Следствие 5. Векторное поле

$$\vec{Y}_k = \{Y_1 = \Psi_1(\Lambda_1), Y_i = \Psi_i(Y_{i-1}, \Lambda_i), i = 2, k\}$$

обладает свойством условной независимости, если взаимно–независимые поля Λ_1, Λ_2 ... также обладают этим свойством и $\{\Psi_i(\cdot)\}$ – взаимно–однозначные функциональные преобразования, для которых существуют однозначные обратные функции $\{Y_{i-1} = \Phi_i(Y_i, \Lambda_i)\}$. Например, $\vec{Y}_k = \{Y_1 = \Lambda_1, Y_i = Y_{i-1} + \Lambda_i, i = 2, k\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розанов Ю. А. Марковские случайные поля. – М.: Наука, 1981.

ПРОВЕРКА НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ПО ГРУППИРОВАННЫМ ДАННЫМ

Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов
НГТУ, Россия.

В тех случаях, когда исходные наблюдения представляют собой группированную выборку, использование непараметрических критериев Колмогорова, Смирнова [1], ω^2 и Ω^2 Мизеса затруднительно, т. к. оказываются неизвестными значения соответствующих статистик и, следовательно, невозможно оценить степень согласия теоретического и эмпирического законов распределения. Например, в критерии Колмогорова используется статистика:

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \tag{1}$$

где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, $F(x)$ – теоретическая, согласие с которой проверяется, n – объем выборки. Закон распределения этой статистики найден Колмогоровым [2].

Пусть выборка группирована: $x_1 < x_2 < ... < x_k$ – граничные точки и n_i – количество наблюдений, попавших в интервал $[x_i, x_{i+1})$.

Предположим для простоты, что в крайние интервалы $[-\infty, x_1)$ и $[x_k, +\infty)$ не попало ни одного наблюдения.

Вычислить непосредственное значение статистики D_n по группированной выборке невозможно. Поэтому найдем для нее оценки снизу и сверху. Введем обозначение:

$$N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j, \ N_0 = 0, \ N_k = n.$$

Хотя эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ и неизвестна полностью, но как минимум в k точках она определена, так как

$$F_n(x_i) = \frac{N_{i-1}}{N_k}.$$

Поэтому мы можем ограничить D_n снизу следующим образом:

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \geqslant \max_{l \leqslant i \leqslant k} |F_n(x_i) - F(x_i)| = \max_{l \leqslant i \leqslant k} \left|\frac{N_{i-1}}{N_k} - F(x_i)\right| = S_k^0 \quad (2)$$

Найдем теперь оценку сверху. Пусть

$$G_k^+(x) = \begin{cases} 0, \ x < x_1 \\ N_i/N_k, \ x \in [x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, \ldots, k-1, \\ 1, \ x \geqslant x_k \end{cases}$$

$$G_k^-(x) = \begin{cases} 0, \ x < x_1 \\ N_{i-1}/N_k, \ x \in [x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, \ldots, k-1, \\ 1, \ x \geqslant x_k \end{cases}$$

Функции $G_k^+(x)$ и $G_k^-(x)$ построены так, что $\forall x$: $G_k^-(x) \leqslant F_n(x) \leqslant G_k^+(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} &G_k^-(x) - F(x) \leqslant F_n(x) - f(x) \leqslant G_k^+(x) - F(x) \\ &F(x) - G_k^+(x) \leqslant F(x) - F_n(x) \leqslant F(x) - G_k^-(x) \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначив через $A = \{x : F_n(x) \geqslant F(x)\}$ и $B = \{x : F_n(x) < F(x)\}$, найдем, что

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| = \max\left[\sup_{x \in A}(F_n(x) - F(x)), \sup_{x \in B}(F(x) - F_n(x))\right] \quad (4)$$

Используя (3), получим:

$$\sup_{x\in A}(F_n(x)-F(x))\leqslant\sup_{x\in A}(G_k^+(x)-F(x))\leqslant\sup_x|G_k^+(x)-F(x)|=S_k^+ \qquad (5)$$
$$\sup_{x\in B}(F(x)-F_n(x))\leqslant\sup_{x\in B}(F(x)-G_k^-(x))\leqslant\sup_x|G_k^-(x)-F(x)|=S_k^-$$

Из (4) и (5) следует, что $D_n \leqslant \max\left[S_k^+, S_k^-\right] = S_k$.

Таким образом, $S_k^0 \leqslant D_n \leqslant S_k$ и, так как функция распределения является монотонно возрастающей, то $p_{min} \leqslant p \leqslant p_{max}$, где $p = 1 - K(g(D_n))$, $p_{min} = 1 - K(g(S_k))$, $p_{max} = 1 - K(g(S_k^0))$, $K(\lambda)$ – функция распределения Колмогорова, а $g(y) = \sqrt{(6ny+1)^2/36n}$.

Следовательно, при заданном уровне значимости α, возможны следующие выводы: гипотезу о согласии следует отклонить, если $p_{max} \leqslant \alpha$; гипотезу о согласии не следует отвергать, если $p_{min} > \alpha$.

Аналогичный подход применяется в разработанном программном обеспечении при использовании других непараметрических критериев: Смирнова, ω^2 и Ω^2 Мизеса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов Н. В. Приближение законов распределений случайных величин по эмпирическим данным // Успехи математических наук, 1944, 179-206.

2. Колмогоров А. Н. Об эмпирическом определении закона распределения // Избранные труды по ТВ и МС, 134-141.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИНФОРМАЦИОННЫХ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ ПЛАНИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Денисов В. И., Чубич В. М.
г. Новосибирск, НГТУ

Пусть математическая модель управляемой, наблюдаемой и идентифицируемой системы задаётся уравнениями

$$x(t+1) = \Phi(t+1,t)x(t) + \Psi(t+1,t)u(t) + \Gamma(t+1,t)w(t), \qquad (1)$$
$$y(t+1) = H(t+1)x(t+1) + v(t+1), \qquad (2)$$