e^{-t^2/2} \left( \frac{t}{2^{1/2} \Gamma(3/2)} + \frac{t^3}{2^{3/2} \Gamma(5/2)} + \dots + \frac{t^{m-2}}{2^{m/2-1} \Gamma(m/2)} \right)$	$\frac{2m}{\theta_0^2}$ <p><math>m=4</math> A.8 A.9  <math>m=5</math> A.10 A.11  <math>m=6</math> A.12 A.13  <math>m=7</math> A.14 A.15  <math>m=8</math> A.16 A.17  <math>m=9</math> A.18 A.19</p>		
6.	<p>Парето</p> $\theta_0 \theta_1^{\theta_0} x^{-\theta_0-1},$ <p><math>x \in (\theta_1, \infty)</math>,  <math>t_i = (x_i / \theta_1)^{-\theta_0}</math></p>	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{(t_{i-1} \ln t_{i-1} - t_i \ln t_i)^2}{t_{i-1} - t_i}$	$\frac{1}{\theta_0^2}$	A.1	A.2
7.	<p>Эрланга порядка <math>m</math></p> $\frac{\theta_1^m}{\Gamma(m)} (x - \theta_2)^{m-1} e^{-\theta_1(x-\theta_2)}$ <p><math>x \in (\theta_2, \infty)</math>,  <math>t_i = \theta_1(x_i - \theta_2)</math></p>	$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( t_i^m e^{-t_i} - t_{i-1}^m e^{-t_{i-1}} \right)^2}{\Gamma(m) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{m-1} e^{-t} dt}$	$\frac{m}{\theta_1^2}$	A.54	-

Продолжение таблицы 3.

1	2	3	4	5	6	7
8.	Лапласа $\frac{\theta_0}{2} e^{-\theta_0 x-\theta_1 }$ , $x \in (-\infty, \infty)$ , $t_i = \theta_0(x_i - \theta_1)$	$\theta_0$	$\sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial P_i(\theta)}{\partial \theta_0} \right)^2 / P_i(\theta),$ $P_i(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{t_i} - e^{t_{i-1}}), & t_i < 0; \\ \frac{1}{2}(e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}), & t_{i-1} > 0; \\ 1 - \frac{1}{2}(e^{-t_i} + e^{t_{i-1}}), & t_{i-1} < 0 < t_i; \end{cases}$	$\frac{1}{\theta_0^2}$	A.46 A.47	A.48 A.49
9.	Нормальное $\frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_0)^2}{2\theta_1^2}}$ , $x \in (-\infty, \infty)$ , $t_i = \frac{x_i - \theta_0}{\theta_1}$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i)]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})},$ $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-t^2/2} dt$	$\frac{1}{\theta_1^2}$	A.24	A.25
		$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_{i-1}\varphi(t_{i-1}) - t_i\varphi(t_i)]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{2}{\theta_1^2}$	A.26	A.27
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})][t_{i-1}\varphi(t_{i-1}) - t_i\varphi(t_i)]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	0	A.28	A.29

Продолжение таблицы 3.

1	2	3	4	5	6	7
10.	Логарифмически ( $ln$ ) $\frac{1}{x\theta_1\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \theta_0)^2 / 2\theta_1^2},$ $x \in (0, \infty),$ $t_i = \frac{\ln x_i - \theta_0}{\theta_1}$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i)]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{1}{\theta_1^2}$	A.24	A.25
		$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_{i-1}\varphi(t_{i-1}) - t_i\varphi(t_i)]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{2}{\theta_1^2}$	A.26	A.27
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})][t_{i-1}\varphi(t_{i-1}) - t_i\varphi(t_i)]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	0	A.28	A.29
11.	Логарифмически ( $lg$ ) $\frac{1}{x\theta_1 \ln 10 \sqrt{2\pi}} e^{-(\lg x - \theta_0)^2 / 2\theta_1^2}$ $x \in (0, \infty),$ $t_i = \frac{\lg x_i - \theta_0}{\theta_1}$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i)]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{1}{\theta_1^2}$	A.24	A.25
		$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_{i-1}\varphi(t_{i-1}) - t_i\varphi(t_i)]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{2}{\theta_1^2}$	A.26	A.27
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})][t_{i-1}\varphi(t_{i-1}) - t_i\varphi(t_i)]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	0	A.28	A.29

Продолжение таблицы 3.

1	2	3	4	5	6	7
12.	<p>Коши</p> $\frac{\theta_0}{\pi[\theta_0^2 + (x - \theta_1)^2]},$ <p><math>x \in (-\infty, \infty),</math></p> <p><math>t_i = (x_i - \theta_1) / \theta_0</math></p>	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\pi} \frac{\left[ \frac{t_{i-1}}{1+t_{i-1}^2} - \frac{t_i}{1+t_i^2} \right]^2}{\arctg t_i - \arctg t_{i-1}}$	$\frac{1}{2\theta_1^2}$	A.36	A.37
		$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\pi} \frac{\left[ \frac{1}{1+t_{i-1}^2} - \frac{1}{1+t_i^2} \right]^2}{\arctg t_i - \arctg t_{i-1}}$	$\frac{1}{2\theta_1^2}$	A.38	A.39
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\pi\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( \frac{t_{i-1}}{1+t_{i-1}^2} - \frac{t_i}{1+t_i^2} \right) \left( \frac{1}{1+t_{i-1}^2} - \frac{1}{1+t_i^2} \right)}{\arctg t_i - \arctg t_{i-1}}$	0	A.40	$P_i = \frac{1}{k}$
13.	<p>Логистическое</p> $\frac{\pi}{\theta_1\sqrt{3}} \frac{\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\}}{\left[1+\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\}\right]^2}$ <p><math>x \in (-\infty, \infty),</math></p> <p><math>t_i = \pi(x_i - \theta_0) / \theta_1\sqrt{3}</math></p>	$\theta_0$	$\frac{\pi^2}{\theta_1^2 3} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ \frac{e^{-t_i}}{(1+e^{-t_i})^2} - \frac{e^{-t_{i-1}}}{(1+e^{-t_{i-1}})^2} \right]^2}{(1+e^{-t_i})^{-1} - (1+e^{-t_{i-1}})^{-1}}$	$\frac{\pi^2}{\theta_1^2 9}$	A.41	$P_i = \frac{1}{k}$

Продолжение таблицы 3.

1	2	3	4	5	6	7
		$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \left[ \frac{\frac{t_i e^{-t_i}}{(1+e^{-t_i})^2} - \frac{t_{i-1} e^{-t_{i-1}}}{(1+e^{-t_{i-1}})^2}}{(1+e^{-t_i})^{-1} - (1+e^{-t_{i-1}})^{-1}} \right]^2$	$\frac{1}{\theta_1^2} \frac{\pi^2 + 3}{9}$	A.42	A.43
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{\pi^2}{\theta_1^2 \sqrt{3}} \sum_{i=1}^k \left[ \frac{\frac{t_i e^{-t_i}}{(1+e^{-t_i})^2} - \frac{t_{i-1} e^{-t_{i-1}}}{(1+e^{-t_{i-1}})^2}}{(1+e^{-t_i})^{-1} - (1+e^{-t_{i-1}})^{-1}} \right] \times$ $\times \left[ \frac{e^{-t_i}}{(1+e^{-t_i})^2} - \frac{e^{-t_{i-1}}}{(1+e^{-t_{i-1}})^2} \right]$	0	A.44	A.45
14.	Вейбулла $\frac{\theta_0(x - \theta_2)^{\theta_0 - 1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp \left\{ - \left( \frac{x - \theta_2}{\theta_1} \right)^{\theta_0} \right\}$ $x \in (\theta_2, \infty),$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_i \ln t_i e^{-t_i} - t_{i-1} \ln t_{i-1} e^{-t_{i-1}}]^2}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	$\frac{1}{\theta_0^2} \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} + C^2 - 2C \right)$	A.20	A.21



Продолжение таблицы 3.

1	2	3	4	5	6	7
	$t_i = [(x_i - \theta_2) / \theta_1]^{\theta_0},$ $C = 0.577215664$ - постоянная Эйлера	$\theta_1$	$\frac{\theta_0^2}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_{i-1}e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i}]^2}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	$\frac{\theta_0^2}{\theta_1^2}$	A.1	A.2
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{(t_{i-1}e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i})(t_i \ln t_i e^{-t_i} - t_{i-1} \ln t_{i-1} e^{-t_{i-1}})}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	$\frac{1}{\theta_1} (C - 1)$	A.22	A.23
15.	Минимального значения $\frac{1}{\theta_1} \exp\left\{\frac{x - \theta_0}{\theta_1} - \exp\left(\frac{x - \theta_0}{\theta_1}\right)\right\}$ $x \in (-\infty, \infty),$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_{i-1}e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i}]^2}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	$\frac{1}{\theta_1^2}$	A.1	A.2
	$t_i = \exp(s_i),$ $s_i = \frac{x_i - \theta_0}{\theta_1}$	$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_{i-1}s_{i-1}e^{-t_{i-1}} - t_i s_i e^{-t_i}]^2}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	$\frac{1}{\theta_1^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{6} + C^2 - 2C\right)$	A.20	A.21
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{(t_{i-1}e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i})(t_{i-1}s_{i-1}e^{-t_{i-1}} - t_i s_i e^{-t_i})}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	$\frac{1}{\theta_1^2} (C - 1)$	A.22	A.23

1	2	3	4	5	6	7
16.	Максимального значения $\frac{1}{\theta_1} \exp\left\{-\frac{x-\theta_0}{\theta_1} - \exp\left(-\frac{x-\theta_0}{\theta_1}\right)\right\}$ $x \in (-\infty, \infty),$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_{i-1}e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i}]^2}{e^{-t_i} - e^{-t_{i-1}}}$	$\frac{1}{\theta_1^2}$	A.30	A.31
	$t_i = \exp(s_i),$ $s_i = -\frac{x_i - \theta_0}{\theta_1}$	$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_i s_i e^{-t_i} - t_{i-1} s_{i-1} e^{-t_{i-1}}]^2}{e^{-t_i} - e^{-t_{i-1}}}$	$\frac{1}{\theta_1^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{6} + C^2 - 2C\right)$	A.32	A.33
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{(t_{i-1}e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i})(t_i s_i e^{-t_i} - t_{i-1} s_{i-1} e^{-t_{i-1}})}{e^{-t_i} - e^{-t_{i-1}}}$	$\frac{1}{\theta_1^2} (C - 1)$	A.34	A.35
17.	Двойное показательное $\theta_0 \theta_1 \exp\{-(x - \theta_2)\theta_0 -$ $\theta_1 \exp[-(x - \theta_2)\theta_0]\}$ $x \in (-\infty, \infty),$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_i s_i e^{-t_i} - t_{i-1} s_{i-1} e^{-t_{i-1}}]^2}{e^{-t_i} - e^{-t_{i-1}}}$	$\frac{1}{\theta_0^2} \left[\ln^2 \theta_1 + \right.$ $\left. + 2(C - 1)\ln \theta_1 + \right.$ $\left. + 1 + \frac{\pi}{6} + C^2 - 2C\right]$	A.50	A.51
	$t_i = \theta_1 \exp\{-s_i\},$ $s_i = \theta_0(x_i - \theta_2)$	$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_{i-1}e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i}]^2}{e^{-t_i} - e^{-t_{i-1}}}$	$\frac{1}{\theta_1^2}$	A.1	A.31
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_0 \theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{(t_i s_i e^{-t_i} - t_{i-1} s_{i-1} e^{-t_{i-1}})(t_{i-1}e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i})}{e^{-t_i} - e^{-t_{i-1}}}$	$\frac{1}{\theta_0 \theta_1} (1 - C - \ln \theta_2)$	A.52	A.35

1	2	3	4	5	6	7
18.	<p>Накагами</p> $\frac{2}{\Gamma(\theta_1)} \left(\frac{\theta_1}{\theta_0^2}\right)^{\theta_1} (x - \theta_2)^{2\theta_1 - 1} \times$ $\times \exp\left\{-\frac{\theta_1(x - \theta_2)^2}{\theta_0^2}\right\}$ <p><math>x \in (\theta_2, \infty),</math>  <math>t_i = \frac{\theta_1(x_i - \theta_2)^2}{\theta_0^2},</math>  <math>\Psi(\theta_1) = \Gamma'(\theta_1)/\Gamma(\theta_1)</math></p>	$\theta_0$	$\frac{4}{\theta_0^2 \Gamma(\theta_1)} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ t_{i-1}^{\theta_1} e^{-t_{i-1}} - t_i^{\theta_1} e^{-t_i} \right]^2}{\int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1 - 1} e^{-t} dt}$	$\frac{4\theta_1}{\theta_0^2}$	-	-
		$\theta_1$	$\frac{1}{\Gamma(\theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1 - 1} e^{-t} \ln t dt + \frac{1}{\theta_1} (t_i^{\theta_1} e^{-t_i} - t_{i-1}^{\theta_1} e^{-t_{i-1}}) - \right.$ $\left. - \Psi(\theta_1) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1 - 1} e^{-t} dt \right\}^2 / \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1 - 1} e^{-t} dt$	$\Psi'(\theta_1) - \frac{1}{\theta_1}$	-	-
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{2}{\theta_0 \Gamma(\theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1 - 1} e^{-t} \ln t dt + \frac{1}{\theta_1} (t_i^{\theta_1} e^{-t_i} - t_{i-1}^{\theta_1} e^{-t_{i-1}}) - \right.$ $\left. - \Psi(\theta_1) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1 - 1} e^{-t} dt \right\} (t_{i-1}^{\theta_1} e^{-t_{i-1}} - t_i^{\theta_1} e^{-t_i}) / \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1 - 1} e^{-t} dt$	0	-	-

Продолжение таблицы 3.

1	2	3	4	5	6	7
19.	<p>Гамма-распределение</p> $\frac{\theta_1^{\theta_0}}{\Gamma(\theta_0)}(x - \theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-\theta_1(x - \theta_2)}$ <p><math>x \in (\theta_2, \infty),</math></p> <p><math>t_i = \theta_1(x_i - \theta_2)</math></p>	$\theta_0$	$\frac{1}{\Gamma(\theta_0)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} e^{-t} \ln t dt - \right.$ $\left. -\psi(\theta_0) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} e^{-t} dt \right\}^2 / \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} e^{-t} dt$	$\psi'(\theta_0)$	A.53	A.54
		$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2 \Gamma(\theta_0)} \sum_{i=1}^k \frac{[t_i^{\theta_0} e^{-t_i} - t_{i-1}^{\theta_0} e^{-t_{i-1}}]^2}{\int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} e^{-t} dt}$	$\frac{\theta_0}{\theta_1^2}$	A.55	A.56
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1 \Gamma(\theta_0)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} e^{-t} \ln t dt - \right.$ $\left. -\psi(\theta_0) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} e^{-t} dt \right\} (t_i^{\theta_0} e^{-t_i} - t_{i-1}^{\theta_0} e^{-t_{i-1}}) / \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} e^{-t} dt$	$-\frac{1}{\theta_1}$	A.57	A.58

1	2	3	4	5	6	7
20.	<p>Бета-распределение I-го рода</p> $\frac{1}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \left( \frac{x - \theta_2}{\theta_3} \right)^{\theta_0 - 1} \times$ $\times \left( 1 - \frac{x - \theta_2}{\theta_3} \right)^{\theta_1 - 1}$ <p><math>x \in [\theta_2, \theta_2 + \theta_3],</math>  <math>B(\theta_0, \theta_1) = \Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1) / \Gamma(\theta_0 + \theta_1)</math>  <math>t_i = (x_i - \theta_2) / \theta_3</math></p>	$\theta_0$	$\frac{1}{B(\theta_0, \theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} (1-t)^{\theta_1 - 1} \ln t dt - \right.$ $\left. - [\psi(\theta_0) - \psi(\theta_0 + \theta_1)] \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} (1-t)^{\theta_1 - 1} dt \right\}^2 / \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} (1-t)^{\theta_1 - 1} dt$	$\psi'(\theta_0) -$ $- \psi'(\theta_0 + \theta_1)$	-	-
		$\theta_1$	$\frac{1}{B(\theta_0, \theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} (1-t)^{\theta_1 - 1} \ln(1-t) dt - \right.$ $\left. - [\psi(\theta_1) - \psi(\theta_0 + \theta_1)] \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} (1-t)^{\theta_1 - 1} dt \right\}^2 / \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} (1-t)^{\theta_1 - 1} dt$	$\psi'(\theta_1) -$ $- \psi'(\theta_0 + \theta_1)$	-	-
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{B(\theta_0, \theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} (1-t)^{\theta_1 - 1} \ln t dt - \right.$ $- [\psi(\theta_0) - \psi(\theta_0 + \theta_1)] \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} (1-t)^{\theta_1 - 1} dt \left\} \times \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} (1-t)^{\theta_1 - 1} \ln(1-t) dt - \right.$ $\left. - [\psi(\theta_1) - \psi(\theta_0 + \theta_1)] \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} (1-t)^{\theta_1 - 1} dt \right\} / \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} (1-t)^{\theta_1 - 1} dt$	$- \psi'(\theta_0 + \theta_1)$	-	-

Продолжение таблицы 3.

1	2	3	4	5	6	7
21.	<p>Стандартное бета-распределение II-го рода</p> $\frac{1}{B(\theta_0, \theta_1)} \frac{(x - \theta_2)^{\theta_0 - 1}}{(1 + x - \theta_2)^{\theta_0 + \theta_1}}$ <p><math>x \in [\theta_2, \infty)</math>,</p> $t_i = \frac{x_i - \theta_2}{1 + x_i - \theta_2}$	$\theta_0$	См. соответствующие соотношения для бета-распределения I-го рода	—”—	—	—
		$\theta_1$	См. соответствующие соотношения для бета-распределения I-го рода	—”—	—	—
		$\theta_0, \theta_1$	См. соответствующие соотношения для бета-распределения I-го рода	—”—	—	—
22.	<p>Бета-распределение II-го рода</p> $\frac{\theta_2}{B(\theta_0, \theta_1)} \frac{[\theta_2(x - \theta_3)]^{\theta_0 - 1}}{[1 + \theta_2(x - \theta_3)]^{\theta_0 + \theta_1}}$ <p><math>x \in [\theta_3, \infty)</math>,</p> $t_i = \frac{\theta_2(x_i - \theta_3)}{1 + \theta_2(x_i - \theta_3)}$	$\theta_0$	См. соответствующие соотношения для бета-распределения I-го рода	—”—	—	—
		$\theta_1$	См. соответствующие соотношения для бета-распределения I-го рода	—”—	—	—
		$\theta_0, \theta_1$	См. соответствующие соотношения для бета-распределения I-го рода	—”—	—	—
		$\theta_2$	$\frac{1}{\theta_2^2 B(\theta_0, \theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \theta_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} (1 - t)^{\theta_1 - 1} dt - \right.$ $\left. - (\theta_0 + \theta_1) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0} (1 - t)^{\theta_1 - 1} dt \right\}^2 / \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0 - 1} (1 - t)^{\theta_1 - 1} dt$	$\frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_2^2 (\theta_0 + \theta_1 + 1)}$	—	—

Продолжение таблицы 3.

1	2	3	4	5	6	7
		$\theta_0, \theta_2$	$\frac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} \ln t dt \right\} / \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt -$ $-(\psi(\theta_0) - \psi(\theta_0 + \theta_1)) \} \times$ $\times \left( \theta_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt - (\theta_0 + \theta_1) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0} (1-t)^{\theta_1-1} dt \right)$	$-\frac{\theta_1}{\theta_2(\theta_0 + \theta_1)}$	-	-
		$\theta_1, \theta_2$	$\frac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} \ln(1-t) dt \right\} / \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt -$ $-(\psi(\theta_1) - \psi(\theta_0 + \theta_1)) \} \times$ $\times \left( \theta_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt - (\theta_0 + \theta_1) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0} (1-t)^{\theta_1-1} dt \right)$	$\frac{\theta_0}{\theta_2(\theta_0 + \theta_1)}$	-	-
23.	<p>Распределение <i>Sb</i>-Джонсона</p> $\frac{\theta_1 \theta_2}{(x - \theta_3)(\theta_2 + \theta_3 - x)} \times$ $\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x - \theta_3}{\theta_2 + \theta_3 - x} \right]^2 \right\}$ <p><math>x \in [\theta_3, \theta_2 + \theta_3],</math></p>	$\theta_0$	$\sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	1	A.24	A.25

Продолжение таблицы 3.

1	2	3	4	5	6	7
	$t_i = \theta_0 + \theta_1 \ln \frac{x_i - \theta_3}{\theta_2 + \theta_3 - x_i}$	$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\varphi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\varphi(t_{i-1})]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{2 + \theta_0^2}{\theta_1^2}$	A.26	A.27
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\varphi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\varphi(t_{i-1})][\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$-\frac{\theta_0}{\theta_1}$	A.28	A.29
24.	<p>Распределение <i>SI</i>-Джонсона</p> $\frac{\theta_1}{(x - \theta_3)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0 + \theta_1 \ln \frac{x - \theta_3}{\theta_2}\right]^2\right\}$ <p><math>x \in [\theta_3, \infty)</math>,</p> $t_i = \theta_0 + \theta_1 \ln \frac{x_i - \theta_3}{\theta_2}$	$\theta_0$	$\sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	1	A.24	A.25
		$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\varphi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\varphi(t_{i-1})]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{2 + \theta_0^2}{\theta_1^2}$	A.26	A.27
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\varphi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\varphi(t_{i-1})][\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$-\frac{\theta_0}{\theta_1}$	A.28	A.29
		$\theta_2$	$\frac{\theta_1^2}{\theta_2^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i)]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{\theta_1^2}{\theta_2^2}$	A.24	A.25
		$\theta_0, \theta_2$	$\frac{\theta_1}{\theta_2} \sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})][\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i)]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$-\frac{\theta_1}{\theta_2}$	-	-



1	2	3	4	5	6	7
		$\theta_1, \theta_2$	$\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\varphi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\varphi(t_{i-1})][\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i)]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{\theta_0}{\theta_2}$	-	-
25.	<p>Распределение <i>Su</i>-Джонсона</p> $\frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(x-\theta_3)^2 + \theta_2^2}} \times$ $\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0 + \theta_1 \ln\left\{\frac{x-\theta_3}{\theta_2} + \sqrt{\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^2 + 1}\right\}\right]^2\right\}$ <p><math>x \in (-\infty, \infty)</math></p> $t_i = \theta_0 + \theta_1 \ln\left\{s_i + \sqrt{s_i^2 + 1}\right\}$ <p><math>s_i = (x_i - \theta_3) / \theta_2</math></p>	$\theta_0$	$\sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	1	A.24	A.25
		$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\varphi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\varphi(t_{i-1})]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{2 + \theta_0^2}{\theta_1^2}$	A.26	A.275
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\varphi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\varphi(t_{i-1})][\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$-\frac{\theta_0}{\theta_1}$	A.28	A.29
		$\theta_2$	$\frac{\theta_1^2}{\theta_2^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left(\frac{s_{i-1}\varphi(t_{i-1})}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{s_i\varphi(t_i)}{\sqrt{s_i^2 + 1}}\right)^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{1 + \theta_1^2}{\theta_2^2} - \frac{\theta_1^3}{\theta_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(s^2 + 1)^{3/2}} ds$	-	-
		$\theta_0, \theta_2$	$\frac{\theta_1}{\theta_2} \sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})] \left[ \frac{\varphi(t_{i-1})s_{i-1}}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\varphi(t_i)s_i}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$-\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(s^2 + 1)^{3/2}} ds$	-	-

Продолжение таблицы 3.

1	2	3	4	5	6	7
		$\theta_1, \theta_2$	$\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\varphi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\varphi(t_{i-1})]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})} \times$ $\times \left[ \frac{\varphi(t_{i-1})s_{i-1}}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\varphi(t_i)s_i}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right]$	$\theta_0 \theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s\varphi(t)}{s^2 + 1} ds -$ $- 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s\varphi(t)}{(s^2 + 1)^{3/3}} ds$	-	-
		$\theta_3$	$\frac{\theta_1^2}{\theta_2^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( \frac{\varphi(t_{i-1})}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\varphi(t_i)}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right)^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{\theta_1^3}{\theta_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(s^2 + 1)^{3/2}} ds$	-	-
		$\theta_0, \theta_3$	$\frac{\theta_1}{\theta_2} \sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})] \left[ \frac{\varphi(t_{i-1})}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\varphi(t_i)}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$-\frac{\theta_1^2}{\theta_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{s^2 + 1} ds$	-	-
		$\theta_1, \theta_3$	$\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\varphi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\varphi(t_{i-1})]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})} \times$ $\times \left[ \frac{\varphi(t_{i-1})}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\varphi(t_i)}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right]$	$\frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{s^2 + 1} ds$	-	-

Продолжение таблицы 3.

1	2	3	4	5	6	7
		$\theta_2, \theta_3$	$\frac{\theta_1^2}{\theta_2^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ \frac{\varphi(t_{i-1})s_{i-1}}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\varphi(t_i)s_i}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right] \left[ \frac{\varphi(t_{i-1})}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\varphi(t_i)}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{\theta_1^3}{\theta_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s\varphi(t)}{(s^2 + 1)^{3/2}} ds +$ $+ \frac{5\theta_1}{\theta_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s\varphi(t)}{(s^2 + 1)^{5/2}} ds$	-	-
26.	<p>Класс экспоненциальных распределений</p> $\frac{\theta_2}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{ x - \theta_0 }{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\}$ <p><math>x \in (-\infty, \infty),</math>  <math>t_i = \frac{x_i - \theta_0}{\theta_1},</math></p> $\gamma_i = \int_0^{ t_i ^{\theta_2}} y^{1/\theta_2 - 1} e^{-y} dy,$	$\theta_0$	$\frac{\theta_2^2}{\theta_1^2\Gamma(1/\theta_2)} \sum_{i=1}^k \frac{2\left(e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} - e^{- t_i ^{\theta_2}}\right)^2}{\gamma_i \cdot \text{sign} t_i - \gamma_{i-1} \cdot \text{sign} t_{i-1}}$	$\frac{\theta_2^2\Gamma\left(2 - \frac{1}{\theta_2}\right)}{\theta_1^2\Gamma(1/\theta_2)}$	-	-
		$\theta_1$	$\frac{\theta_2^2}{2\theta_1^2\Gamma(1/\theta_2)} \sum_{i=1}^k \frac{\left(t_{i-1}e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} - t_i e^{- t_i ^{\theta_2}}\right)^2}{\gamma_i \cdot \text{sign} t_i - \gamma_{i-1} \cdot \text{sign} t_{i-1}}$	$\frac{\theta_2}{\theta_1^2}$	-	-
		$\theta_0, \theta_1$	$\frac{\theta_2^2}{2\theta_1^2\Gamma(1/\theta_2)} \sum_{i=1}^k \frac{\left(e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} - e^{- t_i ^{\theta_2}}\right)\left(t_{i-1}e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} - t_i e^{- t_i ^{\theta_2}}\right)}{\gamma_i \cdot \text{sign} t_i - \gamma_{i-1} \cdot \text{sign} t_{i-1}}$	0	-	-

Продолжение таблицы 3.

1	2	3	4	5	6	7
	$\gamma'_i = \int_0^{ t_i ^{\theta_2}} y^{1/\theta_2 - 1} e^{-y} \ln y dy$	$\theta_2$	$\frac{1}{2\Gamma(1/\theta_2)} \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{\theta_2^2} [\gamma'_i \cdot \text{sign } t_i - \gamma'_{i-1} \cdot \text{sign } t_{i-1} + \right.$ $\left. + \psi(1/\theta_2)(\gamma_i \cdot \text{sign } t_i - \gamma_{i-1} \cdot \text{sign } t_{i-1}) \right] +$ $\left. + t_i e^{- t_i ^{\theta_2}} \ln  t_i  - t_{i-1} e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} \ln  t_{i-1}  \right\} / (\gamma_i \cdot \text{sign } t_i - \gamma_{i-1} \cdot \text{sign } t_{i-1})$	0	-	-
		$\theta_0, \theta_2$	$\frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \sum_{i=1}^k \left( e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} - e^{- t_i ^{\theta_2}} \right) \times$ $\times \left\{ \frac{1}{\theta_2^2} [\gamma'_i \cdot \text{sign } t_i - \gamma'_{i-1} \cdot \text{sign } t_{i-1} + \psi(1/\theta_2)(\gamma_i \cdot \text{sign } t_i - \gamma_{i-1} \cdot \text{sign } t_{i-1}) \right]$ $\left. + t_i e^{- t_i ^{\theta_2}} \ln  t_i  - t_{i-1} e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} \ln  t_{i-1}  \right\} / (\gamma_i \cdot \text{sign } t_i - \gamma_{i-1} \cdot \text{sign } t_{i-1})$	0	-	-
		$\theta_1, \theta_2$	$\frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \sum_{i=1}^k \left( t_{i-1} e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} - t_i e^{- t_i ^{\theta_2}} \right) \times$ $\times \left\{ \frac{1}{\theta_2^2} [\gamma'_i \cdot \text{sign } t_i - \gamma'_{i-1} \cdot \text{sign } t_{i-1} - \psi(1/\theta_2)(\gamma_i \cdot \text{sign } t_i - \gamma_{i-1} \cdot \text{sign } t_{i-1}) \right]$ $\left. + t_i e^{- t_i ^{\theta_2}} \ln  t_i  - t_{i-1} e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} \ln  t_{i-1}  \right\} / (\gamma_i \cdot \text{sign } t_i - \gamma_{i-1} \cdot \text{sign } t_{i-1})$	$-\frac{1 + \theta_2 + \psi(1/\theta_2)}{\theta_1 \theta_2}$	-	-

Рассмотрим применение асимптотически оптимального группирования на примерах в случае простых и сложных гипотез.

**Пример 4.** Проверяется *простая* гипотеза о принадлежности выборки экспоненциальному закону распределения. Упорядоченная выборка объемом 200 наблюдений имеет вид:

0.0005	0.0095	0.0189	0.0200	0.0225	0.0261	0.0339	0.0343	0.0463	0.0509
0.0625	0.0748	0.0797	0.0802	0.0857	0.0887	0.1049	0.1065	0.1276	0.1395
0.1465	0.1539	0.1565	0.1582	0.1584	0.1648	0.1679	0.1681	0.1689	0.1818
0.1940	0.1944	0.1950	0.1976	0.1992	0.2064	0.2260	0.2277	0.2311	0.2433
0.2441	0.2442	0.2509	0.2522	0.2566	0.2683	0.2840	0.3006	0.3025	0.3052
0.3056	0.3098	0.3158	0.3286	0.3288	0.3297	0.3396	0.3490	0.3578	0.3650
0.3728	0.3755	0.3823	0.3834	0.4017	0.4093	0.4135	0.4259	0.4419	0.4486
0.4487	0.4503	0.4587	0.4699	0.4711	0.4802	0.4814	0.4818	0.4981	0.4984
0.4989	0.5005	0.5085	0.5191	0.5279	0.5301	0.5328	0.5331	0.5389	0.5392
0.5432	0.5455	0.5548	0.5801	0.6001	0.6009	0.6694	0.6803	0.6817	0.6838
0.6844	0.6995	0.7127	0.7358	0.7515	0.7566	0.7699	0.7953	0.8048	0.8072
0.8116	0.8232	0.8271	0.8323	0.8771	0.8908	0.8949	0.9272	0.9571	0.9593
0.9682	0.9708	0.9761	0.9881	0.9931	1.0110	1.0188	1.0364	1.0447	1.0612
1.0683	1.0909	1.0984	1.1030	1.1068	1.1076	1.1100	1.1493	1.1562	1.1634
1.1702	1.1866	1.1964	1.2006	1.2103	1.2325	1.2607	1.2945	1.3185	1.3437
1.3918	1.4287	1.4398	1.4505	1.5068	1.5126	1.5491	1.5501	1.5681	1.5933
1.6323	1.6446	1.6686	1.6782	1.6816	1.6839	1.7054	1.7335	1.7560	1.7629
1.7677	1.7681	1.9750	1.9840	1.9873	2.0031	2.0870	2.0877	2.0957	2.1226
2.1382	2.1925	2.1950	2.2029	2.2315	2.2318	2.3487	2.4474	2.5498	2.8392
2.9899	3.0846	3.1179	3.3316	3.5926	3.5937	3.6218	4.0604	4.8403	6.0534

Проверяемая гипотеза имеет вид  $H_0: f(x, \theta) = \theta_0 e^{-\theta_0(x-\theta_1)}$  при  $\theta_0=1, \theta_1=0$ . Оптимальные граничные точки в виде  $t_i = \theta_0(x_i - \theta_1)$  берутся из таблицы А.1. Выбираем количество интервалов  $k=5$ , так как  $P_k \times n = 0.0189 \times 200 > 3$ , а при большем количестве интервалов ожидаемые частоты попадания в крайний интервал будут еще меньше. При  $k=5$  значения  $t_i$  соответственно: (0.6004, 1.3545, 2.3720, 3.9657). При  $\theta_0=1$  и  $\theta_1=0$  значения  $x_i$  совпадают с  $t_i$ . Соответствующие такому разбиению вероятности попадания наблюдений в интервал берутся из таблицы А.2: (0.4514, 0.2905, 0.1648, 0.0744, 0.0189). По выборке находим количества наблюдений  $n_i$ , попавших в соответствующие интервалы (95, 55, 37, 10, 3). В соответствии с соотношением (1) вычисляем значение статистики  $S_{\chi^2} = 2.6672$ . При справедливости  $H_0$  статистика подчиняется  $\chi_4^2$ -распределению и при значениях уровня значимости  $\alpha <$

$$P\{S_{\chi^2} > 2.6672\} = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} \int_{2.8694}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds = 0.6150$$

гипотеза  $H_0$  будет

принята. Вычисляемое в соответствии с соотношением (3) значение статистики отношения правдоподобия  $S_{\text{оп}} = 2.8694$ . И таким образом, в соответствии с данным критерием также нет оснований для отклонения гипотезы  $H_0$ .

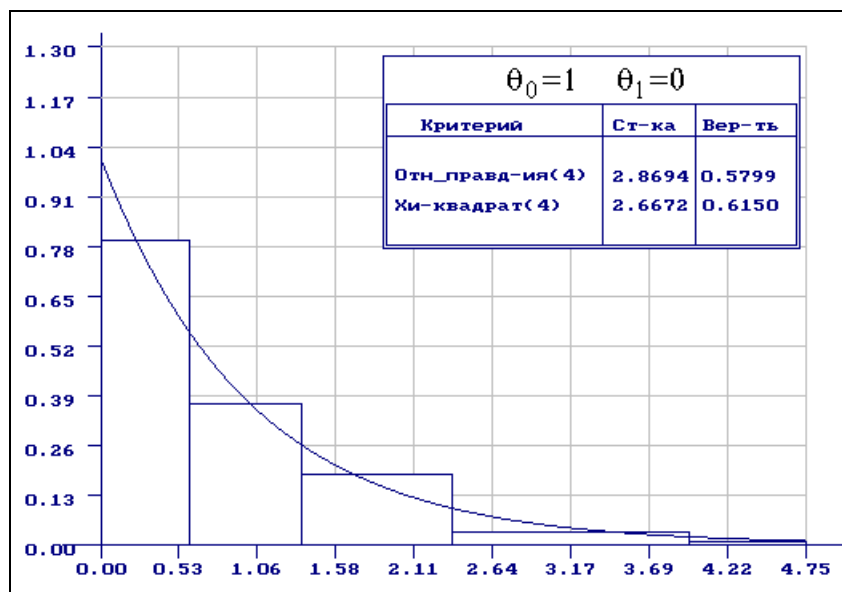


Рис.24. Результаты проверки согласия к примеру 4.

**Пример 5.** Проверяется сложная гипотеза о принадлежности выборки экспоненциальному закону распределения. Упорядоченная выборка объемом 300 наблюдений имеет вид:

0.0204	0.0242	0.0336	0.0342	0.0410	0.0511	0.0539	0.0859	0.0888	0.0925
0.0970	0.0996	0.1006	0.1039	0.1065	0.1067	0.1158	0.1170	0.1185	0.1188
0.1206	0.1207	0.1215	0.1260	0.1336	0.1336	0.1389	0.1462	0.1518	0.1565
0.1641	0.1664	0.1677	0.1738	0.1785	0.1812	0.1823	0.1889	0.2002	0.2032
0.2042	0.2074	0.2143	0.2221	0.2223	0.2265	0.2299	0.2335	0.2351	0.2408
0.2413	0.2424	0.2566	0.2576	0.2676	0.2697	0.2745	0.2749	0.2766	0.2780
0.2785	0.2826	0.2839	0.2909	0.2936	0.3029	0.3097	0.3251	0.3280	0.3352
0.3593	0.3597	0.3675	0.3688	0.3751	0.3816	0.3831	0.3875	0.3934	0.4049
0.4057	0.4057	0.4127	0.4133	0.4146	0.4212	0.4225	0.4231	0.4236	0.4363
0.4381	0.4414	0.4493	0.4553	0.4649	0.4712	0.4733	0.4798	0.4816	0.4817
0.4837	0.4880	0.4890	0.4917	0.4927	0.4982	0.5044	0.5081	0.5092	0.5135
0.5245	0.5301	0.5350	0.5351	0.5430	0.5432	0.5534	0.5609	0.5636	0.5637
0.5747	0.5806	0.5891	0.5898	0.5926	0.5962	0.6099	0.6137	0.6423	0.6670
0.6696	0.6713	0.6759	0.6885	0.6910	0.6913	0.6990	0.7043	0.7089	0.7150
0.7180	0.7189	0.7197	0.7226	0.7343	0.7530	0.7627	0.7635	0.7639	0.7822
0.7883	0.7889	0.7930	0.7943	0.7972	0.7979	0.8190	0.8191	0.8214	0.8234
0.8289	0.8291	0.8327	0.8382	0.8400	0.8408	0.8466	0.8571	0.8655	0.8679
0.8770	0.8895	0.8898	0.8925	0.8971	0.9041	0.9106	0.9134	0.9216	0.9234
0.9279	0.9395	0.9430	0.9458	0.9550	0.9625	0.9693	0.9792	0.9855	0.9877
1.0074	1.0127	1.0130	1.0172	1.0225	1.0227	1.0254	1.0520	1.0537	1.0720
1.0761	1.1009	1.1041	1.1071	1.1183	1.1586	1.1630	1.1719	1.1766	1.1909
1.1980	1.1986	1.2061	1.2169	1.2240	1.2298	1.2633	1.2698	1.2722	1.2749
1.2990	1.3150	1.3262	1.3345	1.3366	1.3369	1.3409	1.3423	1.3456	1.3501
1.3507	1.3518	1.3765	1.3791	1.3836	1.4011	1.4236	1.4339	1.4583	1.4630
1.4872	1.4935	1.5021	1.5291	1.5326	1.5347	1.5360	1.5503	1.5638	1.5642
1.5727	1.5934	1.6162	1.6165	1.6488	1.6543	1.6668	1.6916	1.7138	1.7300
1.7316	1.7339	1.7905	1.8173	1.8480	1.8725	1.8863	1.9178	1.9426	1.9720
1.9804	2.0209	2.0388	2.0816	2.1159	2.1169	2.1566	2.1732	2.1754	2.2319
2.2391	2.2620	2.3139	2.3222	2.3830	2.4445	2.4560	2.4864	2.5580	2.5796
2.7214	2.7843	3.0117	3.1078	3.1312	3.1805	3.2445	3.4491	3.6123	4.9320

Проверяемая гипотеза  $H_0: f(x) \in \{f(x, \theta) = \theta_0 e^{-\theta_0(x-\theta_1)}, \theta_0 \in (0, \infty), \theta_1 = 0\}$ . При этом  $\theta_0$  оценивается по выборке. Оценка максимального правдоподобия

$\hat{\theta}_0=1.066851$ . Оптимальные граничные точки в виде  $t_i = \theta_0(x_i - \theta_1)$  как и в предыдущем случае берутся из таблицы А.1 при  $k = 5$ : (0.6004, 1.3545, 2.3720, 3.9657). При  $\theta_0=1.066851$  и  $\theta_1=0$  вычисляем значения  $x_i = t_i / \theta_0 + \theta_1$ : (0.5628, 1.2696, 2.2234, 3.7172). Вероятности попадания наблюдений в интервал из таблицы А.2: (0.4514, 0.2905, 0.1648, 0.0744, 0.0189). По выборке находим количества наблюдений  $n_i$ , попавших в соответствующие интервалы (118, 99, 62, 20, 1). В соответствии с соотношением (1) вычисляем значение статистики  $S_{\chi^2}=11.145$ . При справедливости гипотезы  $H_0$  статистика подчиняется  $\chi^2_3$ -распределению. Вероятность

$$P\{S_{\chi^2} > 11.145\} = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} \int_{11.145}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds = 0.010967.$$

Уже при значениях  $\alpha=0.05$  нет оснований для принятия гипотезы  $H_0$ . Это говорит о том, что есть основание проверить и другие распределения.

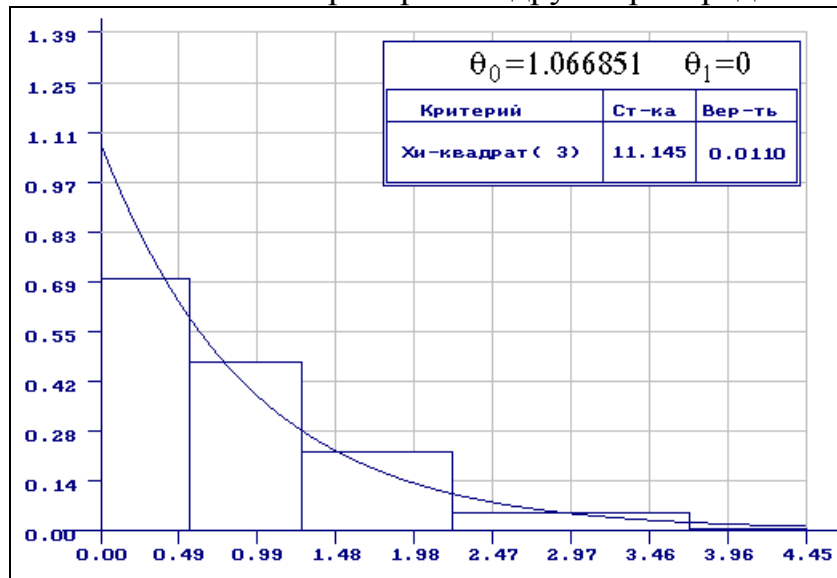


Рис.25. Результаты проверки согласия к примеру 5.

**Пример 6.** Проверяется *простая* гипотеза о принадлежности выборки нормальному закону распределения. Упорядоченная выборка объемом 300 наблюдений имеет вид:

-5.1852	-3.7318	-3.2899	-3.1038	-2.9031	-2.7243	-2.7011	-2.6448	-2.5168	-2.4975
-2.4858	-2.4268	-2.1459	-1.9894	-1.9467	-1.9348	-1.9273	-1.8873	-1.8383	-1.8217
-1.6802	-1.6713	-1.6704	-1.6420	-1.6322	-1.6315	-1.6005	-1.5491	-1.5238	-1.5204
-1.4727	-1.4546	-1.3420	-1.3233	-1.3225	-1.3150	-1.3097	-1.2917	-1.2767	-1.2046
-1.1606	-1.1334	-1.1259	-1.0769	-1.0659	-1.0446	-1.0258	-1.0138	-1.0077	-0.9914
-0.9818	-0.9546	-0.9511	-0.9167	-0.8927	-0.8758	-0.8311	-0.8302	-0.8171	-0.7794
-0.7571	-0.7228	-0.7211	-0.7064	-0.6991	-0.6873	-0.6743	-0.6442	-0.6440	-0.5798
-0.5421	-0.5308	-0.5108	-0.4845	-0.4491	-0.4294	-0.4212	-0.3943	-0.3251	-0.2607
-0.2506	-0.2351	-0.2201	-0.1698	-0.1326	-0.1217	-0.0368	-0.0194	0.0014	0.0108
0.0470	0.0748	0.0822	0.1281	0.1284	0.1455	0.1498	0.1539	0.1564	0.1895
0.1949	0.2079	0.2402	0.2643	0.2669	0.3104	0.3616	0.3723	0.4415	0.4929
0.5315	0.5318	0.5350	0.5359	0.5396	0.5843	0.5877	0.5944	0.6205	0.6279
0.6345	0.6391	0.6416	0.6445	0.6592	0.6630	0.6990	0.7361	0.7419	0.7426

0.7472	0.7511	0.7658	0.8359	0.8499	0.8681	0.9283	0.9368	0.9504	0.9657
0.9782	1.0158	1.0381	1.0505	1.0702	1.0873	1.0913	1.1313	1.1750	1.1908
1.2197	1.2347	1.2620	1.2799	1.3040	1.3160	1.3186	1.3245	1.3529	1.3729
1.3857	1.3979	1.4047	1.4101	1.4194	1.4485	1.4515	1.4782	1.4850	1.5759
1.6056	1.6076	1.6220	1.6223	1.6311	1.6395	1.6476	1.6610	1.6793	1.6800
1.6908	1.7208	1.7356	1.7358	1.7359	1.7550	1.8296	1.8573	1.8757	1.9448
1.9451	1.9924	2.0045	2.0153	2.0338	2.0400	2.0557	2.1055	2.1161	2.1224
2.1237	2.2229	2.2289	2.2432	2.2600	2.2989	2.3003	2.3088	2.3315	2.3659
2.4024	2.4152	2.4187	2.4600	2.4914	2.5100	2.5145	2.5311	2.5515	2.5706
2.5916	2.6982	2.7127	2.7282	2.7553	2.7778	2.8131	2.8296	2.8364	2.8445
2.8552	2.9012	2.9126	2.9517	3.0283	3.0510	3.1031	3.1199	3.1451	3.1453
3.1539	3.1633	3.2561	3.2995	3.3040	3.3056	3.3152	3.3159	3.3208	3.3567
3.4532	3.5665	3.5775	3.5782	3.5858	3.6054	3.6368	3.6435	3.6630	3.6788
3.6798	3.6985	3.6993	3.7203	3.7421	3.8047	3.8366	3.8389	3.9597	3.9682
3.9784	3.9828	3.9894	4.1512	4.1674	4.1887	4.2089	4.4316	4.4451	4.5262
4.5282	4.5397	4.5459	4.5898	4.6170	4.6560	4.6902	4.7263	4.7912	5.0490
5.1871	5.2678	5.4110	5.5609	5.6245	5.6484	5.6736	5.7743	6.1626	6.2185

Проверяемая гипотеза имеет вид  $H_0: f(x, \theta) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta_0)^2/2\theta_1^2}$  при  $\theta_0=1, \theta_1=2$ .

Оптимальные граничные точки в виде  $t_i = (x_i - \theta_0) / \theta_1$  берутся из таблицы А.28 при  $k=7$  (-2.0600, -1.2647, -0.4918, 0.4918, 1.2647, 2.0600), так как из таблицы А.29  $P_k \times n = 0.0197 \times 300 > 5$ . При  $\theta_0=1, \theta_1=2$   $x_i$  принимают значения (-3.12, -1.5294, 0.0164, 1.9836, 3.5294, 5.12). Вероятности попадания наблюдений в интервал из таблицы А.29: (0.0197, 0.0833, 0.2084, 0.3772, 0.2084, 0.0833, 0.0197). По выборке находим количества наблюдений  $n_i$ , попавших в соответствующие интервалы (3, 25, 62, 101, 60, 39, 10). В соответствии с соотношением (1) вычисляем значение статистики  $S_{\chi^2} = 13.532$ . При справедливости гипотезы  $H_0$  статистика подчиняется  $\chi_6^2$ -распределению. Вероятность  $P\{S_{\chi^2} > 13.532\} = 0.0353$ . При значениях уровня значимости  $\alpha > 0.0353$  гипотеза  $H_0$  будет отклоняться.

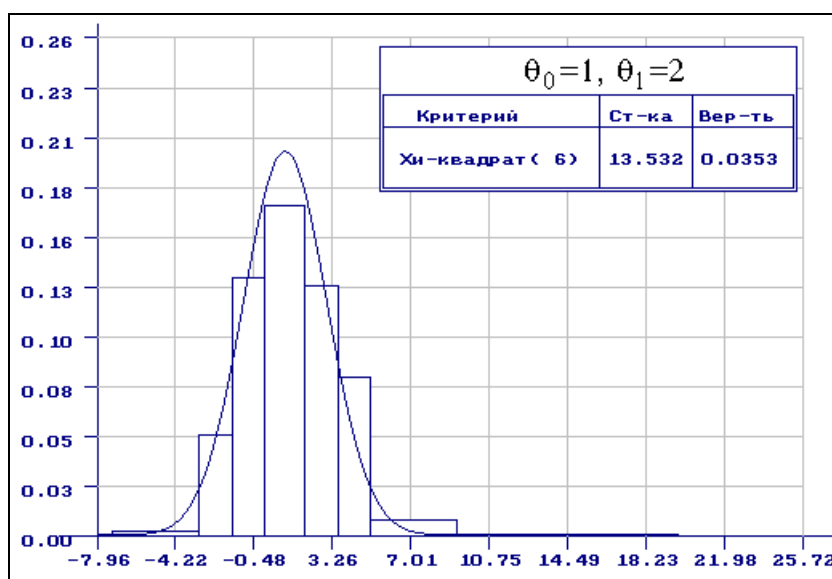


Рис.26. Результаты проверки согласия к примеру 6.



**Пример 7.** Проверяется *сложная* гипотеза о принадлежности выборки нормальному закону распределения. По выборке оценивается параметр сдвига. Параметр масштаба  $\theta_1=2$ . Выборка из примера 6. Вычисленная по ней оценка максимального правдоподобия параметра сдвига  $\theta_0=1.2097$ . Оставим  $k=7$ , так как из таблицы А.25  $P_k \times n = 0.0536 \times 300 > 15$ . Оптимальные граничные точки в виде  $t_i = (x_i - \theta_0) / \theta_1$  берутся из таблицы А.24. (-1.6108, -0.8744, -0.2803, 0.2803, 0.8744, 1.6108). При  $\theta_0=1.2097$ ,  $\theta_1=2$   $x_i$  принимают значения (-2.0119, -0.5391, 0.6491, 1.7703, 2.9585, 4.4313). Вероятности попадания наблюдений в интервал из таблицы А.25: (0.0536, 0.1373, 0.1987, 0.2208, 0.1987, 0.1373, 0.0536). По выборке находим количества наблюдений  $n_i$ , попавших в соответствующие интервалы (13, 58, 53, 62, 48, 33, 23). В соответствии с соотношением (1) вычисляем значение статистики  $S_{\chi^2}=13.752$ . При справедливости  $H_0$  статистика приближенно подчиняется  $\chi^2_5$ -распределению. Вероятность  $P\{S_{\chi^2} > 13.752\} = 0.0173$ . При значениях уровня значимости  $\alpha > 0.0173$  гипотеза  $H_0$  будет отклоняться.

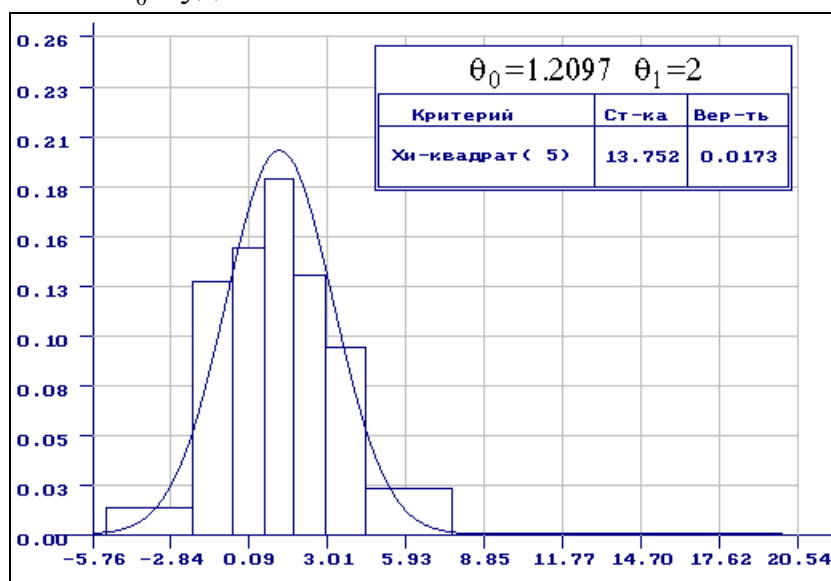


Рис.27. Результаты проверки согласия к примеру 7.

**Пример 8.** Проверяется *сложная* гипотеза о принадлежности выборки нормальному закону распределения. По выборке оценивается масштабный параметр (стандартное отклонение). Параметр сдвига  $\theta_0=1$ . Выборка из примера 6. Вычисленная по ней оценка максимального правдоподобия параметра масштаба  $\theta_0=2.1101$ . Выберем  $k=5$ , так как из таблицы А.27  $P_k \times n = 0.023 \times 300 > 6$  и при большем числе интервалов ожидаемое количество попаданий наблюдений в крайние интервалы не превышает 3. Оптимальные граничные точки в виде  $t_i = (x_i - \theta_0) / \theta_1$  берутся из таблицы А.26. (-1.9956, -1.1401, 1.1401, 1.9958). При  $\theta_0=1$ ,  $\theta_1=2.1101$   $x_i$  принимают значения (-3.21092,

-1.40573, 3.405725, 5.211338). Вероятности попадания наблюдений в интервал из таблицы А.27: (0.0230, 0.1041, 0.7458, 0.1041, 0.0230). По выборке находим количества наблюдений  $n_i$ , попавших в соответствующие интервалы (3, 29, 221, 41, 9). В соответствии с соотношением (1) вычисляем значение статистики  $S_{\chi^2}=6.1995$ . При справедливости  $H_0$  статистика приближенно подчиняется  $\chi^2_3$ -распределению. Вероятность  $P\{S_{\chi^2} > 6.1995\} = 0.1023$ . При значениях уровня значимости  $\alpha < 0.1$  нет оснований для отклонения гипотезы  $H_0$ .

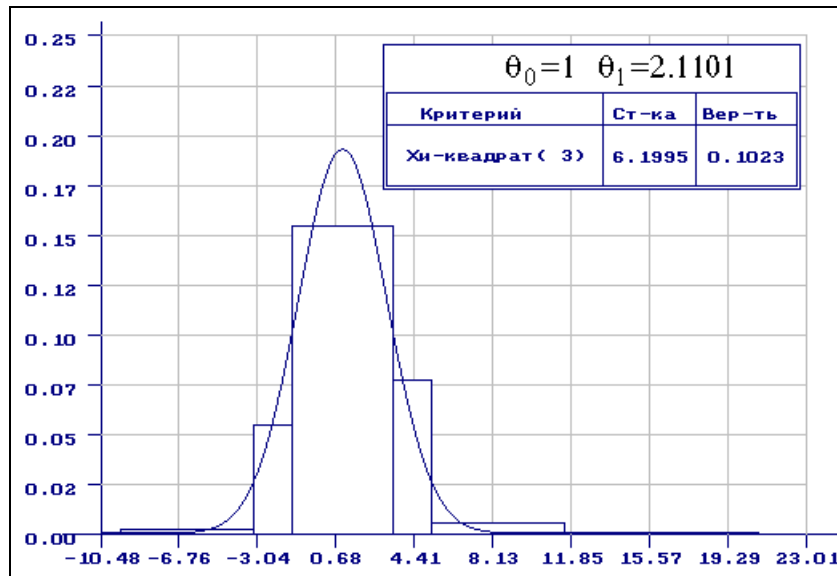


Рис.28. Результаты проверки согласия к примеру 8.

**Пример 9.** Проверяется *сложная* гипотеза о принадлежности наблюдаемой выборки нормальному закону распределения. Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0: f(x) \in \left\{ f(x, \theta) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta_0)^2/2\theta_1^2}, \theta_0 \in (-\infty, \infty), \theta_1 \in (0, \infty) \right\}. \text{ По выборке}$$

оцениваются оба параметра нормального распределения. Оценки максимального правдоподобия параметров при  $\theta_0=1.2097$ ,  $\theta_1=2.1032$ . Как и в примере 6, оптимальные граничные точки в виде  $t_i = (x_i - \theta_0) / \theta_1$  берутся из таблицы А.28 при  $k=7$  (-2.0600, -1.2647, -0.4918, 0.4918, 1.2647, 2.0600), так как из таблицы А.29  $P_k \times n = 0.0197 \times 300 > 5$ . При  $\theta_0=1.2097$ ,  $\theta_1=2.1032$   $x_i$  принимают значения (-3.1435, -1.4629, 0.1704, 2.2490, 3.8823, 5.5629). Вероятности попадания наблюдений в интервал из таблицы А.29: (0.0197, 0.0833, 0.2084, 0.3772, 0.2084, 0.0833, 0.0197). По выборке находим количества наблюдений  $n_i$ , попавших в соответствующие интервалы (3, 29, 67, 105, 64, 26, 6). В соответствии с соотношением (1) вычисляем значение статистики  $S_{\chi^2}=3.2178$ . При справедливости гипотезы  $H_0$  статистика приближенно подчиняется  $\chi^2_4$ -распределению. Вычисленное значение вероятности

$P\{S_{\chi^2} > 3.2178\} = 0.5221$  говорит о хорошем согласии экспериментальных данных теоретическому распределению по данному критерию. При значениях уровня значимости  $\alpha < 0.5221$  гипотеза  $H_0$  будет приниматься.

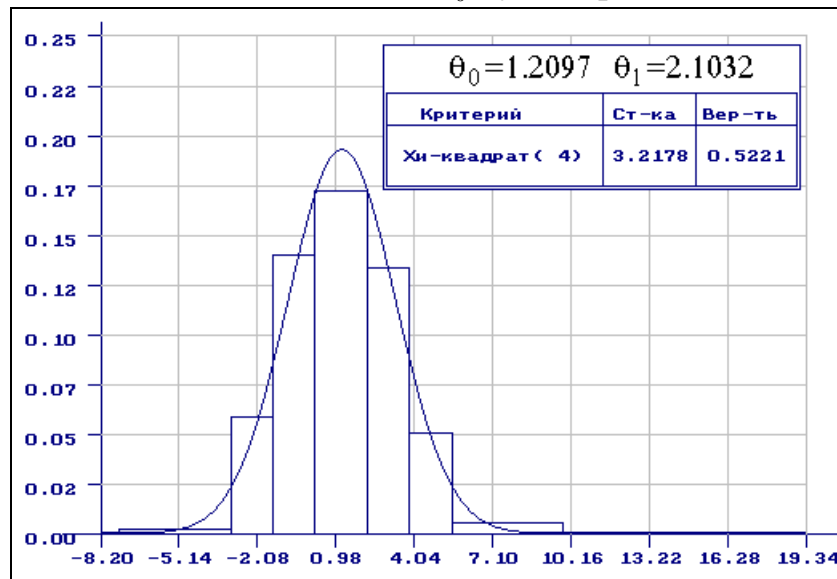


Рис.29. Результаты проверки согласия к примеру 9.

**Пример 10.** Проверим сложную гипотезу о принадлежности выборки, представленной в примере 5, распределению Вейбулла. Проверяем гипотезу

$$H_0: f(x) \in \left\{ f(x, \theta) = \frac{\theta_0(x - \theta_2)^{\theta_0 - 1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp \left[ - \left( \frac{x - \theta_2}{\theta_1} \right)^{\theta_0} \right], \theta_0, \theta_1 \in (0, \infty), \theta_2 = 0 \right\}$$

при оценивании по выборке параметров  $\theta_0$  и  $\theta_1$  методом максимального правдоподобия. Вычисленные оценки  $\theta_0 = 1.2585$ ,  $\theta_1 = 1.0088$ . Из условия, чтобы ожидаемое количество наблюдений, попавших в интервал с наименьшей вероятностью, было не очень малым, по таблице А.23 выбираем  $k = 6$ . В этом случае  $P_k \times n = 0.0122 \times 300 > 3$ . Оптимальные граничные точки в виде  $t_i = [(x_i - \theta_2)/\theta_1]^{\theta_0}$  берутся из таблицы А.22. (0.0772, 0.3649, 1.2269, 2.5726, 4.4096). При  $\theta_0 = 1.2585$ ,  $\theta_1 = 1.0088$ ,  $\theta_2 = 0$  по значениям  $t_i$  определяем

$$x_i = \theta_2 + \exp \left( \frac{1}{\theta_0} \ln t_i + \ln \theta_1 \right): (0.1318, 0.4528, 1.1868, 2.1374, 3.2798). \text{ Вероятности попадания наблюдений в интервал из таблицы А.23: } (0.0743, 0.2314, 0.4011, 0.2169, 0.0641, 0.0122).$$

По выборке находим количества наблюдений  $n_i$ , попавших в соответствующие интервалы (24, 69, 116, 67, 21, 3). Значение статистики  $S_{\chi^2} = 0.6207$ . При справедливости гипотезы  $H_0$  статистика приближенно подчиняется  $\chi_3^2$ -распределению. Так как вычисленная вероятность

$P\{S_{\chi^2} > 0.6207\} = 0.8917$ , то это свидетельствует об очень хорошем согласии данных с теоретическим распределением.

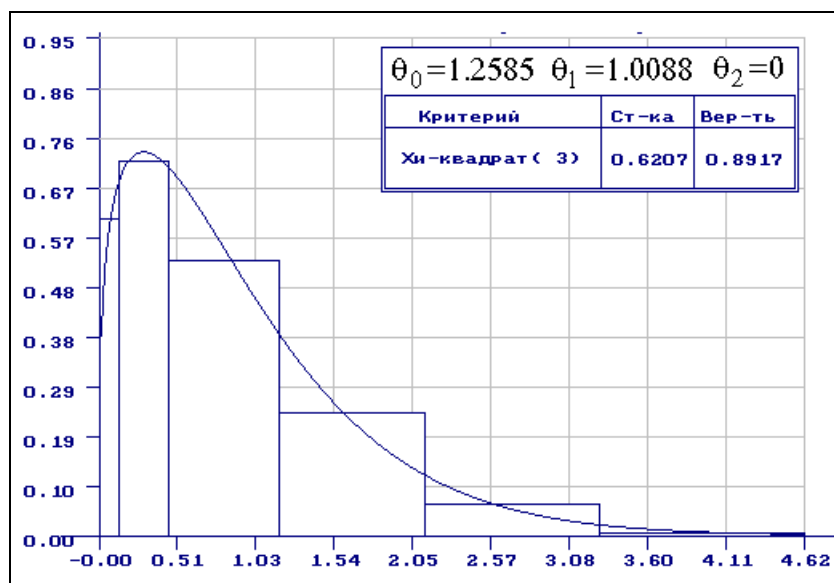


Рис.30. Результаты проверки согласия к примеру 10.

## Литература

1. Кендалл М., Стьюарт А.. Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973. – 900 с.
2. Никулин М.С. Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. XVIII. № 3. – С. 583-591.
3. Никулин М.С. О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. XVIII. № 3. С.675-676.
4. Мирвалиев М., Никулин М.С. Критерии согласия типа хи-квадрат / Заводская лаборатория. 1992. Т. 58. № 3. – С.52-58.
5. Рао. С.Р. Линейные статистические методы и их применения. – М.: Наука, 1968. – 548 с.
6. Chernoff H., Lehmann E.L. The use of maximum likelihood estimates in  $\chi^2$  test for goodness of fit // Ann. Math. Stat., 1954. V. 25. – P. 579-586.
7. Чибисов Д.М. Некоторые критерии типа хи-квадрат для непрерывных распределений // Теория вероятностей и ее применение. 1971. Т. XVI. № 1. – С. 3-20.
8. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
9. Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика. – М.: Мир, 1978. – 560 с.

10. Лемешко Б.Ю. Статистический анализ одномерных наблюдений случайных величин: Программная система. – Новосибирск: Изд-во НГТУ. – 1995. – 125 с.
11. Денисов В.И., Зачепа Г.Г., Лемешко Б.Ю. Об асимптотически оптимальном группировании при оценивании основного параметра гамма-распределения по группированным данным // Применение ЭВМ в оптимальном планировании и проектировании. – Новосибирск, 1974. – С. 50-53.
12. Лемешко Б.Ю. К вопросу решения задачи асимптотически оптимального группирования данных при обработке наблюдений, подчиняющихся бета-распределению // Машинные методы оптимизации, моделирования и планирования эксперимента. – Новосибирск, 1988. – С. 134-138.
13. Лемешко Б.Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия // Заводская лаборатория. 1998. Т.64. №1 – С. 56-64.
14. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 303 с.
15. Денисов В.И., Лемешко Б.Ю., Цой Е.Б. Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов. В 2-х ч. – Новосибирск: Изд-во НГТУ. – 1993. – 347 с.
16. Mann H.B., Wald A. On the choice of the number of class intervals in the application of the chi square test // Ann. Math. Stat., 1942. V. 13. – P. 306-317.
17. Лемешко Б.Ю. Постовалов С.Н. Прикладные аспекты использования критериев согласия в случае проверки сложных гипотез // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 11. – С. 3-17.
18. Лемешко Б.Ю. Постовалов С.Н. О зависимости предельных распределений статистик  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия от способа группирования данных // Заводская лаборатория. 1998. Т.64. №5. – С. 56-63.
19. Б.Ю.Лемешко, С.Н.Постовалов. О распределениях статистик непараметрических критериев согласия при оценивании по выборкам параметров наблюдаемых законов // Заводская лаборатория. 1998. Т.64. №3. – С. 61-72.

Приложение А

(рекомендуемое)

*ТАБЛИЦЫ  
АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОГО ГРУППИРОВАНИЯ  
НАБЛЮДЕНИЙ В КРИТЕРИЯХ СОГЛАСИЯ ТИПА  $\chi^2$*

**Таблица А.1**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра экспоненциального распределения, параметра распределения Парето, масштабного параметра распределения Вейбулла, параметра сдвига распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$A$
2	1,5936										0,6476
3	1,0176	2,6112									0,8203
4	0,7541	1,7716	3,3652								0,8910
5	0,6004	1,3545	2,3720	3,9657							0,9269
6	0,4993	1,0997	1,8538	2,8714	4,4650						0,9476
7	0,4276	0,9269	1,5273	2,2813	3,2989	4,8925					0,9606
8	0,3739	0,8015	1,3008	1,9012	2,6553	3,6729	5,2665				0,9693
9	0,3323	0,7063	1,1338	1,6331	2,2336	2,9876	4,0052	5,5988			0,9754
10	0,2990	0,6314	1,0053	1,4329	1,9322	2,5326	3,2866	4,3042	5,8979		0,9798
11	0,2716	0,5695	0,9014	1,2746	1,7015	2,1989	2,7955	3,5429	4,5480	6,1176	0,9832

**Таблица А.2**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра экспоненциального распределения, параметра распределения Рэлея, параметра распределения Парето, масштабного параметра распределения Вейбулла, параметра сдвига распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$A$
2	0,7968	0,2032										0,6476
3	0,6385	0,2880	0,0735									0,8203
4	0,5296	0,3004	0,1355	0,0345								0,8911
5	0,4514	0,2905	0,1648	0,0744	0,0189							0,9269
6	0,3930	0,2740	0,1763	0,1000	0,0451	0,0116						0,9476
7	0,3479	0,2563	0,1787	0,1150	0,0652	0,0294	0,0075					0,9606
8	0,3120	0,2394	0,1763	0,1229	0,0791	0,0449	0,0202	0,0052				0,9693
9	0,2827	0,2238	0,1717	0,1265	0,0882	0,0567	0,0322	0,0145	0,0037			0,9754
10	0,2584	0,2097	0,1659	0,1273	0,0938	0,0654	0,0421	0,0239	0,0107	0,0028		0,9798
11	0,2378	0,1964	0,1598	0,1264	0,0971	0,0715	0,0498	0,0322	0,0183	0,0083	0,0024	0,9832



**Таблица А.3**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения Рэлея) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	1,7853									0,6476
3	1,4266	2,2853								0,8203
4	1,2280	1,8823	2,5943							0,8910
5	1,0954	1,6459	2,1781	2,8163						0,9269
6	0,9993	1,4831	1,9255	2,3964	2,9883					0,9476
7	0,9247	1,3615	1,7477	2,1360	2,5686	3,1281				0,9606
8	0,8648	1,2661	1,6130	1,9500	2,3045	2,7103	3,2455			0,9693
9	0,8152	1,1884	1,5058	1,8073	2,1136	2,4444	2,8303	3,3463		0,9754
10	0,7734	1,1237	1,4180	1,6928	1,9658	2,2506	2,5638	2,9340	3,4344	0,9798

**Таблица А.4**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения Максвелла) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	2,0451									0,6451
3	1,6762	2,5366								0,8179
4	1,4689	2,1292	2,8402							0,8892
5	1,3292	1,8879	2,4221	3,0583						0,9254
6	1,2261	1,7205	2,1667	2,6379	3,2274					0,9464
7	1,1458	1,5947	1,9859	2,3759	2,8081	3,3649				0,9596
8	1,0807	1,4952	1,8481	2,1879	2,5431	2,9480	3,4803			0,9685
9	1,0267	1,4138	1,7377	2,0423	2,3499	2,6803	3,0652	3,5789		0,9747
10	0,9798	1,3447	1,6460	1,9252	2,2003	2,4857	2,7984	3,1668	3,6625	0,9792

**Таблица А.5**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения Максвелла) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0,7576	0,2424									0,6451
3	0,5781	0,3296	0,0923								0,8179
4	0,4597	0,3310	0,1647	0,0446							0,8892
5	0,3778	0,3097	0,1942	0,0933	0,0250						0,9254
6	0,3185	0,2837	0,2022	0,1223	0,0579	0,0154					0,9464
7	0,2739	0,2585	0,2000	0,1374	0,0818	0,0383	0,0101				0,9596
8	0,2393	0,2357	0,1931	0,1438	0,0971	0,0573	0,0267	0,0070			0,9685
9	0,2119	0,2155	0,1840	0,1450	0,1063	0,0711	0,0418	0,0194	0,0050		0,9747
10	0,1891	0,1978	0,1745	0,1437	0,1112	0,0806	0,0536	0,0313	0,0145	0,0038	0,9792

**Таблица А.6**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра полунормального распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации

*A*

<i>k</i>	<i>t</i> <sub>1</sub>	<i>t</i> <sub>2</sub>	<i>t</i> <sub>3</sub>	<i>t</i> <sub>4</sub>	<i>t</i> <sub>5</sub>	<i>t</i> <sub>6</sub>	<i>t</i> <sub>7</sub>	<i>t</i> <sub>8</sub>	<i>t</i> <sub>9</sub>	<i>A</i>
2	1,4821									0,6523
3	1,1395	1,9952								0,8244
4	0,9553	1,5993	2,3124							0,8943
5	0,8355	1,3712	1,9002	2,5407						0,9295
6	0,7495	1,2163	1,6526	2,1225	2,7173					0,9496
7	0,6842	1,1025	1,4797	1,8658	2,3009	2,8632				0,9622
8	0,6277	1,0069	1,3432	1,6751	2,0278	2,4343	2,9742			0,9706
9	0,5892	0,9409	1,2488	1,5445	1,8503	2,1861	2,5844	3,1015		0,9765
10	0,5545	0,8838	1,1682	1,4380	1,7113	2,0012	2,3249	2,6993	3,2125	0,9808

**Таблица А.7**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения полунормального распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0,8617	0,1383									0,6523
3	0,7455	0,2085	0,0460								0,8244
4	0,6606	0,2297	0,0890	0,0207							0,8943
5	0,5966	0,2331	0,1129	0,0463	0,0111						0,9295
6	0,5464	0,2297	0,1255	0,0646	0,0272	0,0066					0,9496
7	0,5061	0,2236	0,1313	0,0769	0,0407	0,0172	0,0042				0,9622
8	0,4698	0,2162	0,1348	0,0853	0,0513	0,0277	0,0120	0,0029			0,9706
9	0,4443	0,2090	0,1350	0,0893	0,0582	0,0355	0,0190	0,0078	0,0019		0,9765
10	0,4208	0,2024	0,1341	0,0923	0,0634	0,0417	0,0253	0,0131	0,0056	0,0013	0,9808

**Таблица А.8**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 4$ )) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	2,2759									0,6435
3	1,9011	2,7621								0,8164
4	1,6877	2,3523	3,0619							0,8880
5	1,5409	2,1027	2,6375	3,2731						0,9245
6	1,4320	1,9320	2,3793	2,8420	3,4371					0,9456
7	1,3441	1,7985	2,1899	2,5797	3,0076	3,5655				0,9589
8	1,2773	1,6988	2,0537	2,3944	2,7499	3,1553	3,6866			0,9679
9	1,2376	1,6331	1,9559	2,2567	2,5594	2,8931	3,2773	3,7885		0,9742
10	1,1957	1,5742	1,8805	2,1615	2,4364	2,7194	3,0318	3,3999	3,8922	0,9788

**Таблица А.9**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 4$ )) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0,7306	0,2694									0,6435
3	0,5393	0,3546	0,1061								0,8164
4	0,4165	0,3467	0,1844	0,0524							0,8880
5	0,3327	0,3153	0,2138	0,1082	0,0300						0,9245
6	0,2736	0,2830	0,2175	0,1383	0,0688	0,0188					0,9456
7	0,2287	0,2519	0,2105	0,1536	0,0953	0,0427	0,0128				0,9589
8	0,1969	0,2260	0,1997	0,1574	0,1110	0,0678	0,0325	0,0087			0,9679
9	0,1790	0,2060	0,1849	0,1522	0,1163	0,0827	0,0493	0,0234	0,0062		0,9742
10	0,1610	0,1905	0,1762	0,1498	0,1187	0,0875	0,0599	0,0355	0,0165	0,0044	0,9788

**Таблица А.10**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 5$ )) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	2,4851									0,6424
3	2,1047	2,9667								0,8154
4	1,8861	2,5542	3,2635							0,8871
5	1,7383	2,3089	2,8453	3,4778						0,9238
6	1,6274	2,1357	2,5880	3,0606	3,6463					0,9451
7	1,5434	2,0084	2,4056	2,7983	3,2306	3,7856				0,9585
8	1,4642	1,8929	2,2499	2,5904	2,9449	3,3472	3,8734			0,9676
9	1,4122	1,8192	2,1563	2,4668	2,7770	3,1092	3,4938	4,0021		0,9739
10	1,3523	1,7371	2,0514	2,3376	2,6193	2,9121	3,2278	3,6023	4,1009	0,9786



**Таблица А.11**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 5$ )) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0,7105	0,2895									0,6424
3	0,5106	0,3721	0,1173								0,8154
4	0,3853	0,3562	0,1997	0,0588							0,8871
5	0,3033	0,3199	0,2258	0,1175	0,0335						0,9238
6	0,2460	0,2822	0,2276	0,1489	0,0745	0,0208					0,9451
7	0,2059	0,2495	0,2171	0,1617	0,1021	0,0501	0,0136				0,9585
8	0,1711	0,2181	0,2025	0,1653	0,1202	0,0754	0,0371	0,0103			0,9676
9	0,1501	0,1975	0,1923	0,1620	0,1252	0,0876	0,0532	0,0253	0,0068		0,9739
10	0,1277	0,1750	0,1774	0,1580	0,1307	0,0995	0,0675	0,0406	0,0187	0,0049	0,9786

**Таблица А.12**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 6$ )) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	2,6788									0,6416
3	2,2937	3,1562								0,8146
4	2,0690	2,7373	3,4474							0,8865
5	1,9209	2,4937	3,0329	3,6644						0,9233
6	1,8077	2,3206	2,7794	3,2560	3,8376					0,9446
7	1,7052	2,1822	2,5885	2,9928	3,4297	3,9772				0,9581
8	1,6448	2,0820	2,4474	2,7948	3,1545	3,5620	4,0856			0,9673
9	1,5655	1,9772	2,3189	2,6446	2,9689	3,3159	3,7061	4,2064		0,9736
10	1,5219	1,9135	2,2322	2,5258	2,8116	3,1058	3,4252	3,7974	4,2833	0,9784

**Таблица А.13**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 6$ )) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0,6951	0,3049									0,6416
3	0,4892	0,3845	0,1263								0,8146
4	0,3612	0,3611	0,2131	0,0646							0,8865
5	0,2815	0,3194	0,2364	0,1260	0,0367						0,9233
6	0,2254	0,2791	0,2365	0,1575	0,0790	0,0225					0,9446
7	0,1797	0,2456	0,2253	0,1734	0,1085	0,0528	0,0147				0,9581
8	0,1552	0,2133	0,2071	0,1721	0,1255	0,0785	0,0378	0,0105			0,9673
9	0,1261	0,1850	0,1925	0,1750	0,1371	0,0958	0,0558	0,0256	0,0071		0,9736
10	0,1115	0,1661	0,1764	0,1640	0,1369	0,1048	0,0721	0,0429	0,0199	0,0054	0,9784

**Таблица А.14**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 7$ )) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	2,8592									0,6410
3	2,4702	3,3335								0,8141
4	2,2424	2,9130	3,6227							0,8861
5	2,0892	2,6637	3,2017	3,8338						0,9229
6	1,9753	2,4906	2,9522	3,4307	4,0111					0,9444
7	1,8697	2,3537	2,7638	3,1754	3,6180	4,1618				0,9579
8	1,8095	2,2496	2,6140	2,9589	3,3148	3,7168	4,2420			0,9671
9	1,7284	2,1442	2,4877	2,8152	3,1416	3,4897	3,8810	4,3795		0,9734
10	1,6738	2,0692	2,3912	2,6935	2,9861	3,2910	3,6147	3,9779	4,4670	0,9782

**Таблица А.15**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 7$ )) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0,6826	0,3174									0,6410
3	0,4720	0,3942	0,1338								0,8141
4	0,3435	0,3648	0,2226	0,0691							0,8861
5	0,2631	0,3179	0,2442	0,1347	0,0401						0,9229
6	0,2090	0,3866	0,1307	0,1653	0,0841	0,0243					0,9444
7	0,1643	0,2413	0,2288	0,1816	0,1140	0,0545	0,0155				0,9579
8	0,1414	0,2059	0,2061	0,1758	0,1316	0,0846	0,0426	0,0120			0,9671
9	0,1138	0,1772	0,1910	0,1787	0,1432	0,1012	0,0597	0,0276	0,0076		0,9734
10	0,0972	0,1559	0,1738	0,1702	0,1441	0,1237	0,0645	0,0438	0,0211	0,0057	0,9782

**Таблица А.16**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 8$ )) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	3,0289									0,6405
3	2,6345	3,4992								0,8136
4	2,4103	3,0825	3,7907							0,8857
5	2,2556	2,8342	3,3745	4,0004						0,9226
6	2,1318	2,6542	3,1120	3,5661	4,1522					0,9441
7	2,0383	2,5119	2,9189	3,3178	3,7560	4,3031				0,9577
8	1,9612	2,4048	2,7742	3,1251	3,4917	3,8964	4,4313			0,9669
9	1,8989	2,3089	2,6432	2,9523	3,2672	3,6044	3,9900	4,4952		0,9734
10	1,8477	2,2411	2,5569	2,8434	3,1248	3,4169	3,7366	4,1059	4,5926	0,9781

**Таблица А.17**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 8$ )) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0,6722	0,3278									0,6405
3	0,4569	0,4024	0,1407								0,8136
4	0,3314	0,3668	0,2292	0,0726							0,8857
5	0,2518	0,3179	0,2496	0,1384	0,0423						0,9226
6	0,1950	0,2732	0,2439	0,1659	0,0944	0,0276					0,9441
7	0,1571	0,2303	0,2282	0,1831	0,1223	0,0614	0,0176				0,9577
8	0,1293	0,1992	0,2078	0,1819	0,1390	0,0871	0,0440	0,0117			0,9669
9	0,1092	0,1691	0,1836	0,1713	0,1460	0,1087	0,0686	0,0339	0,0096		0,9734
10	0,0942	0,1506	0,1680	0,1838	0,1215	0,1157	0,0835	0,0511	0,0248	0,0068	0,9781

**Таблица А.18**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 9$ )) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	3,1896									0,6401
3	2,7889	3,6556								0,8132
4	2,5681	3,2422	3,9494							0,8854
5	2,4156	2,9987	3,5397	4,1663						0,9224
6	2,2791	2,7928	3,2466	3,7175	4,2994					0,9439
7	2,1972	2,6754	3,0764	3,4674	3,8929	4,4386				0,1576
8	2,1200	2,5657	2,9302	3,2748	3,6274	4,0259	4,5434			0,9668
9	2,0507	2,4729	2,8164	3,1248	3,4271	3,7451	4,1148	4,6058		0,9732
10	2,0025	2,3997	2,7147	2,9993	3,2763	3,5582	3,8621	4,2153	4,6964	0,9780



**Таблица А.19**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 9$ )) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0,6634	0,3366									0,6401
3	0,4433	0,4098	0,1469								0,8132
4	0,3208	0,3685	0,2349	0,0758							0,8854
5	0,2437	0,3183	0,2529	0,1417	0,0434						0,9224
6	0,1829	0,2626	0,2459	0,1797	0,0989	0,0300					0,9439
7	0,1509	0,2284	0,2251	0,1835	0,1253	0,0669	0,0199				0,9516
8	0,1240	0,1955	0,2041	0,1813	0,1395	0,0929	0,0484	0,0143			0,9668
9	0,1026	0,1691	0,1873	0,1711	0,1418	0,1067	0,0716	0,0381	0,0117		0,9732
10	0,0892	0,1469	0,1651	0,1610	0,1434	0,1158	0,0853	0,0553	0,0293	0,0087	0,9780

**Таблица А.20**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании основного параметра распределения Вейбулла, масштабного параметра распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	3,4903									0,3282
3	0,1418	3,2891								0,6518
4	0,1505	2,6936	4,5643							0,7481
5	0,0516	0,2486	2,6173	4,4970						0,8235
6	0,0535	0,2580	2,3339	3,6005	5,3984					0,8639
7	0,0244	0,1154	0,3260	2,2878	3,5602	5,3523				0,8936
8	0,0251	0,1181	0,3342	2,1205	3,1036	4,2984	6,0540			0,9141
9	0,0136	0,0639	0,1731	0,3843	2,0935	3,0803	4,2767	6,0333		0,9288
10	0,0137	0,0649	0,1760	0,3917	1,9766	2,7906	3,7069	4,8673	6,6006	0,9408

**Таблица А.21**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании основного параметра распределения Вейбулла, масштабного параметра распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0,9695	0,0305									0,3282
3	0,1322	0,8305	0,0373								0,6518
4	0,1397	0,7927	0,0572	0,0104							0,7481
5	0,0503	0,1698	0,7069	0,0619	0,0111						0,8235
6	0,0521	0,1753	0,6757	0,0696	0,0228	0,0045					0,8639
7	0,0241	0,0949	0,1692	0,6203	0,0731	0,0237	0,0047				0,8936
8	0,0248	0,0866	0,1727	0,5959	0,0751	0,0313	0,0113	0,0023			0,9141
9	0,0134	0,0465	0,0970	0,1602	0,5576	0,0774	0,0320	0,1115	0,0024		0,9288
10	0,0136	0,0492	0,0986	0,1627	0,5374	0,0771	0,0368	0,0169	0,0063	0,0014	0,9408

**Таблица А.22**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения Вейбулла, двух параметров распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	0,2731	2,6067													0,4079
4	0,2109	1,3979	3,4137												0,5572
5	0,1044	0,5123	1,9590	3,8606											0,6836
6	0,0772	0,3649	1,2269	2,5726	4,4096										0,7571
7	0,0501	0,2318	0,6758	1,7192	2,9922	4,7959									0,8109
8	0,0377	0,1740	0,4837	1,1904	2,2041	3,4285	5,2049								0,8480
9	0,0275	0,1269	0,3431	0,7829	1,6027	2,5713	3,7667	5,5273							0,8756
10	0,0213	0,0988	0,2638	0,5770	1,1805	1,9932	2,9269	4,1024	5,8478						0,8963
11	0,0165	0,0771	0,2046	0,4359	0,8560	1,5344	2,3192	3,2319	4,3930	6,1270					0,9123
12	0,0123	0,0618	0,1638	0,3434	0,6517	1,1789	1,8570	2,6163	3,5103	4,6589	6,3853				0,9248
13	0,0106	0,0500	0,1326	0,2754	0,5106	0,9030	1,4807	2,1401	2,8810	3,7623	4,9016	6,6208			0,9349
14	0,0087	0,0412	0,1094	0,2261	0,3126	0,7116	1,1798	1,7608	2,4019	3,1286	3,9997	5,1314	6,8444		0,9431
15	0,0072	0,0344	0,0913	0,1881	0,3394	0,5734	0,9387	1,4426	2,0116	2,6381	3,3538	4,2169	5,3425	7,0506	0,9498

**Таблица А.23**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения Вейбулла, двух параметров распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$A$
3	0,2390	0,6872	0,0738													0,4079
4	0,1901	0,5628	0,2142	0,0329												0,5572
5	0,0991	0,3018	0,4581	0,1199	0,0211											0,6836
6	0,0743	0,2314	0,4011	0,2169	0,0641	0,0122										0,7572
7	0,0489	0,1581	0,2843	0,3295	0,1290	0,0419	0,0083									0,8109
8	0,0370	0,1227	0,2238	0,3124	0,1938	0,0779	0,0269	0,0055								0,8480
9	0,0271	0,0921	0,1712	0,2525	0,2557	0,1250	0,0533	0,0191	0,0040							0,8756
10	0,0211	0,0729	0,1379	0,2065	0,2545	0,1708	0,0827	0,0371	0,0136	0,0029						0,8963
11	0,0164	0,0578	0,1108	0,1683	0,2218	0,2101	0,1164	0,0589	0,0271	0,0102	0,0022					0,9123
12	0,0131	0,0468	0,0912	0,1395	0,1882	0,2136	0,1515	0,0830	0,0432	0,0204	0,0078	0,0017				0,9248
13	0,0105	0,0383	0,0754	0,1165	0,1592	0,1947	0,1779	0,1099	0,0615	0,0329	0,0158	0,0061	0,0013			0,9349
14	0,0087	0,0317	0,0632	0,0988	0,1357	0,1710	0,1836	0,1354	0,0814	0,0467	0,0255	0,0124	0,0048	0,0011		0,9431
15	0,0072	0,0266	0,0535	0,0842	0,1163	0,1486	0,1725	0,1548	0,1025	0,0623	0,0365	0,0203	0,0099	0,0039	0,0009	0,9498

**Таблица А.24**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании математического ожидания нормального распределения, параметра сдвига логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	0,0									0,6336
3	-0,6120	0,6120								0,8098
4	-0,9816	0,0	0,9816							0,8825
5	-1,2444	-0,3823	0,3823	1,2444						0,9201
6	-1,4468	-0,6589	0,0	0,6589	1,4468					0,9420
7	-1,6108	-0,8744	-0,2803	0,2803	0,8744	1,6108				0,9560
8	-1,7479	-1,0499	-0,5005	0,0	0,5005	1,0499	1,7479			0,9655
9	-1,8655	-1,1976	-0,6812	-0,2218	0,2218	0,6812	1,1976	1,8655		0,9721
10	-1,9682	-1,3246	-0,8338	-0,4047	0,0	0,4047	0,8338	1,3246	1,9682	0,9771

**Таблица А.25**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании математического ожидания нормального распределения, параметра сдвига логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0,5000	0,5000									0,6336
3	0,2703	0,4594	0,2703								0,8098
4	0,1631	0,3369	0,3369	0,1631							0,8825
5	0,1067	0,2444	0,2978	0,2444	0,1067						0,9201
6	0,0740	0,1810	0,2450	0,2450	0,1810	0,0740					0,9320
7	0,0536	0,1373	0,1987	0,2208	0,1987	0,1373	0,0536				0,9560
8	0,0403	0,1066	0,1615	0,1916	0,1916	0,1615	0,1066	0,0403			0,9655
9	0,0310	0,0845	0,1323	0,1644	0,1756	0,1644	0,1323	0,0845	0,0310		0,9721
10	0,0245	0,0662	0,1095	0,1406	0,1572	0,1572	0,1406	0,1095	0,0662	0,0245	0,9771

**Таблица А.26**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании стандартного отклонения нормального распределения, масштабного параметра логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	-1,5750									
	1,5750									0,3042
3	-1,4821	1,4821								0,6522
4	-2,0249	-1,1865	1,4520							
	-1,4520	1,1855	2,0249							0,7358
5	-1,9956	-1,1401	1,1401	1,9958						0,8244
6	-2,3269	-1,6190	-0,9837	1,1190	1,9821					0,8588
	-1,9821	-1,1190	0,9837	1,6190	2,3269					
7	-2,3130	-1,6002	-0,9558	0,9558	1,6002	2,3130				0,8943
8	-2,5488	-1,9105	-1,3848	-0,8548	0,9400	1,5897	2,3053			
	-2,3053	-1,5897	-0,9400	0,8548	1,3848	1,9105	2,5488			0,9117
9	-2,5408	-1,9003	-1,3715	-0,8355	0,8355	1,3715	1,9003	2,5408		0,9294
10	-2,7223	-2,1286	-1,6602	-1,2260	-0,7634	0,8233	1,3632	1,8939	2,5358	
	-2,5358	-1,8939	-1,3632	-0,8233	0,7634	1,2260	1,6602	2,1286	2, 7223	0,9394



**Таблица А.27**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании стандартного отклонения нормального распределения, масштабного параметра логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0,0576	0,9424									
	0,9424	0,0576									0,3042
3	0,0692	0,8616	0,0692								0,6522
4	0,0214	0,0965	0,8089	0,0732							
	0,0732	0,8089	0,0965	0,0214							0,7358
5	0,0230	0,1041	0,7458	0,1041	0,0230						0,8244
6	0,0100	0,0427	0,1099	0,7058	0,1079	0,0237					
	0,0237	0,1079	0,7058	0,1099	0,0427	0,0100					0,8588
7	0,0104	0,0444	0,1148	0,6608	0,1148	0,0444	0,0104				0,8943
8	0,0054	0,0226	0,0550	0,1133	0,6300	0,1177	0,0454	0,0106			
	0,0106	0,0454	0,1177	0,6300	0,1133	0,0550	0,0226	0,0054			0,9117
9	0,0055	0,0232	0,0564	0,1166	0,5966	0,1166	0,0564	0,0232	0,0055		0,9294
10	0,0032	0,0134	0,0318	0,0617	0,1125	0,5722	0,1188	0,0573	0,0235	0,0056	
	0,0056	0,0235	0,0573	0,1188	0,5722	0,1126	0,0617	0,0318	0,0314	0,0032	0,9394

**Таблица А.28**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров нормального распределения, двух параметров логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	-1,1106	1,1106													0,4065
4	-1,3834	0,0	1,3834												0,5527
5	-1,6961	-0,6894	0,6894	1,6961											0,6826
6	-1,8817	-0,9970	0,0	0,9970	1,8817										0,7557
7	-2,0600	-1,2647	-0,4918	0,4918	1,2647	2,0600									0,8103
8	-2,1954	-1,4552	-0,7863	0,0	0,7863	1,4552	2,1954								0,8474
9	-2,3188	-1,6218	-1,0223	-0,3828	0,3828	1,0223	1,6218	2,3188							0,8753
10	-2,4225	-1,7578	-1,2046	-0,6497	0,0	0,6497	1,2046	1,7578	2,4225						0,8960
11	-2,5167	-1,8784	-1,3602	-0,8621	-0,3143	0,3143	0,8621	1,3602	1,8784	2,5167					0,9121
12	-2,5993	-1,9028	-1,4914	-1,0331	-0,5334	0,0	0,5334	1,0331	1,4914	1,9028	2,5993				0,9247
13	-2,6746	-2,0762	-1,6068	-1,1784	-0,7465	-0,2669	0,2669	0,7465	1,1784	1,6068	2,0762	2,6746			0,9348
14	-2,7436	-2,1609	-1,7092	-1,3042	-0,9065	-0,4818	0,0	0,4818	0,9065	1,3042	1,7092	2,1609	2,7436		0,9430
15	-2,8069	-2,2378	-1,8011	-1,4150	-1,0435	-0,6590	-0,2325	0,2325	0,6590	1,0435	1,4150	1,8011	2,2378	2,8069	0,9498

**Таблица А.29**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров нормального распределения, двух параметров логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$A$
3	0,1334	0,7332	0,1334													0,4065
4	0,0833	0,4167	0,4167	0,0833												0,5527
5	0,0449	0,2004	0,5094	0,2004	0,0449											0,6826
6	0,0299	0,1295	0,3406	0,3406	0,1295	0,0299										0,7557
7	0,0197	0,0833	0,2084	0,3772	0,2084	0,0833	0,0197									0,8103
8	0,0141	0,0587	0,1431	0,2841	0,2841	0,1431	0,0587	0,0141								0,8474
9	0,0102	0,0422	0,1009	0,1976	0,2982	0,1976	0,1009	0,0422	0,0102							0,8753
10	0,0077	0,0317	0,0748	0,1438	0,2420	0,2420	0,1438	0,0748	0,0317	0,0077						0,8960
11	0,0059	0,0243	0,0567	0,1074	0,1823	0,2468	0,1823	0,1074	0,0567	0,0243	0,0059					0,9121
12	0,0047	0,0190	0,0442	0,0829	0,1392	0,2100	0,2100	0,1392	0,0829	0,0442	0,0190	0,0047				0,9247
13	0,0037	0,0152	0,0352	0,0652	0,1085	0,1670	0,2104	0,1670	0,1085	0,0652	0,0352	0,0152	0,0037			0,9348
14	0,0030	0,0124	0,0283	0,0524	0,0862	0,1327	0,1850	0,1850	0,1327	0,0862	0,0524	0,0283	0,0124	0,0030		0,9430
15	0,0025	0,0101	0,0232	0,0427	0,0698	0,1066	0,1532	0,1838	0,1532	0,1066	0,0698	0,0427	0,0232	0,0101	0,0025	0,9498

**Таблица А.30**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра сдвига распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$	$A$
2	-0,4660										0,6476
3	-0,9598	-0,0174									0,8203
4	-1,2135	-0,5719	0,2822								0,8910
5	-1,3777	-0,8637	-0,3034	0,5102							0,9269
6	-1,4963	-1,0548	-0,6172	-0,0950	0,6945						0,9476
7	-1,5877	-1,1936	-0,8247	-0,4235	0,0759	0,8496					0,9606
8	-1,6614	-1,3010	-0,9766	-0,6425	-0,2630	0,2213	0,9838				0,9693
9	-1,7226	-1,3876	-1,0945	-0,8036	-0,1256	0,3477	1,0999				0,9754
10	-1,7746	-1,4596	-1,1899	-0,9292	-0,6587	-0,3597	-0,0053	0,4598	1,2073		0,9798
11	-1,8112	-1,5147	-1,2649	-1,0280	-0,7880	-0,5315	-0,2426	0,1038	0,5630	1,3034	0,9832

**Таблица А.31**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра сдвига распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$A$
2	0,2032	0,7968										0,6476
3	0,0735	0,2880	0,6385									0,8203
4	0,0345	0,1355	0,3004	0,5296								0,8911
5	0,0189	0,0744	0,1648	0,2905	0,4514							0,9269
6	0,0116	0,0451	0,1000	0,1763	0,2740	0,3930						0,9476
7	0,0075	0,0294	0,0652	0,1150	0,1787	0,2563	0,3479					0,9606
8	0,0052	0,0202	0,0449	0,0791	0,1229	0,1763	0,2394	0,3120				0,9693
9	0,0037	0,0145	0,0322	0,0567	0,0882	0,1265	0,1717	0,2238	0,2827			0,9754
10	0,0028	0,0107	0,0239	0,0421	0,0654	0,0938	0,1273	0,1659	0,2097	0,2584		0,9798
11	0,0024	0,0083	0,0183	0,0322	0,0498	0,0715	0,0971	0,1264	0,1598	0,1964	0,2378	0,9832

**Таблица А.32**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$	$A$
2	-1,2500										0,3282
3	-1,1906	1,9535									0,6518
4	-1,5183	-0,9909	1,8940								0,7481
5	-1,5034	-0,9622	1,3919	2,9638							0,8235
6	-1,6852	-1,2811	-0,8475	1,3546	2,9291						0,8639
7	-1,6788	-1,2709	-0,8295	1,1218	2,1591	3,7091					0,8936
8	-1,8007	-1,4582	-1,1326	-0,7516	1,0959	2,1361	3,6862				0,9141
9	-1,7973	-1,4532	-1,1250	-0,7389	0,9564	1,7540	2,7510	4,3053			0,9288
10	-1,8872	-1,5826	-1,3102	-1,0262	-0,6814	0,9372	1,7374	2,7350	4,2891		0,9408
11	-1,8851	-1,5796	-1,3061	-1,0204	-0,6717	0,8425	1,5010	2,2522	3,2414	4,8031	0,9490

**Таблица А.33**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$A$
2	0,0305	0,9695										0,3282
3	0,0373	0,8305	0,1322									0,6518
4	0,0104	0,0572	0,7927	0,1397								0,7481
5	0,0111	0,0619	0,7069	0,1698	0,0503							0,8235
6	0,0045	0,0228	0,0696	0,6756	0,1754	0,0521						0,8639
7	0,0047	0,0236	0,0727	0,6210	0,1690	0,0848	0,0242					0,8936
8	0,0023	0,0112	0,0313	0,0751	0,5959	0,1727	0,0867	0,0248				0,9141
9	0,0024	0,0115	0,0321	0,0773	0,5577	0,1601	0,0971	0,0484	0,0134			0,9288
10	0,0014	0,0063	0,0169	0,0369	0,0771	0,5374	0,1628	0,0985	0,0492	0,0136		0,9408
11	0,0014	0,0064	0,0171	0,0374	0,0788	0,5089	0,1501	0,1000	0,0615	0,0302	0,0082	0,9490

**Таблица А.34**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$	$s_{11}$	$s_{12}$	$s_{13}$	$s_{14}$	$A$
3	-0,9581	1,2978													0,4079
4	-1,2278	-0,335	1,5562												0,5572
5	-1,3508	-0,6725	0,6688	2,2591											0,6836
6	-1,4838	-0,9449	-0,2045	1,0080	2,5608										0,7571
7	-1,5676	-1,096	-0,5419	0,3919	1,4614	2,9934									0,8109
8	-1,6496	-1,2321	-0,7903	-0,1743	0,7262	1,7490	3,2777								0,8480
9	-1,7097	-1,3265	-0,9444	-0,4717	0,2448	1,0698	2,0644	3,5952							0,8756
10	-1,7660	-1,4115	-1,0740	-0,6897	-0,1659	0,5499	1,3326	2,3149	3,8496						0,8963
11	-1,8119	-1,4787	-1,1715	-0,8397	-0,4262	0,1576	0,5877	1,5877	2,5639	4,1040					0,9123
12	-1,8540	-1,5388	-1,2557	-0,9617	-0,619	-0,1648	0,4282	1,0689	1,8092	2,7833	4,3280				0,9248
13	-1,8902	-1,5896	-1,3250	-1,0581	-0,7608	-0,3925	0,1020	0,6723	1,2894	2,0205	2,9948	4,5454			0,9349
14	-1,9234	-1,6354	-1,3862	-1,1406	-0,8763	-0,5658	-0,1654	0,3401	0,8852	1,4868	2,2126	3,1883	4,7419		0,9431
15	-1,9531	-1,6757	-1,4391	-1,2101	-0,9701	-0,6990	-0,3665	0,0632	0,5564	1,0811	1,6723	2,3949	3,3713	4,9279	0,9498



**Таблица А.35**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$A$
3	0,0738	0,6872	0,2390													0,4079
4	0,0329	0,2142	0,5628	0,1901												0,5572
5	0,0211	0,1199	0,4581	0,3018	0,0991											0,6836
6	0,0122	0,0641	0,2169	0,4011	0,2314	0,0743										0,7571
7	0,0083	0,0419	0,1290	0,3295	0,2843	0,1581	0,0489									0,8109
8	0,0055	0,0269	0,0779	0,1938	0,3124	0,2238	0,1227	0,0370								0,8480
9	0,0040	0,0191	0,0533	0,1250	0,2557	0,2525	0,1712	0,0921	0,0271							0,8756
10	0,0029	0,0136	0,0371	0,0827	0,1708	0,2545	0,2065	0,1379	0,0729	0,0211						0,8963
11	0,0022	0,0102	0,0271	0,0589	0,1164	0,2101	0,2218	0,1683	0,1108	0,0578	0,0164					0,9123
12	0,0017	0,0078	0,0204	0,0432	0,0830	0,1515	0,2136	0,1882	0,1395	0,0912	0,0463	0,0131				0,9248
13	0,0013	0,0061	0,0158	0,0329	0,0615	0,1099	0,1779	0,1947	0,1592	0,1165	0,0754	0,0383	0,0105			0,9349
14	0,0011	0,0048	0,0124	0,0255	0,0467	0,0814	0,1354	0,1836	0,1710	0,1357	0,0988	0,0632	0,0317	0,0087		0,9431
15	0,0009	0,0039	0,0099	0,0203	0,0365	0,0623	0,1025	0,1548	0,1725	0,1486	0,1163	0,0842	0,0535	0,0266	0,0072	0,9498

**Таблица А.36**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения Коши) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	-1,3274									0,2867
	1,3274									0,2867
3	-1,0000	1,0000								0,8106
4	-0,9597	0,7149	1,5797							0,8630
	-1,5797	-0,7149	0,9597							0,8630
5	-1,5171	-0,6591	0,6591	1,5171						0,9226
6	-1,4959	-0,6398	0,5438	1,0028	1,9562					0,9339
	-1,9562	-1,0228	-0,5438	0,6398	1,4959					0,9339
7	-1,9269	-1,0000	-0,5190	0,5190	1,0000	1,9269				0,9582
8	-1,9130	-0,9891	-0,5070	0,4529	0,8015	1,2806	2,2993			0,9715
	-2,2993	-1,2806	-0,8015	-0,4529	0,5070	0,9801	1,9130			0,9715
9	-2,2814	-1,2674	-0,7891	-0,4384	0,4384	0,7891	1,2674	2,2814		0,9739
10	-2,2712	-1,2600	-0,7819	-0,4300	0,3944	0,6759	1,0078	1,5060	2,6124	0,9780
	-2,6124	-1,5060	-1,0078	-0,6579	-0,3944	0,4300	0,7819	1,2600	2,2712	0,9780
11	-2,6002	-1,4972	-1,0000	-0,6679	-0,3846	0,6679	1,0000	1,4972	2,6002	0,9821

**Таблица А.37**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения Коши) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$A$
2	0,2055	0,7945										0,2867
3	0,7945	0,2055										0,2867
	0,2500	0,5000	0,2500									0,8106
4	0,2565	0,4411	0,1228	0,1796								0,8630
	0,1796	0,1228	0,4411	0,2565								0,8630
5	0,1855	0,1290	0,3710	0,1290	0,1855							0,9226
6	0,1876	0,1312	0,3397	0,0951	0,0960	0,1504						0,9339
	0,1504	0,0960	0,0951	0,3397	0,1312	0,1876						0,9339
7	0,1524	0,0976	0,0976	0,3048	0,0976	0,0976	0,1524					0,9583
8	0,1533	0,0984	0,0989	0,2848	0,0797	0,0739	0,0804	0,1306				0,9715
	0,1306	0,0804	0,0739	0,7978	0,2848	0,0989	0,0984	0,1533				0,9715
9	0,1315	0,0811	0,0748	0,0811	0,2630	0,0811	0,0748	0,0811	0,1315			0,9739
10	0,1320	0,0815	0,0753	0,0819	0,2489	0,0696	0,0620	0,0622	0,0702	0,1164		0,9780
	0,1164	0,0702	0,0622	0,0620	0,0696	0,2489	0,0819	0,0753	0,0815	0,1320		0,9780
11	0,1169	0,0705	0,0626	0,0626	0,0705	0,2338	0,0705	0,0626	0,0626	0,0705	0,1169	0,9821

**Таблица А.38**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра сдвига распределения Коши) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$A$
2	0,0											0,8106
3	-0,1794	0,1794										0,8577
4	-3,2845	-0,2390	0,1570									0,8991
	-0,1570	0,2390	3,2845									0,8991
5	-3,3338	-0,2137	0,2137	3,3338								0,9393
6	-3,1577	-0,3168	0,0	0,3168	0,1577							0,9582
7	-3,0827	-0,3786	-0,1150	0,1150	0,3786	3,0827						0,9658
8	-5,0956	-2,2911	-0,4018	-0,1275	0,1072	0,3744	3,0863					0,9718
	-3,0863	0,3744	-0,1072	0,1275	0,4018	2,2911	5,0965					0,9718
9	-5,1041	-2,2961	-0,3972	-0,1196	0,1196	0,3972	2,2961	5,1041				0,9779
10	-5,0213	-2,2496	-0,4445	-0,1991	0,0	0,1991	0,4445	0,4445	2,2496	5,0213		0,9821
11	-4,9723	-2,2216	-0,4792	-0,2572	-0,0820	0,0820	0,2572	0,4792	2,2216	4,9723		0,9845
12	-4,9357	-2,2027	-0,5059	-0,3020	-0,1433	0,0	0,1433	0,3020	0,5059	2,2027	4,9357	0,9860

**Таблица А.39**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра сдвига распределения Коши) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$A$
2	0,5	0,5											0,8106
3	0,4435	0,1130	0,4435										0,8577
4	0,0941	0,3312	0,1243	0,4504									0,8991
	0,4504	0,1243	0,3312	0,0941									0,8991
5	0,0928	0,3402	0,1340	0,3402	0,0928								0,9393
6	0,0976	0,3047	0,0977	0,0977	0,3047	0,0976							0,9582
7	0,0998	0,2850	0,0788	0,0728	0,0788	0,2850	0,0998						0,9658
8	0,0617	0,0693	0,2474	0,0812	0,0744	0,0800	0,2863	0,0997					0,9718
	0,0997	0,2863	0,0800	0,0744	0,0812	0,2474	0,0693	0,0617					0,9718
9	0,0616	0,0691	0,2490	0,0824	0,0758	0,0824	0,2490	0,0691	0,0616				0,9779
10	0,0626	0,0705	0,2338	0,0705	0,0626	0,0626	0,0705	0,2338	0,0705	0,0626			0,9821
11	0,0632	0,0714	0,2232	0,0621	0,0541	0,0520	0,0541	0,0621	0,2232	0,0714	0,0632		0,9845
12	0,0636	0,0721	0,2152	0,0557	0,0481	0,0453	0,0453	0,0481	0,0557	0,2152	0,0721	0,0636	0,9860

**Таблица А.40**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения Коши) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	-0,5773	0,5773													0,4677
4	-1,0000	0,0	1,0000												0,6570
5	-1,3764	-0,3249	0,3249	1,3764											0,7659
6	-1,7320	-0,5773	0,0	0,5773	1,7320										0,8315
7	-2,0765	-0,7975	-0,2282	0,2282	0,7975	2,0765									0,8735
8	-2,4142	-1,0000	-0,4142	0,0	0,4142	1,0000	2,4142								0,9018
9	-2,7475	-1,1917	-0,5773	-0,1763	0,1763	0,5773	1,1917	2,7475							0,9217
10	-3,0778	-1,3764	-0,7266	-0,3249	0,0	0,3249	0,7266	1,3764	3,0778						0,9361
11	-3,4062	-1,5561	-0,8665	-0,4567	-0,1438	0,1438	0,4567	0,8665	1,5561	3,4062					0,9469
12	-3,7319	-1,7320	-1,0000	-0,5773	-0,2679	0,0	0,2679	0,5773	1,0000	1,7320	3,7319				0,9552
13	-4,0573	-1,9053	-1,1288	-0,6903	-0,3793	-0,1214	0,1214	0,3793	0,6903	1,1288	1,9053	4,0573			0,9617
14	-4,3809	-2,0763	-1,2538	-0,7974	-0,4815	-0,2282	0,0	0,2282	0,4815	0,7974	1,2538	2,0763	4,3809		0,9669
15	-4,7041	-2,2457	-1,3762	-0,9030	-0,5773	-0,3249	-0,1051	0,1051	0,3249	0,5773	0,9003	1,3762	2,2457	4,7041	0,9711

**Таблица А.41**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра сдвига логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$A$
2	0,0										0,7500
3	-0,6931	0,6931									0,8889
4	-1,0986	0,0	1,0986								0,9375
5	-1,3863	-0,4055	0,4055	1,3863							0,9600
6	-1,6094	-0,6931	0,0	0,6931	1,6094						0,9722
7	-1,7918	-0,9163	-0,2877	0,2877	0,9163	1,7918					0,9796
8	-1,9459	-1,0986	-0,5108	0,0	0,5108	1,0986	1,9459				0,9844
9	-2,0794	-1,2528	-0,6931	-0,2231	0,2231	0,6931	1,2528	2,0794			0,9876
10	-2,1972	-1,3863	-0,8473	-0,4055	0,0	0,4055	0,8473	1,3863	2,1972		0,9900
11	-2,3026	-1,5041	-0,9808	-0,5596	-0,1823	0,1823	0,5596	0,9808	1,5041	2,3026	0,9921

**Таблица А.42**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$A$
2	-2,3993										0,3074
	2,3993										0,3074
3	-2,1651	2,1651									0,6804
4	-3,2424	-1,6762	2,1049								0,7618
	-2,1049	1,6267	3,2424								0,7618
5	-3,1685	-1,5929	1,5929	3,1385							0,8449
6	-3,9427	-2,4141	-1,3564	1,5566	3,1368						0,8757
	3,1638	-1,5566	1,3564	2,4141	3,9427						0,8757
7	-3,9053	-2,3760	-1,3107	1,3107	2,3760	3,9053					0,9078
8	-4,5191	-2,9874	-1,9953	-1,1639	1,2856	2,3552	3,8845				0,9233
	-3,8845	-2,3552	-1,2866	1,1639	1,9953	2,9874	4,5191				0,9233
9	-4,4961	-2,9648	-1,9713	-1,1341	1,1341	1,9713	2,9648	4,4961			0,9391
10	-4,4819	-2,9508	-1,9565	-1,1156	1,0318	1,7314	2,4887	3,4650	5,0067		0,9478
	-5,0067	-3,4650	-2,4887	-1,7314	-1,0318	1,1156	1,9565	2,9508	4,4819		0,9478
11	-4,9907	-3,4496	-2,4733	-1,7145	-1,0104	1,0104	1,7145	2,4733	3,4496	4,9907	0,9568



**Таблица А.43**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$A$
2	0,0832	0,9168										0,3074
	0,9168	0,0832										0,3074
3	0,1029	0,7942	0,1029									0,6844
4	0,0376	0,1200	0,7338	0,1086								0,7618
	0,1086	0,7338	0,1200	0,0376								0,7618
5	0,0404	0,1286	0,6620	0,1286	0,0404							0,8449
6	0,0190	0,0631	0,1227	0,6211	0,1325	0,0416						0,8757
	0,0416	0,1325	0,6211	0,1227	0,0631	0,0190						0,8757
7	0,0197	0,0653	0,1274	0,5752	0,1274	0,0653	0,0197					0,9078
8	0,0108	0,0372	0,0717	0,1183	0,5454	0,1299	0,0666	0,0201				0,9233
	0,0201	0,0666	0,1299	0,5454	0,1183	0,0717	0,0372	0,0108				0,9233
9	0,0110	0,0380	0,0732	0,1212	0,5132	0,1212	0,0732	0,0380	0,0110			0,9391
10	0,0066	0,0237	0,0464	0,0737	0,1123	0,4905	0,1230	0,0741	0,0385	0,0112		0,9478
	0,0112	0,0385	0,0741	0,1239	0,4905	0,1123	0,0737	0,0464	0,0237	0,0066		0,9478
11	0,0068	0,0240	0,0470	0,0748	0,1143	0,4662	0,1143	0,0748	0,0470	0,0240	0,0068	0,9568

**Таблица А.44**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	-1,1674	1,1674													0,4426
4	-1,9797	0,0	1,9797												0,6026
5	-2,5090	-0,8470	0,8470	2,5090											0,6861
6	-2,9083	-1,3335	0,0	1,3335	2,9083										0,7890
7	-3,2797	-1,7426	-0,5955	0,5955	1,7426	3,2797									0,8369
8	-3,6023	-2,0786	-1,0165	0,0	1,0165	2,0786	3,6023								0,8701
9	-3,8981	-2,3777	-1,3604	-0,4631	0,4631	1,3604	2,3777	3,8981							0,8942
10	-4,1665	-2,6442	-1,6512	-0,8235	0,0	0,8235	1,6512	2,6442	4,1665						0,9123
11	-4,4148	-2,8883	-1,9085	-1,1227	-0,3805	0,3805	1,1227	1,9085	2,8883	4,4148					0,9261
12	-4,6437	-3,1123	-2,1394	-1,3798	-0,6929	0,0	0,6929	1,3798	2,1394	3,1123	4,6437				0,9371
13	-4,8577	-3,3212	-2,3511	-1,6081	-0,9580	-0,3225	0,3235	0,9580	1,6081	2,3511	3,3212	4,8577			0,9457
14	-5,0564	-3,5150	-2,5460	-1,8138	-1,1888	-0,5984	0,0	0,5984	1,1888	1,8138	2,5460	3,5150	5,0564		0,9526
15	-5,2452	-3,6987	-2,7289	-2,0032	-1,3953	-0,8364	-0,2818	0,2818	0,8364	1,3953	2,0032	2,4289	3,6987	5,2452	0,9585

**Таблица А.45**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$A$
3	0,2373	0,5254	0,2373													0,4426
4	0,1214	0,3786	0,3786	0,1214												0,6026
5	0,0752	0,2249	0,3998	0,2249	0,0752											0,6861
6	0,0517	0,1568	0,2915	0,2915	0,1568	0,0517										0,7890
7	0,0363	0,1127	0,2064	0,2892	0,2064	0,1127	0,0363									0,8369
8	0,0265	0,0847	0,1545	0,2343	0,2343	0,1545	0,0847	0,0265								0,8701
9	0,0199	0,0650	0,1193	0,1821	0,2274	0,1821	0,1193	0,0650	0,0199							0,8942
10	0,0153	0,0510	0,0946	0,1441	0,1950	0,1950	0,1441	0,0946	0,0510	0,0153						0,9123
11	0,0119	0,0408	0,0764	0,1164	0,1605	0,1880	0,1605	0,1164	0,0764	0,0408	0,0119					0,9261
12	0,0095	0,0331	0,0627	0,0957	0,1324	0,1666	0,1666	0,1324	0,0957	0,0627	0,0331	0,0095				0,9371
13	0,0077	0,0271	0,0521	0,0799	0,1104	0,1425	0,1606	0,1425	0,1104	0,0799	0,0521	0,0271	0,0077			0,9457
14	0,0063	0,0226	0,0438	0,0675	0,0933	0,1212	0,1453	0,1453	0,1212	0,0933	0,0675	0,0438	0,0226	0,0063		0,9526
15	0,0053	0,0189	0,0371	0,0576	0,0797	0,1037	0,1277	0,1400	0,1277	0,1037	0,0797	0,0576	0,0371	0,0189	0,0053	0,9585

**Таблица А.46**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения Лапласа) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	1,8416									0,2920
	-1,8416									
3	-1,5936	1,5936								0,6476
4	-2,7044	-1,1121	1,5183							0,7303
	-1,5183	1,1121	2,7044							
5	-2,6112	-1,0176	1,0176	2,6112						0,8203
6	-2,5670	-0,9745	0,8045	1,8233	3,4173					0,8548
	-3,4173	-1,8233	-0,8045	0,9745	2,5670					
7	-3,3652	-1,7716	-0,7544	0,7544	1,7716	3,3652				0,8910
8	-3,3329	-1,7388	-0,7266	0,6311	1,3816	2,3972	3,9879			0,9087
	-3,9879	-2,3972	-1,3816	-0,6311	0,7266	1,7388	3,3329			
9	-3,9657	-2,3720	-1,3545	-0,6004	0,6004	1,3545	2,3720	3,9657		0,9269
10	-3,9468	-2,3487	-1,3335	-0,5817	0,5217	1,1246	1,8811	2,9054	4,5228	0,9371
	-4,5228	-2,9054	-1,8811	-1,1246	-0,5217	0,5817	1,3335	2,3487	3,9468	

**Таблица А.47**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения Лапласа) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$\pm t_1$	$\pm t_2$	$\pm t_3$	$\pm t_4$	$\pm t_5$	$\pm t_6$	$\pm t_7$	$\pm t_8$	$\pm t_9$	$A$
11	$\pm 0,4993$	$\pm 1,0997$	$\pm 1,8538$	$\pm 2,8714$	$\pm 4,4650$					0,9476
13	$\pm 0,4276$	$\pm 0,9269$	$\pm 1,5273$	$\pm 2,2813$	$\pm 3,2989$	$\pm 4,8925$				0,9606
15	$\pm 0,3739$	$\pm 0,8015$	$\pm 1,3008$	$\pm 1,9012$	$\pm 2,6553$	$\pm 3,6729$	$\pm 5,2665$			0,9693
17	$\pm 0,3323$	$\pm 0,7063$	$\pm 1,1338$	$\pm 1,6331$	$\pm 2,2336$	$\pm 2,9876$	$\pm 4,0052$	$\pm 5,5988$		0,9754
19	$\pm 0,2990$	$\pm 0,6314$	$\pm 1,0053$	$\pm 1,4329$	$\pm 1,9322$	$\pm 2,5326$	$\pm 3,2866$	$\pm 4,3042$	$\pm 5,8979$	0,9798

Примечание. Граничные точки интервалов симметричны относительно нуля.

**Таблица А.48**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения Лапласа) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0,9207	0,0793									0,2920
	0,0793	0,9207									0,2920
3	0,1016	0,7968	0,1016								0,6476
4	0,0335	0,1310	0,7260	0,1095							0,7303
	0,1095	0,7260	0,1310	0,0335							0,7303
5	0,0367	0,1440	0,6386	0,1440	0,0367						0,8203
6	0,0384	0,1503	0,5877	0,1429	0,0643	0,0164					0,8548
	0,0164	0,0643	0,1429	0,5877	0,1503	0,0384					0,8548
7	0,0173	0,0677	0,1502	0,5296	0,1502	0,0677	0,0173				0,8910
8	0,0179	0,0700	0,1539	0,4922	0,1404	0,0801	0,0362	0,0093			0,9087
	0,0093	0,0362	0,0801	0,1404	0,4922	0,1593	0,0700	0,0178			0,9087
9	0,0094	0,0372	0,0824	0,1453	0,4514	0,1453	0,0824	0,0372	0,0094		0,9269
10	0,0097	0,0381	0,0840	0,1477	0,4238	0,1344	0,0862	0,0488	0,0219	0,0054	0,9371
	0,0054	0,0219	0,0488	0,0862	0,1344	0,4328	0,1477	0,0840	0,0381	0,0096	0,9371

**Таблица А.49**

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения Лапласа) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$A$
11	0,3930	0,1370	0,0882	0,0500	0,0225	0,0058					0,9476
13	0,3478	0,1282	0,0894	0,0575	0,0326	0,0147	0,0037				0,9606
15	0,3120	0,1197	0,0882	0,0614	0,0396	0,0224	0,0101	0,0026			0,9693
17	0,2826	0,1119	0,0859	0,0633	0,0441	0,0283	0,0161	0,0073	0,0018		0,9754
19	0,2584	0,1049	0,0829	0,0637	0,0469	0,0327	0,0210	0,0119	0,0054	0,0014	0,9798

Примечание. В таблице приведены значения вероятностей попадания наблюдений в центральный интервал  $P_0$  и в интервалы правее центра:  $P_1, P_2, \dots$ . Значения вероятностей попадания в интервалы левее центра получаются зеркальным отражением.

**Таблица А.50**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра двойного показательного распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_i$	$\theta_2$										
		0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$t_1$	5,9243	3,4910	0,1058	0,0952	0,0864	0,0792	0,0730	0,0679	0,0634	0,0594	0,0560
	$A$	0,5239	0,3283	0,5580	0,6494	0,6742	0,6798	0,6795	0,6774	0,6750	0,6725	0,6702
3	$t_1$	5,7236	3,2901	0,1714	0,1578	0,1458	0,1353	0,1260	0,1178	0,1106	0,1042	0,0984
	$t_2$	0,1704	0,1417	0,0371	0,0351	0,0330	0,0312	0,0295	0,0279	0,0265	0,0253	0,0242
	$A$	0,6465	0,6518	0,6790	0,7947	0,8286	0,8384	0,8404	0,8397	0,8382	0,8365	0,8348
4	$t_1$	8,2073	4,5218	1,9539	0,1979	0,1851	0,1737	0,1630	0,1535	0,1447	0,1369	0,1296
	$t_2$	4,5709	2,6958	0,1871	0,0737	0,0694	0,0656	0,0620	0,0588	0,0558	0,0530	0,0506
	$t_3$	0,1986	0,1504	0,0404	0,0166	0,0161	0,0155	0,0149	0,0143	0,0138	0,0133	0,0128
	$A$	0,7910	0,7481	0,8049	0,8497	0,8879	0,8999	0,9033	0,9036	0,9029	0,9018	0,9006
5	$t_1$	9,9575	4,5027	1,9227	1,4712	0,2135	0,2012	0,1906	0,1799	0,1709	0,1617	0,1540
	$t_2$	6,4293	2,6201	0,2361	0,2097	0,1002	0,0950	0,0898	0,0851	0,0810	0,0770	0,0734
	$t_3$	3,9668	0,2484	0,0860	0,0772	0,0393	0,0378	0,0362	0,0346	0,0331	0,0318	0,0305
	$t_4$	0,2096	0,0518	0,0189	0,0174	0,0089	0,0088	0,0085	0,0083	0,0081	0,0078	0,0076
	$A$	0,8484	0,8235	0,8546	0,8919	0,9167	0,9300	0,9343	0,9353	0,9351	0,9344	0,9336



Продолжение таблицы А.50

$k$	$t_i$	$\theta_2$										
		0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	$t_1$	9,8965	5,3402	2,5662	1,4602	0,2346	0,2231	0,2118	0,2007	0,1916	0,1825	0,1738
	$t_2$	6,3520	3,5979	1,6106	0,2410	0,1257	0,1192	0,1131	0,1071	0,1025	0,0977	0,0931
	$t_3$	3,8701	2,3295	0,2457	0,1114	0,0622	0,0596	0,0567	0,0540	0,0522	0,0498	0,0476
	$t_4$	0,3459	0,2582	0,0889	0,0429	0,0245	0,0238	0,0230	0,0221	0,0216	0,0208	0,0199
	$t_5$	0,0699	0,0533	0,0195	0,0095	0,0055	0,0054	0,0053	0,0051	0,0051	0,0050	0,0048
	$A$	0,8799	0,8639	0,8891	0,9200	0,9328	0,9469	0,9518	0,9533	0,9534	0,9530	0,9525
7	$t_1$	11,2128	5,3662	2,5559	1,4460	1,2202	0,2395	0,2292	0,2182	0,2082	0,1988	0,1904
	$t_2$	7,7564	3,5651	1,5897	0,2642	0,2443	0,1394	0,1332	0,1264	0,1206	0,1150	0,1103
	$t_3$	5,4226	2,2911	0,2825	0,1393	0,1297	0,0792	0,0762	0,0723	0,0693	0,0662	0,0637
	$t_4$	3,5152	0,3265	0,1295	0,0676	0,0639	0,0402	0,0391	0,0373	0,0359	0,0345	0,0334
	$t_5$	0,3610	0,1156	0,0489	0,0260	0,0252	0,0160	0,0158	0,0152	0,0147	0,0142	0,0139
	$t_6$	0,0727	0,0245	0,0106	0,0057	0,0056	0,0035	0,0035	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032
	$A$	0,9094	0,8935	0,9141	0,9357	0,9493	0,9574	0,9626	0,9644	0,9648	0,9647	0,9643

Продолжение таблицы А.50

$k$	$t_i$	$\theta_2$										
		0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	$t_1$	12,4184	6,0434	2,9963	1,8917	1,2107	0,2534	0,2425	0,2324	0,2216	0,2134	0,2039
	$t_2$	8,9812	4,2908	2,0838	1,2386	0,2631	0,1575	0,1495	0,1431	0,1359	0,1307	0,1248
	$t_3$	6,6955	3,0976	1,4411	0,2722	0,1517	0,0974	0,0926	0,0892	0,0843	0,0815	0,0778
	$t_4$	4,8980	2,1156	0,2887	0,1435	0,0851	0,0565	0,0540	0,0524	0,0495	0,0482	0,0462
	$t_5$	3,3170	0,3342	0,1321	0,0701	0,0426	0,0287	0,0278	0,0272	0,0257	0,0252	0,0244
	$t_6$	0,3690	0,1175	0,0499	0,0272	0,0167	0,0113	0,0111	0,0109	0,0104	0,0103	0,0101
	$t_7$	0,0743	0,0249	0,0109	0,0060	0,0036	0,0025	0,0024	0,0024	0,0023	0,0023	0,0023
	$A$	0,9261	0,9141	0,9283	0,9477	0,9596	0,9643	0,9698	0,9718	0,9724	0,9724	0,9721
9	$t_1$	12,2869	6,0573	2,9859	1,8703	1,2022	1,0648	0,2549	0,2449	0,2349	0,2255	0,2148
	$t_2$	8,8417	4,2945	2,0795	1,2237	0,2765	0,2619	0,1654	0,1574	0,1508	0,1444	0,1370
	$t_3$	6,5618	3,0962	1,4280	0,2939	0,1697	0,1608	0,1087	0,1037	0,0991	0,0949	0,0897
	$t_4$	4,7832	2,1001	0,3166	0,1693	0,1038	0,0987	0,0692	0,0661	0,0634	0,0609	0,0574
	$t_5$	3,2276	0,3840	0,1652	0,0946	0,0593	0,0569	0,0408	0,0391	0,0377	0,0364	0,0343
	$t_6$	0,4694	0,1733	0,0795	0,0467	0,0296	0,0287	0,0208	0,0202	0,0197	0,0190	0,0180
	$t_7$	0,1633	0,0642	0,0302	0,0181	0,0114	0,0113	0,0082	0,0080	0,0079	0,0077	0,0073
	$t_8$	0,0340	0,0136	0,0064	0,0039	0,0025	0,0024	0,0018	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016
	$A$	0,9387	0,9288	0,9425	0,9577	0,9664	0,9713	0,9748	0,9770	0,9777	0,978	0,9777

Окончание таблицы А.50

$k$	$t_i$	$\theta_2$										
		0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	$t_1$	13,2458	6,6629	2,9794	1,8704	1,1963	1,0539	0,2636	0,2536	0,2457	0,2350	0,2258
	$t_2$	9,8558	4,9268	2,0697	1,2180	0,2912	0,2787	0,1769	0,1688	0,1637	0,1554	0,1491
	$t_3$	7,6321	3,7589	1,4116	0,3107	0,1888	0,1807	0,1220	0,1160	0,1127	0,1066	0,1021
	$t_4$	5,8941	2,8248	0,3426	0,1908	0,1234	0,1185	0,0826	0,0785	0,0766	0,0722	0,0693
	$t_5$	4,4362	1,9905	0,1972	0,1164	0,0776	0,0748	0,0530	0,0507	0,0494	0,0468	0,0450
	$t_6$	3,0918	0,3890	0,1090	0,0660	0,0452	0,0438	0,0311	0,0298	0,0294	0,0279	0,0269
	$t_7$	0,4764	0,1748	0,0533	0,0326	0,0228	0,0222	0,0158	0,0152	0,0151	0,0145	0,0140
	$t_8$	0,1658	0,0642	0,0202	0,0124	0,0088	0,0087	0,0061	0,0060	0,0060	0,0059	0,0056
	$t_9$	0,0346	0,0135	0,0043	0,0026	0,0019	0,0019	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013
	$A$	0,9493	0,9407	0,9513	0,9642	0,9712	0,9762	0,9784	0,9807	0,9815	0,9817	0,9817

**Таблица А.51**

Оптимальные частоты при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра двойного показательного распределения)

$k$	$P_i$	$\theta_2$										
		0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$P_1$	0,0517	0,0305	0,8094	0,7514	0,7078	0,6729	0,6452	0,6216	0,6024	0,5857	0,5710
	$P_2$	0,9483	0,9695	0,1906	0,2486	0,2922	0,3271	0,3548	0,3784	0,3976	0,4143	0,4290
3	$P_1$	0,0572	0,0373	0,7098	0,6229	0,5582	0,5084	0,4695	0,4383	0,4129	0,3916	0,3738
	$P_2$	0,8584	0,8306	0,2187	0,2772	0,3181	0,3472	0,3682	0,3841	0,3956	0,4044	0,4114
	$P_3$	0,0844	0,1321	0,0715	0,0998	0,1237	0,1444	0,1623	0,1776	0,1913	0,2040	0,2148
4	$P_1$	0,0165	0,0103	0,0201	0,5522	0,4768	0,4195	0,3760	0,3414	0,3143	0,2917	0,2735
	$P_2$	0,0878	0,0571	0,6677	0,2494	0,2807	0,3009	0,3134	0,3211	0,3255	0,3288	0,3296
	$P_3$	0,8012	0,7929	0,2346	0,1497	0,1802	0,2050	0,2250	0,2420	0,2557	0,2669	0,2767
	$P_4$	0,0945	0,1397	0,0776	0,0487	0,0623	0,0746	0,0856	0,0955	0,1045	0,1126	0,1202
5	$P_1$	0,0069	0,0111	0,0214	0,0121	0,4258	0,3656	0,3187	0,2839	0,2545	0,2334	0,2144
	$P_2$	0,0333	0,0617	0,6023	0,5209	0,2440	0,2563	0,2649	0,2672	0,2686	0,2664	0,2658
	$P_3$	0,0974	0,7073	0,2183	0,2602	0,1849	0,2956	0,2214	0,2340	0,2439	0,2513	0,2571
	$P_4$	0,7629	0,1694	0,1209	0,1559	0,1103	0,1295	0,1453	0,1587	0,1704	0,1809	0,1896
	$P_5$	0,0995	0,0505	0,0371	0,0509	0,0350	0,0430	0,0497	0,0562	0,0624	0,0680	0,0731

Продолжение таблицы А.51

$k$	$P_i$	$\theta_2$										
		0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	$P_1$	0,0071	0,0046	0,0059	0,0125	0,3912	0,3277	0,2806	0,2453	0,2159	0,1934	0,1758
	$P_2$	0,0347	0,0228	0,0340	0,4728	0,2136	0,2232	0,2268	0,2272	0,2245	0,2217	0,2184
	$P_3$	0,1027	0,0700	0,5718	0,2305	0,1750	0,1913	0,2041	0,2127	0,2182	0,2235	0,2269
	$P_4$	0,6968	0,6751	0,2254	0,1634	0,1268	0,1446	0,1596	0,1714	0,1830	0,1908	0,1981
	$P_5$	0,1244	0,1756	0,1246	0,0927	0,0717	0,0856	0,0977	0,1080	0,1185	0,1269	0,1339
	$P_6$	0,0343	0,0519	0,0383	0,0281	0,0217	0,0266	0,0312	0,0354	0,0399	0,0437	0,0469
7	$P_1$	0,0037	0,0047	0,0060	0,0131	0,0076	0,3019	0,2528	0,2170	0,1891	0,1670	0,1490
	$P_2$	0,0170	0,0236	0,0356	0,4396	0,3688	0,1963	0,1970	0,1958	0,1919	0,1882	0,1828
	$P_3$	0,0458	0,0728	0,5268	0,2058	0,2188	0,1748	0,1833	0,1900	0,1936	0,1959	0,1971
	$P_4$	0,1051	0,6203	0,2034	0,1579	0,1793	0,1451	0,1579	0,1674	0,1758	0,1820	0,1869
	$P_5$	0,6632	0,1694	0,1350	0,1085	0,1297	0,1051	0,1187	0,1288	0,1385	0,1467	0,1547
	$P_6$	0,1295	0,0850	0,0722	0,0582	0,0736	0,0592	0,0693	0,0770	0,0843	0,0909	0,0975
	$P_7$	0,0357	0,0242	0,0210	0,0169	0,0222	0,0175	0,0210	0,0239	0,0268	0,0293	0,0320

Продолжение таблицы А.51

$k$	$P_i$	$\theta_2$										
		0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	$P_1$	0,0020	0,0024	0,0025	0,0034	0,0079	0,2816	0,2334	0,1966	0,1698	0,1465	0,1302
	$P_2$	0,0092	0,0113	0,0130	0,0209	0,3412	0,1735	0,1744	0,1707	0,1674	0,1619	0,1569
	$P_3$	0,0239	0,0315	0,0405	0,4176	0,1960	0,1594	0,1659	0,1683	0,1722	0,1718	0,1723
	$P_4$	0,0512	0,0754	0,5053	0,2083	0,1663	0,1394	0,1494	0,1573	0,1636	0,1681	0,1706
	$P_5$	0,1041	0,5953	0,2066	0,1602	0,1318	0,1125	0,1232	0,1339	0,1412	0,1488	0,1538
	$P_6$	0,6411	0,1733	0,1371	0,1111	0,1921	0,0787	0,0891	0,0998	0,1059	0,1143	0,1204
	$P_7$	0,1320	0,0862	0,0735	0,0607	0,0502	0,0427	0,0500	0,0565	0,0614	0,0677	0,0731
	$P_8$	0,0365	0,0246	0,0215	0,0178	0,0145	0,0122	0,0146	0,0109	0,0186	0,0209	0,0227
9	$P_1$	0,0021	0,0023	0,0025	0,0036	0,0082	0,0049	0,2166	0,1801	0,1527	0,1314	0,1167
	$P_2$	0,0099	0,0113	0,0131	0,0218	0,3227	0,2651	0,1541	0,1521	0,1466	0,1412	0,1374
	$P_3$	0,0256	0,0316	0,0419	0,3886	0,1763	0,1775	0,1501	0,1517	0,1532	0,1530	0,1537
	$P_4$	0,0539	0,0772	0,4734	0,1878	0,1530	0,1629	0,1393	0,1458	0,1497	0,1523	0,1555
	$P_5$	0,1076	0,5587	0,1877	0,1512	0,1285	0,1421	0,1228	0,1308	0,1373	0,1426	0,1465
	$P_6$	0,5917	0,1597	0,1344	0,1162	0,0995	0,1137	0,0999	0,1075	0,1150	0,1223	0,1257
	$P_7$	0,1308	0,0970	0,0883	0,0781	0,0672	0,0789	0,0691	0,0774	0,0842	0,0903	0,0945
	$P_8$	0,0616	0,0487	0,0459	0,0411	0,0348	0,0428	0,0374	0,0423	0,0474	0,0515	0,0538
	$P_9$	0,0168	0,0135	0,0128	0,0116	0,0098	0,0121	0,0107	0,0123	0,0139	0,0154	0,0162

Окончание таблицы А.51

$k$	$P_i$	$\theta_2$										
		0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	$P_1$	0,0013	0,0013	0,0026	0,0037	0,0083	0,0052	0,2057	0,1694	0,1401	0,1206	0,1045
	$P_2$	0,0059	0,0060	0,0133	0,0222	0,3037	0,2430	0,1403	0,1372	0,1299	0,1264	0,1207
	$P_3$	0,0148	0,0161	0,0435	0,3678	0,1578	0,1570	0,1350	0,1372	0,1359	0,1361	0,1351
	$P_4$	0,0305	0,0360	0,4446	0,1704	0,1406	0,1478	0,1282	0,1334	0,1360	0,1389	0,1397
	$P_5$	0,0563	0,0773	0,1702	0,1411	0,1228	0,1348	0,1185	0,1238	0,1319	0,1342	0,1377
	$P_6$	0,1043	0,5411	0,1300	0,1152	0,1015	0,1155	0,1019	0,1104	0,1166	0,1215	0,1263
	$P_7$	0,5749	0,1619	0,0947	0,0865	0,0780	0,0914	0,0798	0,0875	0,0955	0,1001	0,1052
	$P_8$	0,1324	0,0982	0,0615	0,0567	0,0526	0,0628	0,0546	0,0602	0,0673	0,0715	0,0761
	$P_9$	0,0624	0,0488	0,0310	0,0285	0,0273	0,0332	0,0282	0,0320	0,0364	0,0393	0,0423
	$P_{10}$	0,0172	0,0133	0,0086	0,0079	0,0074	0,0093	0,0078	0,0089	0,0104	0,0114	0,0124

**Таблица А.52**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров двойного показательного распределения) ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	2,6067	0,2731													0,4079
4	3,4137	1,3979	0,2109												0,5572
5	3,8606	1,9590	0,5123	0,1044											0,6836
6	4,4096	2,5726	1,2269	0,3649	0,0772										0,7571
7	4,7959	2,9922	1,7192	0,6758	0,2318	0,0501									0,8109
8	5,2049	3,4285	2,2041	1,1904	0,4837	0,1740	0,0377								0,8480
9	5,5273	3,7667	2,5713	1,6027	0,7829	0,3431	0,1269	0,0275							0,8756
10	5,8478	4,1024	2,9269	1,9932	1,1805	0,5770	0,2638	0,0988	0,0213						0,8963
11	6,1270	4,3930	3,2319	2,3192	1,5344	0,8560	0,4359	0,2046	0,0771	0,0165					0,9123
12	6,3853	4,6589	3,5103	2,6163	1,8570	1,1789	0,6517	0,3434	0,1638	0,0618	0,0123				0,9248
13	6,6208	4,9016	3,7623	2,8810	2,1401	1,4807	0,9030	0,5106	0,2754	0,1326	0,0500	0,0106			0,9349
14	6,8444	5,1314	3,9997	3,1286	2,4019	1,7608	1,1798	0,7116	0,3126	0,2261	0,1094	0,0412	0,0087		0,9431
15	7,0506	5,3425	4,2169	3,3538	2,6381	2,0116	1,4426	0,9387	0,5734	0,3394	0,1881	0,0913	0,0344	0,0072	0,9498



**Таблица А.53**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании основного параметра  $\theta_0$  гамма-распределения в зависимости от его значений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$t_1$	0,0001	0,0015	0,0513	0,1847	0,3697	1,2770	2,2507	3,2389	4,2389	5,2276	6,2246	7,2223	8,2209
	$A$	0,5582	0,6349	0,6241	0,6213	0,6217	0,6266	0,6295	0,6312	0,6312	0,6330	0,6335	0,6342	0,6342
3	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0072	0,0486	0,1320	0,7104	1,4483	2,2477	3,0797	3,9331	4,7998	5,6776	6,5651
	$t_2$	0,0107	0,0119	0,1849	0,4548	0,7585	2,0041	3,2128	4,3894	5,5430	6,6830	7,8083	8,9249	10,0345
	$A$	0,5899	0,8030	0,8016	0,7994	0,7993	0,8024	0,8045	0,8058	0,8065	0,8071	0,8075	0,8077	0,8080
4	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0017	0,0183	0,0628	0,4750	1,0777	1,7666	2,5032	3,2712	4,0605	4,8667	5,6859
	$t_2$	0,0024	0,0046	0,0407	0,1593	0,3309	1,2132	2,1777	3,1630	4,1555	5,1501	6,1471	7,1423	8,1399
	$t_3$	0,0598	0,1029	0,3422	0,7193	1,1017	2,5616	3,9121	5,2047	6,4588	7,6841	8,8927	10,0770	11,2527
	$A$	0,5964	0,8594	0,8771	0,8754	0,8753	0,8772	0,8787	0,8796	0,8801	0,8805	0,8808	0,8810	0,8812
5	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0005	0,0085	0,0354	0,3472	0,8613	1,4748	2,1424	2,8509	3,5885	4,3438	5,1164
	$t_2$	0,0010	0,0021	0,0128	0,0721	0,1805	0,8501	1,6675	2,5337	3,4201	4,3267	5,2437	6,1642	7,0915
	$t_3$	0,0117	0,0325	0,1009	0,2965	0,5452	1,6339	2,7524	3,8565	4,9443	6,0309	7,1122	8,1814	9,2491
	$t_4$	0,1236	0,2779	0,5111	0,9639	1,4159	3,0120	4,4759	5,8487	7,1625	8,4527	9,7195	10,9557	12,1801
	$A$	0,5987	0,8786	0,9162	0,9150	0,9148	0,9161	0,9172	0,9179	0,9183	0,9186	0,9188	0,9189	0,9191

Продолжение таблицы А.53

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0002	0,0044	0,0215	0,2687	0,7181	1,2744	1,8922	2,5580	3,2519	3,9678	4,7046
	$t_2$	0,0007	0,0013	0,0053	0,0374	0,1083	0,6423	1,3543	2,1362	2,9496	3,7960	4,6533	5,5169	6,3949
	$t_3$	0,0067	0,0133	0,0412	0,1497	0,3154	1,1836	2,1466	3,1328	4,1173	5,1224	6,1180	7,1093	8,1070
	$t_4$	0,0496	0,0894	0,1930	0,4426	0,7422	1,9977	3,2241	4,4200	5,5757	6,7415	7,8782	8,9940	10,1176
	$t_5$	0,3139	0,4711	0,7737	1,1900	1,6659	3,3991	4,9418	6,3832	7,7412	9,1011	10,4031	11,6661	12,9383
	A	0,5998	0,8879	0,9389	0,9383	0,9381	0,9390	0,9399	0,9403	0,9407	0,9409	0,9410	0,9412	0,9412
7	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0001	0,0026	0,0146	0,2171	0,6186	1,1309	1,7093	2,3332	2,9988	3,6820	4,3897
	$t_2$	0,0005	0,0008	0,0031	0,0218	0,0731	0,5102	1,1471	1,8632	2,6240	3,4080	4,2263	5,0457	5,8840
	$t_3$	0,0030	0,0055	0,0243	0,0864	0,2092	0,9178	1,7754	2,6727	3,5869	4,5057	5,4518	6,3835	7,3311
	$t_4$	0,0161	0,0281	0,1128	0,2461	0,4752	1,4858	2,5661	3,6407	4,7026	5,7498	6,8211	7,8579	8,9109
	$t_5$	0,0785	0,1281	0,4070	0,6139	0,9682	2,3185	3,6392	4,9055	6,1241	7,3089	8,5154	9,6612	10,8234
	$t_6$	0,3641	0,5483	1,1660	1,4213	1,9761	3,7328	5,3499	6,8529	8,2562	9,6122	10,9755	12,2600	13,5624
	A	0,6004	0,8935	0,9521	0,9531	0,9529	0,9535	0,9543	0,9547	0,9549	0,9551	0,9552	0,9553	0,9554
8	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0001	0,0016	0,0098	0,1784	0,5404	1,0152	1,5649	2,1542	2,7984	3,4508	4,1331
	$t_2$	0,0004	0,0005	0,0011	0,0131	0,0489	0,4155	0,9904	1,6520	2,3718	3,1110	3,9004	4,6821	5,4852
	$t_3$	0,0019	0,0030	0,0073	0,0515	0,1381	0,7355	1,5094	2,3329	3,1953	4,0582	4,9692	5,8519	6,7541
	$t_4$	0,0088	0,0137	0,0305	0,1450	0,3061	1,1623	2,1332	3,1107	4,1077	5,0847	6,1093	7,0845	8,0765
	$t_5$	0,0364	0,0540	0,1008	0,3414	0,5997	1,7435	2,9199	4,0545	5,1847	6,2784	7,4181	8,4880	9,5668
	$t_6$	0,1372	0,1911	0,2947	0,7368	1,1125	2,5864	3,9929	5,3042	6,5736	7,7931	9,0609	10,2371	11,4088
	$t_7$	0,5132	0,6608	0,8568	1,6048	2,1277	4,0015	5,7046	7,2378	8,6726	10,0464	11,4837	12,7955	14,0743
	A	0,6008	0,8968	0,9632	0,9631	0,9630	0,9634	0,9641	0,9644	0,9646	0,9647	0,9648	0,9649	0,9650

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0001	0,0013	0,0070	0,1530	0,4820	0,9280	1,4472	2,0142	2,6267	3,2788	3,9300
	$t_2$	0,0004	0,0006	0,0012	0,0109	0,0348	0,3528	0,8748	1,4972	2,1744	2,8840	3,6306	4,4127	5,1757
	$t_3$	0,0020	0,0035	0,0085	0,0426	0,0979	0,6176	1,3174	2,0917	2,8984	3,7253	4,5811	5,4663	6,3141
	$t_4$	0,0088	0,0162	0,0359	0,1181	0,2136	0,9611	1,8339	2,7493	3,6755	4,6078	5,5630	6,5453	7,4689
	$t_5$	0,0338	0,0579	0,1080	0,2673	0,4088	1,4083	2,4560	3,5096	4,5561	5,5877	6,6434	7,7191	8,7179
	$t_6$	0,1045	0,1629	0,2658	0,5513	0,7273	2,0082	3,2445	4,4375	5,6109	6,7483	7,9071	9,0767	10,1554
	$t_7$	0,2544	0,3677	0,6014	1,1038	1,2617	2,8682	4,3192	5,6654	6,9793	8,2363	9,5076	10,7895	11,9544
	$t_8$	0,7853	0,9597	1,3541	1,9491	2,3730	4,2945	6,0374	7,5654	9,0699	10,4673	11,8848	13,3029	14,5811
	$A$	0,6010	0,8983	0,9694	0,9696	0,9701	0,9704	0,9710	0,9713	0,9714	0,9715	0,9716	0,9717	0,9717
10	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0001	0,0008	0,0057	0,1286	0,4338	0,8578	1,3486	1,9032	2,4925	3,1060	3,7579
	$t_2$	0,0003	0,0003	0,0006	0,0066	0,0283	0,2949	0,7825	1,3747	2,0130	2,7092	3,4238	4,1501	4,9167
	$t_3$	0,0016	0,0012	0,0026	0,0256	0,0795	0,5129	1,1686	1,9036	2,6636	3,4726	4,2864	5,1051	5,9607
	$t_4$	0,0064	0,0042	0,0090	0,0708	0,1728	0,7908	1,6095	2,4773	3,3469	4,2579	5,1601	6,0628	6,9967
	$t_5$	0,0234	0,0130	0,0261	0,1615	0,3261	1,1420	2,1240	3,1212	4,0977	5,1035	6,0920	7,0735	8,0841
	$t_6$	0,0744	0,0370	0,0676	0,3289	0,5665	1,5937	2,7466	3,8739	4,9577	6,0581	7,1346	8,1975	9,2821
	$t_7$	0,2103	0,0994	0,1652	0,6304	0,9409	2,1950	3,5364	4,8009	5,9965	7,1919	8,3648	9,5131	10,6742
	$t_8$	0,4568	0,2598	0,3972	1,1740	1,5499	3,0541	4,6113	6,0295	7,3547	8,6527	9,9446	11,1855	12,4307
	$t_9$	1,0251	0,7082	1,0120	2,5526	2,7021	4,4768	6,3189	7,9303	9,4257	10,8507	12,3101	13,6776	15,0095
	$A$	0,6011	0,9003	0,9734	0,9747	0,9754	0,9755	0,9761	0,9763	0,9765	0,9766	0,9766	0,9767	0,9767

**Таблица А.54**

Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании основного параметра  $\theta_0$  гамма-распределения в зависимости от его значений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$P_1$	0,4185	0,2171	0,2513	0,2837	0,3091	0,3650	0,3908	0,4061	0,4177	0,4239	0,4297	0,4344	0,4383
	$P_2$	0,5815	0,7829	0,7487	0,7163	0,6909	0,6350	0,6092	0,5939	0,5823	0,5761	0,5703	0,5656	0,5617
3	$P_1$	0,4185	0,1103	0,0955	0,1103	0,1237	0,1594	0,1783	0,1901	0,1983	0,2045	0,2092	0,2130	0,2162
	$P_2$	0,2487	0,2533	0,3614	0,3901	0,4080	0,4357	0,4445	0,4486	0,4508	0,4525	0,4535	0,4543	0,4548
	$P_3$	0,3329	0,6365	0,5431	0,4996	0,4684	0,4049	0,3772	0,3613	0,3509	0,3430	0,3373	0,3328	0,3289
4	$P_1$	0,4185	0,1103	0,0465	0,0537	0,0609	0,0827	0,0951	0,1034	0,1092	0,1137	0,1171	0,1198	0,1221
	$P_2$	0,1564	0,1767	0,1781	0,2028	0,2209	0,2594	0,2762	0,2858	0,2923	0,2967	0,3002	0,3027	0,3049
	$P_3$	0,2140	0,3253	0,3673	0,3821	0,3860	0,3830	0,3774	0,3733	0,3702	0,3677	0,3660	0,3642	0,3627
	$P_4$	0,2111	0,3876	0,4081	0,3614	0,3323	0,2749	0,2513	0,2375	0,2283	0,2219	0,2167	0,2134	0,2103
5	$P_1$	0,4185	0,1103	0,0252	0,0303	0,0348	0,0480	0,0566	0,0625	0,0664	0,0696	0,0723	0,0743	0,0760
	$P_2$	0,1083	0,1258	0,1019	0,1165	0,1304	0,1613	0,1776	0,1871	0,1931	0,1981	0,2019	0,2046	0,2070
	$P_3$	0,1462	0,2293	0,2196	0,2397	0,2551	0,2766	0,2849	0,2884	0,2901	0,2915	0,2926	0,2931	0,2938
	$P_4$	0,1705	0,2943	0,3413	0,3424	0,3370	0,3167	0,3046	0,2968	0,2916	0,2875	0,2843	0,2819	0,2797
	$P_5$	0,1565	0,2403	0,3120	0,2711	0,2427	0,1974	0,1763	0,1652	0,1587	0,1532	0,1488	0,1461	0,1436

Продолжение таблицы А.54

$k$	$P_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	$P_1$	0,4185	0,1103	0,0160	0,0186	0,0213	0,0302	0,0364	0,0406	0,0435	0,0460	0,0478	0,0492	0,0505
	$P_2$	0,0899	0,0991	0,0660	0,0725	0,0814	0,1058	0,1192	0,1277	0,1329	0,1378	0,1412	0,1434	0,1456
	$P_3$	0,1285	0,1642	0,1439	0,1548	0,1679	0,1954	0,2074	0,2142	0,2177	0,2217	0,2236	0,2250	0,2263
	$P_4$	0,1381	0,2191	0,2397	0,2468	0,2534	0,2619	0,2622	0,2615	0,2601	0,2596	0,2589	0,2578	0,2579
	$P_5$	0,1365	0,2453	0,3209	0,2982	0,2870	0,2597	0,2453	0,2358	0,2304	0,2252	0,2218	0,2195	0,2171
	$P_6$	0,0885	0,1619	0,2135	0,2092	0,1890	0,1469	0,1296	0,1201	0,1154	0,1097	0,1067	0,1051	0,1026
7	$P_1$	0,4185	0,1103	0,0113	0,0125	0,0145	0,0204	0,0250	0,0281	0,0302	0,0318	0,0334	0,0344	0,0354
	$P_2$	0,0731	0,0752	0,0515	0,0486	0,0560	0,0729	0,0843	0,0910	0,0958	0,0987	0,1021	0,1038	0,1057
	$P_3$	0,0963	0,1146	0,1117	0,1060	0,1183	0,1407	0,1536	0,1608	0,1651	0,1676	0,1708	0,1721	0,1740
	$P_4$	0,1067	0,1491	0,1907	0,1759	0,1895	0,2034	0,2102	0,2135	0,2148	0,2153	0,2169	0,2167	0,2176
	$P_5$	0,1147	0,1945	0,2679	0,2466	0,2420	0,2360	0,2311	0,2281	0,2253	0,2236	0,2222	0,2207	0,2194
	$P_6$	0,1122	0,2156	0,2402	0,2492	0,2412	0,2134	0,1978	0,1888	0,1829	0,1798	0,1749	0,1736	0,1714
	$P_7$	0,0786	0,1407	0,1267	0,1612	0,1386	0,1132	0,0981	0,0898	0,0859	0,0833	0,0796	0,0787	0,0767
8	$P_1$	0,4185	0,1103	0,0113	0,0087	0,0098	0,0141	0,0176	0,0199	0,0218	0,0228	0,0243	0,0249	0,0256
	$P_2$	0,0622	0,0546	0,0261	0,0332	0,0380	0,0516	0,0609	0,0662	0,0706	0,0727	0,0762	0,0775	0,0788
	$P_3$	0,0810	0,0931	0,0588	0,0732	0,0813	0,1025	0,1150	0,1212	0,1262	0,1285	0,1328	0,1336	0,1351
	$P_4$	0,0926	0,1184	0,0989	0,1254	0,1347	0,1555	0,1658	0,1702	0,1736	0,1749	0,1779	0,1780	0,1787
	$P_5$	0,0979	0,1498	0,1515	0,1815	0,1873	0,1964	0,1993	0,1996	0,1991	0,1990	0,1993	0,1990	0,1982
	$P_6$	0,0992	0,1768	0,2108	0,2241	0,2202	0,2098	0,2022	0,1980	0,1931	0,1911	0,1882	0,1875	0,1859
	$P_7$	0,0915	0,1811	0,2521	0,2226	0,2096	0,1786	0,1626	0,1547	0,1485	0,1456	0,1405	0,1396	0,1379
	$P_8$	0,0571	0,1159	0,1905	0,1314	0,1191	0,0915	0,0765	0,0702	0,0671	0,0654	0,0608	0,0601	0,0598

$k$	$P_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	$P_1$	0,4185	0,1103	0,0113	0,0074	0,0070	0,0106	0,0131	0,0149	0,0162	0,0171	0,0180	0,0191	0,0194
	$P_2$	0,0622	0,0623	0,0278	0,0291	0,0272	0,0388	0,0457	0,0504	0,0536	0,0556	0,0578	0,0604	0,0608
	$P_3$	0,0839	0,0955	0,0647	0,0637	0,0591	0,0784	0,0881	0,0945	0,0982	0,1009	0,1037	0,1068	0,1067
	$P_4$	0,0898	0,1242	0,1075	0,1083	0,0991	0,1222	0,1316	0,1370	0,1401	0,1420	0,1444	0,1475	0,1469
	$P_5$	0,0926	0,1427	0,1466	0,1533	0,1432	0,1611	0,1664	0,1686	0,1705	0,1705	0,1720	0,1733	0,1729
	$P_6$	0,0840	0,1440	0,1762	0,1952	0,1812	0,1852	0,1845	0,1816	0,1810	0,1799	0,1792	0,1778	0,1778
	$P_7$	0,0659	0,1228	0,1932	0,2122	0,2000	0,1841	0,1757	0,1693	0,1656	0,1635	0,1605	0,1577	0,1576
	$P_8$	0,0687	0,1260	0,1729	0,1409	0,1900	0,1475	0,1346	0,1270	0,1222	0,1192	0,1155	0,1112	0,1116
	$P_9$	0,0345	0,0722	0,0998	0,0899	0,0932	0,0722	0,0603	0,0567	0,0527	0,0513	0,0488	0,0461	0,0464
10	$P_1$	0,4185	0,1103	0,0113	0,0052	0,0057	0,0076	0,0099	0,0115	0,0123	0,0133	0,0140	0,0144	0,0150
	$P_2$	0,0486	0,0349	0,0164	0,0199	0,0222	0,0282	0,0351	0,0394	0,0415	0,0442	0,0456	0,0462	0,0478
	$P_3$	0,0850	0,0601	0,0299	0,0438	0,0485	0,0583	0,0688	0,0750	0,0779	0,0813	0,0830	0,0840	0,0859
	$P_4$	0,0818	0,0753	0,0492	0,0760	0,0823	0,0938	0,1053	0,1117	0,1143	0,1176	0,1190	0,1201	0,1217
	$P_5$	0,0866	0,0909	0,0740	0,1140	0,1196	0,1284	0,1377	0,1423	0,1442	0,1458	0,1469	0,1475	0,1487
	$P_6$	0,0847	0,1088	0,1062	0,1534	0,1542	0,1567	0,1609	0,1616	0,1618	0,1614	0,1617	0,1620	0,1617
	$P_7$	0,0778	0,1272	0,1477	0,1854	0,1772	0,1712	0,1681	0,1644	0,1624	0,1595	0,1590	0,1584	0,1569
	$P_8$	0,0528	0,1420	0,1927	0,1892	0,1780	0,1646	0,1527	0,1455	0,1425	0,1384	0,1372	0,1357	0,1334
	$P_9$	0,0409	0,1434	0,2179	0,1663	0,1452	0,1289	0,1123	0,1042	0,1008	0,0975	0,0952	0,0939	0,0915
	$P_{10}$	0,0233	0,1071	0,1548	0,0467	0,0671	0,0623	0,0492	0,0444	0,0422	0,0410	0,0385	0,0377	0,0373

**Таблица А.55**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра гамма-распределения и известных значениях основного параметра  $\theta_0$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$t_1$	0,7065	0,8525	1,0982	1,3455	1,5936	2,5897	3,5881	4,5877	5,5870	6,5859	7,5862	8,5859	9,5857
	$A$	0,6598	0,6563	0,6522	0,6495	0,6476	0,6435	0,6416	0,6405	0,6398	0,6393	0,6390	0,6387	0,6385
3	$t_1$	0,3798	0,4780	0,6499	0,8305	1,0178	1,8046	2,6312	2,6312	3,4804	4,3449	5,2218	6,1064	6,9992
	$t_2$	1,4817	1,6753	1,9909	2,3027	2,6117	3,8120	4,9820	4,9820	6,1305	7,2633	8,3868	9,4992	10,6068
	$A$	0,8308	0,8279	0,8244	0,8220	0,8203	0,8164	0,8146	0,8146	0,8136	0,8129	0,8125	0,8121	0,8119
4	$t_1$	0,2500	0,3231	0,4566	0,6008	0,7530	1,4224	2,1483	2,9086	3,6932	4,4963	5,3143	6,1450	6,9826
	$t_2$	0,8951	1,0374	1,2808	1,5254	1,7695	2,7638	3,7603	4,7580	5,7561	6,7558	7,7565	8,7582	9,7563
	$t_3$	2,1030	2,3188	2,6760	3,0230	3,3606	4,6854	5,9544	7,1908	8,4032	9,6011	10,7828	11,9543	13,1133
	$A$	0,8992	0,8969	0,8943	0,8924	0,8910	0,8880	0,8865	0,8857	0,8851	0,8847	0,8844	0,8842	0,8840
5	$t_1$	0,1814	0,2397	0,3493	0,4702	0,6009	1,1887	1,8439	1,8439	2,5439	3,2734	4,0293	4,7968	5,5778
	$t_2$	0,6258	0,7412	0,9408	1,1456	1,3552	2,2182	3,1084	3,1084	4,0131	4,9275	5,8543	6,7808	7,7121
	$t_3$	1,3482	1,5201	1,8053	2,0892	2,3734	3,4899	4,5910	4,5910	5,6816	6,7625	7,8416	8,9114	9,9743
	$t_4$	2,6117	2,8443	3,2256	3,5998	3,9653	5,3694	6,7061	6,7061	8,0054	9,2782	10,5214	11,7564	12,9657
	$A$	0,9332	0,9315	0,9294	0,9280	0,9269	0,9245	0,9233	0,9233	0,9226	0,9222	0,9219	0,9216	0,9214

Продолжение таблицы А.55

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	$t_1$	0,1397	0,1880	0,2802	0,3846	0,4991	1,0287	1,6324	2,2861	2,9731	3,6884	4,4221	5,1685	5,9306
	$t_2$	0,4723	0,5687	0,7375	0,9159	1,0989	1,8751	2,6869	3,5271	4,3810	5,2533	6,1283	7,0103	7,9015
	$t_3$	0,9797	1,1220	1,3614	1,6074	1,8527	2,8453	3,8373	4,8364	5,8320	6,8391	7,8333	8,8296	9,8291
	$t_4$	1,7436	1,9343	2,2447	2,5606	2,8691	4,0795	5,2552	6,4136	7,5539	8,6922	9,8063	10,9170	12,0216
	$t_5$	3,0400	3,2810	3,6791	4,0753	4,4615	5,9323	7,3220	8,6669	9,9786	11,2763	12,5327	13,7804	15,0086
	A	0,9525	0,9512	0,9496	0,9484	0,9476	0,9456	0,9447	0,9441	0,9437	0,9435	0,9433	0,9432	0,9430
7	$t_1$	0,1131	0,1535	0,2327	0,3256	0,4289	0,9116	1,4752	1,4752	2,0898	2,7453	3,4230	4,1327	4,8496
	$t_2$	0,3774	0,4584	0,6042	0,7635	0,9301	1,6347	2,3887	2,3887	3,1734	3,9861	4,8075	5,6502	6,4924
	$t_3$	0,7654	0,8835	1,0901	1,3105	1,5337	2,4264	3,3424	3,3424	4,2660	5,2083	6,1476	7,1031	8,0461
	$t_4$	1,3102	1,4654	1,7321	2,0130	2,2901	3,3666	4,4352	4,4352	5,4938	6,5580	7,6079	8,6690	9,7087
	$t_5$	2,1079	2,2992	2,6297	2,9770	3,3091	4,5805	5,8134	5,8134	7,0140	8,2107	9,3769	10,5512	11,6878
	$t_6$	3,4340	3,6717	4,0807	4,5037	4,8997	6,4177	7,8427	7,8427	9,2242	10,5817	11,8875	13,2029	14,4619
	A	0,9645	0,9634	0,9622	0,9613	0,9606	0,9590	0,9582	0,9582	0,9577	0,9574	0,9572	0,9571	0,9569
8	$t_1$	0,0928	0,1287	0,1984	0,2806	0,3728	0,8186	1,3521	1,9358	2,5678	3,2212	3,8961	4,5905	5,3113
	$t_2$	0,3073	0,3808	0,5100	0,6507	0,7986	1,4483	2,1644	2,9061	3,6879	4,4737	5,2738	6,0845	6,9238
	$t_3$	0,6139	0,7233	0,9067	1,0983	1,2961	2,1198	2,9845	3,8549	4,7574	5,6484	6,5509	7,4522	8,3854
	$t_4$	1,0279	1,1720	1,4081	1,6492	1,8963	2,8816	3,8846	4,8743	5,8884	6,8772	7,8721	8,8570	9,8751
	$t_5$	1,5906	1,7692	2,0609	2,3535	2,6486	3,7983	4,9392	6,0508	7,1773	8,2659	9,3493	10,4202	11,5211
	$t_6$	2,3979	2,6129	2,9689	3,3173	3,6638	4,9957	6,2884	7,5340	8,7777	9,9785	11,1583	12,3244	13,5127
	$t_7$	3,7311	3,9860	4,4222	4,8452	5,2560	6,8140	8,2993	9,7080	11,1068	12,4460	13,7466	15,0296	16,3311
	A	0,9725	0,9716	0,9706	0,9698	0,9693	0,9679	0,9673	0,9669	0,9666	0,9665	0,9663	0,9662	0,9662



$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	$t_1$	0,0787	0,1105	0,1732	0,2468	0,3317	0,7477	1,2542	1,2542	1,8125	2,4090	3,0500	3,7153	4,3829
	$t_2$	0,2591	0,3247	0,4424	0,5680	0,7048	1,3128	1,9916	1,9916	2,6985	3,4307	4,2015	4,9899	5,7656
	$t_3$	0,5125	0,6105	0,7786	0,9500	1,1321	1,9002	2,7182	2,7182	3,5447	4,3833	5,2588	6,1427	7,0020
	$t_4$	0,8458	0,9750	1,1920	1,4057	1,6306	2,5477	3,4928	3,4928	4,4258	5,3630	6,3299	7,3017	8,2363
	$t_5$	1,2812	1,4412	1,7062	1,9630	2,2298	3,2927	4,3622	4,3622	5,3998	6,4329	7,4887	8,5432	9,5533
	$t_6$	1,8630	2,0541	2,3699	2,6730	2,9815	4,1986	5,3936	5,3936	6,5420	7,6728	8,8184	9,9642	11,0508
	$t_7$	2,6943	2,9094	3,2901	3,6410	3,9971	5,3871	6,7224	6,7224	7,9931	9,2315	10,4797	11,7227	12,8984
	$t_8$	4,0599	4,2886	4,7684	5,1767	5,5918	7,1980	8,7046	8,7046	10,1363	11,5204	12,8944	14,2592	15,5515
	$A$	0,9781	0,9773	0,9765	0,9758	0,9754	0,9742	0,9737	0,9737	0,9734	0,9732	0,9730	0,9729	0,9728
10	$t_1$	0,0688	0,0954	0,1512	0,2198	0,2986	0,6874	1,1730	1,7117	2,2813	2,9098	3,5438	4,2105	4,8959
	$t_2$	0,2248	0,2791	0,3834	0,5018	0,6306	1,1971	1,8453	2,5302	3,2241	3,9814	4,7306	5,5070	6,2958
	$t_3$	0,4410	0,5213	0,6695	0,8323	1,0042	1,7168	2,4972	3,2967	4,0903	4,9485	5,7853	6,6483	7,5161
	$t_4$	0,7198	0,8247	1,0138	1,2192	1,4307	2,2753	3,1775	4,0800	4,9588	5,9058	6,8241	7,7616	8,6968
	$t_5$	1,0737	1,2005	1,4309	1,6780	1,9290	2,9025	3,9192	4,9213	5,8812	6,9146	7,9042	8,9150	9,9149
	$t_6$	1,5258	1,6740	1,9473	2,2374	2,5283	3,6316	4,7651	5,8642	6,9038	8,0252	9,0883	10,1727	11,2369
	$t_7$	2,1200	2,2914	2,6096	2,9480	3,2830	4,5230	5,7806	6,9823	8,1053	9,3172	10,4638	11,6243	12,7553
	$t_8$	2,9522	3,1494	3,5210	3,9151	4,3071	5,6989	7,0952	8,4071	9,6315	10,9424	12,1842	13,4376	14,6399
	$t_9$	4,3042	4,5387	4,9765	5,4556	5,9238	7,4973	9,0832	10,5148	11,8868	13,3275	14,6888	16,0601	17,3658
	$A$	0,9821	0,9815	0,9807	0,9802	0,9798	0,9789	0,9784	0,9781	0,9779	0,9778	0,9777	0,9776	0,9776

**Таблица А.56**

Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра гамма-распределения и известных значениях основного параметра  $\theta_0$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$P_1$	0.9604	0.9149	0.8617	0.8245	0.7968	0.7306	0.6951	0.6723	0.6559	0.6433	0.6335	0.6254	0.6187
	$P_2$	0.0396	0.0851	0.1383	0.1755	0.2032	0.2694	0.3049	0.3277	0.3441	0.3567	0.3665	0.3746	0.3813
3	$P_1$	0.9242	0.8401	0.7458	0.6832	0.6386	0.5385	0.4894	0.2708	0.2709	0.2708	0.2709	0.2708	0.2708
	$P_2$	0.0641	0.1335	0.2083	0.2556	0.2880	0.3551	0.3844	0.4616	0.4612	0.4608	0.4606	0.4605	0.4604
	$P_3$	0.0116	0.0264	0.0460	0.0612	0.0734	0.1064	0.1262	0.2676	0.2680	0.2684	0.2684	0.2687	0.2688
4	$P_1$	0.8956	0.7825	0.6607	0.5831	0.5290	0.4159	0.3634	0.3323	0.3115	0.2964	0.2851	0.2762	0.2686
	$P_2$	0.0758	0.1532	0.2298	0.2734	0.3005	0.3468	0.3612	0.3670	0.3695	0.3706	0.3709	0.3708	0.3704
	$P_3$	0.0237	0.0527	0.0888	0.1152	0.1357	0.1848	0.2113	0.2283	0.2403	0.2492	0.2560	0.2614	0.2662
	$P_4$	0.0049	0.0115	0.0207	0.0283	0.0347	0.0525	0.0640	0.0723	0.0788	0.0838	0.0880	0.0915	0.0947
5	$P_1$	0.8722	0.7373	0.5967	0.5100	0.4517	0.3333	0.2812	0.1159	0.1148	0.1139	0.1137	0.1130	0.1124
	$P_2$	0.0819	0.1612	0.2331	0.2700	0.2904	0.3166	0.3195	0.2612	0.2590	0.2574	0.2566	0.2556	0.2550
	$P_3$	0.0317	0.0690	0.1127	0.1429	0.1647	0.2132	0.2357	0.2958	0.2963	0.2966	0.2966	0.2970	0.2969
	$P_4$	0.0116	0.0265	0.0463	0.0619	0.0742	0.1073	0.1267	0.2287	0.2306	0.2323	0.2326	0.2337	0.2344
	$P_5$	0.0026	0.0060	0.0111	0.0153	0.0190	0.0297	0.0369	0.0984	0.0993	0.0998	0.1005	0.1007	0.1013

Продолжение таблицы А.56

6	$P_1$	0.8528	0.7005	0.5459	0.4536	0.3929	0.2748	0.2250	0.1978	0.1802	0.1683	0.1591	0.1516	0.1457
	$P_2$	0.0852	0.1638	0.2295	0.2598	0.2738	0.2843	0.2781	0.2714	0.2649	0.2601	0.2552	0.2513	0.2480
	$P_3$	0.0371	0.0790	0.1256	0.1557	0.1764	0.2174	0.2339	0.2421	0.2467	0.2499	0.2515	0.2530	0.2539
	$P_4$	0.0169	0.0379	0.0648	0.0846	0.1001	0.1376	0.1582	0.1708	0.1800	0.1860	0.1913	0.1956	0.1988
	$P_5$	0.0066	0.0152	0.0274	0.0371	0.0452	0.0675	0.0815	0.0911	0.0985	0.1039	0.1089	0.1130	0.1163
	$P_6$	0.0015	0.0036	0.0067	0.0093	0.0115	0.0184	0.0232	0.0268	0.0297	0.0318	0.0339	0.0357	0.0373
7	$P_1$	0.8368	0.6702	0.5049	0.4098	0.3488	0.2318	0.1850	0.0626	0.0611	0.0604	0.0595	0.0594	0.0587
	$P_2$	0.0870	0.1639	0.2235	0.2473	0.2567	0.2544	0.2424	0.1564	0.1535	0.1523	0.1507	0.1500	0.1488
	$P_3$	0.0405	0.0848	0.1319	0.1603	0.1788	0.2111	0.2217	0.2101	0.2083	0.2078	0.2071	0.2072	0.2064
	$P_4$	0.0207	0.0460	0.0771	0.0987	0.1145	0.1521	0.1700	0.2176	0.2185	0.2188	0.2190	0.2193	0.2196
	$P_5$	0.0101	0.0232	0.0409	0.0542	0.0647	0.0935	0.1102	0.1847	0.1868	0.1880	0.1890	0.1895	0.1900
	$P_6$	0.0040	0.0096	0.0175	0.0238	0.0291	0.0451	0.0553	0.1215	0.1239	0.1247	0.1258	0.1260	0.1272
	$P_7$	0.0009	0.0023	0.0043	0.0059	0.0074	0.0121	0.0155	0.0471	0.0479	0.0480	0.0488	0.0486	0.0493
8	$P_1$	0.8219	0.6444	0.4713	0.3733	0.3112	0.1979	0.1550	0.1315	0.1181	0.1078	0.1001	0.0942	0.0903
	$P_2$	0.0881	0.1627	0.2162	0.2343	0.2388	0.2268	0.2127	0.2003	0.1924	0.1847	0.1787	0.1735	0.1707
	$P_3$	0.0431	0.0884	0.1344	0.1602	0.1764	0.2007	0.2056	0.2059	0.2055	0.2037	0.2026	0.2006	0.2001
	$P_4$	0.0238	0.0517	0.0848	0.1072	0.1235	0.1570	0.1712	0.1792	0.1838	0.1870	0.1893	0.1907	0.1919
	$P_5$	0.0131	0.0295	0.0510	0.0671	0.0794	0.1100	0.1256	0.1364	0.1428	0.1486	0.1525	0.1562	0.1581
	$P_6$	0.0066	0.0153	0.0275	0.0373	0.0451	0.0670	0.0796	0.0889	0.0945	0.1002	0.1044	0.1085	0.1105
	$P_7$	0.0027	0.0064	0.0119	0.0165	0.0204	0.0320	0.0394	0.0451	0.0489	0.0526	0.0557	0.0586	0.0602
	$P_8$	0.0006	0.0016	0.0029	0.0041	0.0052	0.0086	0.0109	0.0128	0.0141	0.0153	0.0166	0.0177	0.0183

Окончание таблицы А.56

9	$P_1$	0.8095	0.6225	0.4438	0.3437	0.2823	0.1725	0.1325	0.0387	0.0373	0.0362	0.0361	0.0360	0.0351
	$P_2$	0.0886	0.1608	0.2093	0.2223	0.2235	0.2052	0.1886	0.1027	0.0996	0.0971	0.0966	0.0964	0.0945
	$P_3$	0.0448	0.0905	0.1348	0.1585	0.1719	0.1886	0.1898	0.1486	0.1462	0.1439	0.1438	0.1436	0.1416
	$P_4$	0.0261	0.0557	0.0895	0.1115	0.1265	0.1560	0.1670	0.1719	0.1707	0.1702	0.1700	0.1703	0.1692
	$P_5$	0.0155	0.0343	0.0579	0.0754	0.0883	0.1182	0.1325	0.1721	0.1729	0.1737	0.1738	0.1738	0.1743
	$P_6$	0.0088	0.0201	0.0352	0.0475	0.0568	0.0814	0.0945	0.1520	0.1543	0.1558	0.1559	0.1566	0.1578
	$P_7$	0.0045	0.0105	0.0192	0.0264	0.0323	0.0488	0.0587	0.1166	0.1190	0.1207	0.1211	0.1211	0.1230
	$P_8$	0.0019	0.0045	0.0083	0.0117	0.0146	0.0231	0.0286	0.0713	0.0733	0.0750	0.0751	0.0749	0.0765
	$P_9$	0.0004	0.0011	0.0020	0.0029	0.0037	0.0061	0.0079	0.0261	0.0268	0.0274	0.0275	0.0274	0.0280
10	$P_1$	0.7994	0.6018	0.4176	0.3186	0.2581	0.1514	0.1147	0.0949	0.0816	0.0751	0.0687	0.0647	0.0615
	$P_2$	0.0886	0.1586	0.2012	0.2104	0.2096	0.1849	0.1668	0.1540	0.1421	0.1369	0.1309	0.1267	0.1232
	$P_3$	0.0458	0.0919	0.1340	0.1549	0.1659	0.1756	0.1739	0.1700	0.1651	0.1630	0.1597	0.1577	0.1555
	$P_4$	0.0276	0.0588	0.0927	0.1137	0.1272	0.1515	0.1599	0.1631	0.1634	0.1641	0.1645	0.1643	0.1635
	$P_5$	0.0172	0.0381	0.0638	0.0812	0.0938	0.1224	0.1344	0.1418	0.1465	0.1492	0.1510	0.1528	0.1537
	$P_6$	0.0105	0.0242	0.0423	0.0554	0.0655	0.0916	0.1043	0.1125	0.1193	0.1228	0.1264	0.1289	0.1309
	$P_7$	0.0061	0.0145	0.0261	0.0351	0.0423	0.0627	0.0734	0.0810	0.0882	0.0912	0.0954	0.0978	0.1001
	$P_8$	0.0032	0.0078	0.0144	0.0196	0.0240	0.0375	0.0449	0.0506	0.0567	0.0589	0.0622	0.0644	0.0664
	$P_9$	0.0013	0.0034	0.0064	0.0088	0.0108	0.0177	0.0218	0.0250	0.0288	0.0302	0.0321	0.0332	0.0348
	$P_{10}$	0.0003	0.0008	0.0016	0.0022	0.0027	0.0047	0.0058	0.0071	0.0082	0.0087	0.0093	0.0096	0.0102

**Таблица А.57**

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного и основного параметров гамма-распределения в зависимости от значений основного параметра  $\theta_0$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	$t_1$	0,0002	0,0001	0,0174	0,0674	0,1465	0,6326	1,2531	1,9397	2,6678	3,4243	4,1991	5,0000	5,5684
	$t_2$	0,7690	1,3001	1,3958	1,7831	2,1616	3,6024	4,9530	6,2482	7,5171	8,7554	9,9722	11,0000	11,5683
	$A$	0,2935	0,4295	0,4235	0,4191	0,4160	0,4108	0,4090	0,4082	0,4078	0,4076	0,4074	0,4066	0,3959
4	$t_1$	0,0001	0,0009	0,0141	0,0547	0,1192	0,5255	1,0651	1,6535	2,3099	3,0485	3,8332	4,4721	5,1905
	$t_2$	0,1050	0,4420	0,7205	0,9295	1,1408	2,0195	2,9542	3,7846	4,7349	5,9786	7,0038	7,7331	8,5822
	$t_3$	1,0554	1,6647	2,1525	2,5459	2,9273	4,3900	5,7928	7,0557	8,3627	9,8297	11,0038	12,1919	13,3510
	$A$	0,3907	0,5375	0,5533	0,5528	0,5522	0,5519	0,5516	0,5518	0,5520	0,5519	0,5518	0,5522	0,5522
5	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0022	0,0163	0,0489	0,3372	0,7833	1,3162	1,9088	2,5400	3,2076	3,8879	4,5914
	$t_2$	0,0067	0,0069	0,0562	0,1567	0,2866	0,9477	1,7049	2,5067	3,3384	4,1833	5,0516	5,9108	6,7911
	$t_3$	0,4719	0,4976	0,9018	1,2211	1,5380	2,7990	4,0007	5,1861	6,3503	7,4937	8,6378	9,7492	10,8738
	$t_4$	1,6365	1,7707	2,3241	2,8083	3,2629	4,9736	6,4906	7,9494	9,3623	10,7201	12,0696	13,3731	14,6632
	$A$	0,4606	0,6722	0,6873	0,6863	0,6854	0,6843	0,6831	0,6829	0,6828	0,6827	0,6827	0,6827	0,6827
6	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0015	0,0117	0,0359	0,2749	0,6666	1,1605	1,7122	2,3025	2,9247	3,5934	4,2563
	$t_2$	0,0084	0,0081	0,0395	0,1075	0,1994	0,7283	1,3734	2,0974	2,8583	3,6306	4,4208	5,2755	6,0669
	$t_3$	0,3965	0,4143	0,5026	0,6546	0,8360	1,7532	2,6992	3,7061	4,7238	5,7019	6,6737	7,7638	8,6866
	$t_4$	1,0052	1,1842	1,4058	1,7072	2,0307	3,3927	4,6776	5,9657	7,2088	8,4152	9,5909	10,8271	11,9504
	$t_5$	2,1652	2,4989	2,8500	3,2836	3,7235	5,4747	7,0410	8,5901	10,0180	11,4056	12,7849	14,1612	15,4369
	$A$	0,4971	0,7353	0,7537	0,7547	0,7550	0,7562	0,7552	0,7553	0,7553	0,7554	0,7554	0,7554	0,7554

Продолжение таблицы А.57

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0004	0,0057	0,0221	0,2167	0,5653	1,0141	1,5232	2,0821	2,6677	3,2932	3,9406
	$t_2$	0,0038	0,0025	0,0108	0,0500	0,1166	0,5478	1,1131	1,7702	2,4536	3,1743	3,9123	4,6777	5,4648
	$t_3$	0,1797	0,0410	0,0925	0,2284	0,3912	1,1407	1,9393	2,8270	3,6910	4,5783	5,4600	6,3671	7,3013
	$t_4$	0,5288	0,4646	0,6828	0,9915	1,2954	2,4686	3,5748	4,7415	5,8355	6,9445	8,0213	9,1131	10,2077
	$t_5$	1,0436	1,1561	1,5670	2,0188	2,4198	3,9694	5,3077	6,6860	7,9718	9,2499	10,4796	11,7240	12,9476
	$t_6$	2,2397	2,4021	2,9833	3,5832	4,0461	5,9991	7,5653	9,1629	10,6299	12,0854	13,4560	14,8718	16,2321
	A	0,5114	0,7667	0,8105	0,8109	0,8108	0,8119	0,8102	0,8102	0,8102	0,8102	0,8102	0,8102	0,8102
8	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0003	0,0040	0,0159	0,1844	0,4977	0,9170	1,3943	1,9240	2,5077	3,0919	3,7563
	$t_2$	0,0027	0,0022	0,0084	0,0348	0,0826	0,4551	0,9594	1,5625	2,2038	2,8839	3,6103	4,3191	5,1373
	$t_3$	0,0957	0,0328	0,0705	0,1502	0,2602	0,8978	1,5950	2,3867	3,1820	4,0075	4,8728	5,6906	6,6741
	$t_4$	0,3263	0,3834	0,4798	0,5781	0,7609	1,7715	2,6854	3,7086	4,6920	5,6847	6,7305	7,6677	8,9040
	$t_5$	0,6101	0,9448	1,1839	1,3564	1,6561	3,0194	4,1947	5,4260	6,6012	7,7777	8,9631	10,0664	11,4006
	$t_6$	1,2780	1,7712	2,1530	2,3744	2,7596	4,4362	5,8189	7,2285	8,5823	9,8976	11,2079	12,4406	13,8668
	$t_7$	2,3017	3,1466	3,6705	3,9163	4,4165	6,4500	8,0196	9,6251	11,1743	12,6288	14,0809	15,4715	16,9779
	A	0,5196	0,7959	0,8453	0,8468	0,8470	0,8491	0,8471	0,8472	0,8472	0,8472	0,8472	0,8472	0,8471

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0002	0,0022	0,0117	0,1574	0,4415	0,8250	1,2787	1,8036	2,3310	2,9325	3,5049
	$t_2$	0,0036	0,0018	0,0037	0,0189	0,0595	0,3801	0,8363	1,3799	1,9839	2,6636	3,3046	4,0472	4,7203
	$t_3$	0,1629	0,0233	0,0294	0,0782	0,1800	0,7206	1,3446	2,0408	2,7845	3,6131	4,3498	5,2235	5,9677
	$t_4$	0,4542	0,2630	0,1561	0,2537	0,4663	1,3046	2,1024	2,9543	3,8605	4,8731	5,6929	6,7298	7,5272
	$t_5$	0,8449	0,6803	0,7006	0,8015	1,1711	2,3623	3,3756	4,4160	5,5171	6,7275	7,6700	8,8737	9,8149
	$t_6$	1,3601	1,2444	1,4308	1,5324	2,0444	3,5295	4,7341	5,9506	7,2053	8,5518	9,6244	10,9257	11,9962
	$t_7$	2,0236	2,0557	2,4709	2,4940	3,1377	4,8994	6,2737	7,6705	9,0544	10,5335	11,7263	13,1211	14,3026
	$t_8$	3,2912	3,3968	4,0759	3,9852	4,7460	6,9403	8,4320	9,9701	11,5363	13,1888	14,4967	15,9995	17,3478
	$A$	0,5331	0,8132	0,8731	0,8746	0,8752	0,8777	0,8750	0,8751	0,8751	0,8751	0,8751	0,8752	0,8751
10	$t_1$	0,0001	0,0001	0,0001	0,0017	0,0088	0,1354	0,4037	0,7710	1,2056	1,7008	2,2056	2,7623	3,3874
	$t_2$	0,0014	0,0011	0,0015	0,0148	0,0445	0,3236	0,7554	1,2761	1,8522	2,4850	3,1019	3,7698	4,5270
	$t_3$	0,0258	0,0105	0,0114	0,0599	0,1314	0,5997	1,1925	1,8495	2,5594	3,3033	4,0198	4,7890	5,6411
	$t_4$	0,1769	0,0813	0,0537	0,1839	0,3195	1,0272	1,7976	2,6008	3,4385	4,3011	5,1228	5,9921	6,9987
	$t_5$	0,4189	0,3690	0,2154	0,5363	0,7622	1,7846	2,7624	3,7386	4,7390	5,7567	6,6818	7,6452	8,7656
	$t_6$	0,7642	0,7764	0,6807	1,1571	1,4768	2,7934	3,9800	5,1491	6,3872	7,4632	8,5358	9,6020	10,8348
	$t_7$	1,2344	1,3290	1,3022	1,9077	2,3108	3,8955	5,2602	6,5860	7,9069	9,1388	10,3168	11,5153	12,8376
	$t_8$	1,9812	2,1251	2,1657	2,9083	3,3819	5,2597	6,7736	8,2430	9,6771	11,0173	12,3097	13,6369	15,0781
	$t_9$	3,1510	3,4573	3,5785	4,4672	5,0088	7,3134	8,9003	10,5600	12,2411	13,5436	15,0178	16,4962	18,0356
	$A$	0,5362	0,8245	0,8936	0,8956	0,8958	0,8990	0,8957	0,8958	0,8956	0,8958	0,8959	0,8959	0,8959

**Таблица А.58**

Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного и основного параметров гамма-распределения в зависимости от значений основного параметра  $\theta_0$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$P_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	$P_1$	0,1085	0,1103	0,1480	0,1399	0,1363	0,1327	0,1322	0,1322	0,1323	0,1325	0,1324	0,1334	0,1115
	$P_2$	0,8260	0,8157	0,7573	0,7523	0,7486	0,7418	0,7391	0,7374	0,7368	0,7361	0,7357	0,7234	0,7031
	$P_3$	0,0655	0,0740	0,0947	0,1079	0,1151	0,1255	0,1287	0,1304	0,1308	0,1314	0,1319	0,1432	0,1854
4	$P_1$	0,4173	0,1911	0,1334	0,1202	0,1124	0,0980	0,0927	0,0864	0,0849	0,0889	0,0940	0,0843	0,0812
	$P_2$	0,4352	0,6429	0,6366	0,5976	0,5681	0,5012	0,4738	0,4370	0,4269	0,4620	0,4568	0,4249	0,4069
	$P_3$	0,1254	0,1423	0,1920	0,2351	0,2660	0,3339	0,3617	0,3977	0,4075	0,3753	0,3707	0,4093	0,4271
	$P_4$	0,0221	0,0237	0,0380	0,0471	0,0535	0,0668	0,0719	0,0789	0,0807	0,0738	0,0785	0,0815	0,0848
5	$P_1$	0,4185	0,1103	0,0528	0,0493	0,0477	0,0456	0,0451	0,0447	0,0448	0,0447	0,0451	0,0447	0,0446
	$P_2$	0,2184	0,2072	0,2097	0,2044	0,2015	0,1995	0,1990	0,1991	0,1996	0,1994	0,2003	0,1991	0,1995
	$P_3$	0,3012	0,5283	0,5582	0,5444	0,5360	0,5237	0,5179	0,5163	0,5147	0,5137	0,5128	0,5125	0,5125
	$P_4$	0,0526	0,1309	0,1482	0,1664	0,1765	0,1899	0,1947	0,1960	0,1970	0,1978	0,1977	0,1993	0,1989
	$P_5$	0,0093	0,0233	0,0311	0,0355	0,0383	0,0413	0,0433	0,0439	0,0439	0,0443	0,0441	0,0444	0,0445
6	$P_1$	0,4184	0,1103	0,0437	0,0385	0,0353	0,0315	0,0302	0,0304	0,0304	0,0301	0,0299	0,0305	0,0300
	$P_2$	0,2328	0,2201	0,1777	0,1567	0,1455	0,1342	0,1299	0,1304	0,1311	0,1300	0,1291	0,1332	0,1297
	$P_3$	0,2757	0,4891	0,4626	0,4142	0,3858	0,3574	0,3461	0,3463	0,3483	0,3452	0,3417	0,3499	0,3427
	$P_4$	0,0491	0,1286	0,2225	0,2733	0,3022	0,3292	0,3393	0,3386	0,3354	0,3386	0,3413	0,3317	0,3393
	$P_5$	0,0194	0,0427	0,0766	0,0959	0,1071	0,1205	0,1258	0,1260	0,1259	0,1267	0,1288	0,1258	0,1285
	$P_6$	0,0046	0,0092	0,0170	0,0214	0,0241	0,0271	0,0287	0,0283	0,0289	0,0294	0,0293	0,0289	0,0298



Продолжение таблицы А.58

$k$	$P_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	$P_1$	0,4185	0,1103	0,0226	0,0225	0,0219	0,0203	0,0198	0,0199	0,0197	0,0197	0,0194	0,0196	0,0196
	$P_2$	0,1834	0,1362	0,0943	0,0901	0,0882	0,0847	0,0824	0,0841	0,0830	0,0828	0,0823	0,0824	0,0830
	$P_3$	0,2697	0,2459	0,2160	0,2141	0,2137	0,2108	0,2047	0,2101	0,2083	0,2080	0,2060	0,2060	0,2083
	$P_4$	0,0732	0,3436	0,4245	0,4107	0,4025	0,3904	0,3859	0,3827	0,3813	0,3816	0,3815	0,3813	0,3791
	$P_5$	0,0328	0,1099	0,1659	0,1793	0,1848	0,2000	0,2062	0,2035	0,2064	0,2065	0,2081	0,2085	0,2077
	$P_6$	0,0184	0,0436	0,0621	0,0677	0,0714	0,0765	0,0818	0,0808	0,0819	0,0821	0,0829	0,0829	0,0828
	$P_7$	0,0041	0,0104	0,0146	0,0156	0,0175	0,0174	0,0193	0,0189	0,0194	0,0193	0,0198	0,0194	0,0194
8	$P_1$	0,4185	0,1103	0,0195	0,0173	0,0158	0,0150	0,0142	0,0143	0,0140	0,0140	0,0144	0,0140	0,0150
	$P_2$	0,1632	0,1285	0,0836	0,0691	0,0635	0,0619	0,0588	0,0594	0,0589	0,0587	0,0597	0,0584	0,0625
	$P_3$	0,2425	0,2276	0,1896	0,1600	0,1498	0,1498	0,1424	0,1448	0,1433	0,1434	0,1453	0,1422	0,1521
	$P_4$	0,0899	0,3416	0,3800	0,3250	0,3037	0,3019	0,2874	0,2891	0,2877	0,2864	0,2899	0,2851	0,3021
	$P_5$	0,0386	0,1181	0,2034	0,2553	0,2764	0,2751	0,2863	0,2821	0,2835	0,2851	0,2804	0,2859	0,2700
	$P_6$	0,0316	0,0505	0,0859	0,1167	0,1276	0,1319	0,1404	0,1396	0,1418	0,1414	0,1397	0,1424	0,1321
	$P_7$	0,0119	0,0191	0,0312	0,0457	0,0512	0,0526	0,0570	0,0570	0,0574	0,0574	0,0569	0,0583	0,0535
	$P_8$	0,0038	0,0042	0,0067	0,0110	0,0121	0,0118	0,0135	0,0136	0,0134	0,0136	0,0135	0,0137	0,0128

$k$	$P_i$	$\theta_0$												
		0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	$P_1$	0,4185	0,1103	0,0160	0,0110	0,0116	0,0112	0,0103	0,0101	0,0100	0,0105	0,0100	0,0105	0,0100
	$P_2$	0,1802	0,1168	0,0526	0,0440	0,0461	0,0451	0,0424	0,0414	0,0412	0,0434	0,0413	0,0435	0,0414
	$P_3$	0,2656	0,2019	0,1230	0,1006	0,1070	0,1067	0,1005	0,0988	0,0987	0,1038	0,0989	0,1037	0,0981
	$P_4$	0,0713	0,3223	0,2321	0,1942	0,2080	0,2118	0,1977	0,1922	0,1940	0,2041	0,1943	0,2034	0,1923
	$P_5$	0,0333	0,1365	0,3398	0,3223	0,3173	0,3085	0,3045	0,3008	0,3012	0,3014	0,3002	0,3000	0,3042
	$P_6$	0,0172	0,0645	0,1458	0,1854	0,1806	0,1839	0,1956	0,2010	0,1998	0,1911	0,1997	0,1908	0,1988
	$P_7$	0,0084	0,0315	0,0645	0,0926	0,0861	0,0888	0,0981	0,1028	0,1019	0,0963	0,1024	0,0973	0,1019
	$P_8$	0,0044	0,0130	0,0219	0,0396	0,0347	0,0363	0,0410	0,0423	0,0427	0,0399	0,0428	0,0407	0,0431
	$P_9$	0,0011	0,0031	0,0043	0,0102	0,0087	0,0077	0,0098	0,0106	0,0105	0,0095	0,0105	0,0100	0,0103
10	$P_1$	0,4185	0,1103	0,0113	0,0091	0,0088	0,0084	0,0081	0,0080	0,0079	0,0080	0,0076	0,0075	0,0081
	$P_2$	0,1263	0,0906	0,0324	0,0368	0,0348	0,0339	0,0331	0,0327	0,0324	0,0330	0,0314	0,0311	0,0334
	$P_3$	0,1827	0,1515	0,0763	0,0825	0,0796	0,0795	0,0777	0,0760	0,0766	0,0765	0,0738	0,0737	0,0765
	$P_4$	0,1429	0,2273	0,1369	0,1544	0,1504	0,1524	0,1498	0,1474	0,1461	0,1460	0,1432	0,1427	0,1527
	$P_5$	0,0601	0,2227	0,2315	0,2659	0,2599	0,2583	0,2528	0,2497	0,2496	0,2510	0,2459	0,2416	0,2423
	$P_6$	0,0337	0,1017	0,2683	0,2341	0,2383	0,2352	0,2374	0,2414	0,2509	0,2400	0,2457	0,2453	0,2399
	$P_7$	0,0190	0,0536	0,1367	0,1231	0,1292	0,1327	0,1367	0,1386	0,1315	0,1380	0,1410	0,1453	0,1396
	$P_8$	0,0109	0,0275	0,0692	0,0622	0,0652	0,0670	0,0693	0,0701	0,0691	0,0704	0,0729	0,0744	0,0716
	$P_9$	0,0045	0,0118	0,0299	0,0258	0,0273	0,0270	0,0284	0,0291	0,0296	0,0296	0,0310	0,0311	0,0290
	$P_{10}$	0,0014	0,0029	0,0075	0,0062	0,0067	0,0055	0,0068	0,0068	0,0064	0,0075	0,0075	0,0074	0,0069

**(1- $\alpha$ ) - квантили  $\chi_r^2$ -распределения**

<i>r</i>	$\alpha$										
	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	0,455	0,708	1,074	1,642	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828	12,116
2	1,386	1,833	2,408	3,219	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816	15,202
3	2,366	2,946	3,665	4,642	6,251	7,815	9,248	11,345	12,838	16,266	17,730
4	3,357	4,045	4,878	5,989	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467	19,997
5	4,351	5,132	6,064	7,289	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750	20,515	22,105
6	5,348	6,211	7,231	8,558	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458	24,103
7	6,346	7,283	8,383	9,803	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322	26,018
8	7,344	8,351	9,524	11,030	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,125	27,868
9	8,343	9,414	10,656	12,242	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877	29,666
10	9,342	10,473	11,781	13,442	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588	31,420
11	10,342	11,530	12,899	14,631	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264	33,136
12	11,340	12,584	14,011	15,812	18,549	21,026	23,336	26,217	28,300	32,909	34,821
13	12,340	13,636	15,119	16,985	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528	36,478
14	13,339	14,685	16,222	18,151	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123	38,109
15	14,339	15,733	17,322	19,311	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697	39,719
16	15,338	16,780	18,418	20,465	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252	41,308