Материалы Российской НТК "Информатика и проблемы телекоммуникаций", Новосибирск. 2005. – Т.1. – С.113-116.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЯХ[1]

Лемешко Б.Ю., Миркин Е.П.
НГТУ, г. Новосибирск, E-mail: headrd@fpm.ami.nstu.ru

В практике статистического анализа при проверке однородности двух или нескольких выборочных совокупностей большое значение имеют критерии проверки гипотез о средних значениях (о математических ожиданиях или медианах). В случае двух выборок проверяемая гипотеза о равенстве математических ожиданий имеет вид $H_0: \mu_1 = \mu_2$. В качестве альтернативы, как правило, рассматривается гипотеза $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

Для проверки гипотезы H_0 используется целый ряд критериев: критерий Стьюдента сравнения двух выборочных средних при неизвестных, но равных дисперсиях; критерий сравнения двух выборочных средних при неизвестных и неравных дисперсиях; критерий сравнения средних значений двух выборок по Лорду; критерий сравнения средних значений нескольких выборок равного объема по Диксону; *U*-критерий Уилкоксона, Манна и Уитни; *H*-критерий Краскела-Уаллиса.

Применение критерия сравнения двух выборочных средних при неизвестных, но равных дисперсиях предусматривает вычисление статистики

$$t = \frac{\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right|}{\sqrt{\left[\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right]\left[\frac{Q_1 + Q_2}{n_1 + n_2 - 2}\right]}}\,, \tag{1}$$

где n_i – объем i-ой выборки, $Q_i = \sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2$, $\quad \bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$. В случае нормального закона и справедливости гипотезы H_0 статистика (1) должна подчиняться распределению Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n_1 + n_2 - 2$.

Применение критерия сравнения двух выборочных средних при неизвестных и неравных дисперсиях предусматривает вычисление статистики

$$t = \frac{\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right|}{\sqrt{\left[\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right]}}\,, \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (код проекта 15378)

где n_i – объем i-ой выборки, $s_i = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2$, $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$. В случае нормального закона и справедливости гипотезы H_0 статистика (2) должна подчиняться распределению Стьюдента с числом степеней свободы

$$\nu = \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2 \Bigg/ \left[\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 + 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 + 1}\right] - 2.$$

При сравнении средних значений двух выборок по Лорду используется статистика

$$u = \frac{\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right|}{\left(R_1 + R_2\right)/2}, \qquad (3)$$

где R_1, R_2 – размахи выборок. Критерий сравнивает центры независимых рядов измерений равного объема. Предполагается принадлежность наблюдений нормальному закону и равенство дисперсий. При проверке гипотез используются таблицы процентных точек статистики.

Критерий проверки равенства средних значений нескольких выборок одинакового объема по Диксону применяется для проверки значимости отклонения среднего $\bar{x}_1$ одной выборки от k-1 средних значений других выборок. Статистика критерия имеет вид

$$M = \left|\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\bar{x}_1 - \bar{x}_n}\right|. \qquad (4)$$

Проверяемая гипотеза о незначимости отклонения $\bar{x}_1$ от остальных средних отвергается при больших значениях статистики (4). Считается, что Критерий устойчив к нарушению предположений о нормальности наблюдаемого закона.

Ранговый критерий Манна и Уитни основан на критерии Уилкоксона для независимых выборок. Он представляет собой непараметрический аналог t-критерия для сравнения двух средних значений непрерывных распределений. Для вычисления статистики упорядочивают m + n значений объединенной выборки, определяют сумму рангов R_1, соответствующую элементам первой выборки, и сумму рангов второй R_2. Вычисляются

$$U_1 = mn + \frac{m(m-1)}{2} - R_1,$$

$$U_2 = mn + \frac{n(n-1)}{2} - R_2.$$

Статистика критерия имеет вид

$$U = \min\{U_1, U_2\}. \qquad (5)$$

Проверяемая гипотеза отклоняется, когда значение статистики (5) оказывается меньше критического.

Развитием U-критерия для проверки гипотезы (о равенстве средних) по k выборкам является H-критерий Краскела-Уаллиса. Объединенную выборку $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ упорядочивают и вычисляют суммы рангов R_i для i-й выборки, $i=\overline{1,k}$. Статистика для проверки нулевой гипотезы имеет вид

$$H=\left[\frac{12}{n(n+1)}\right]\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}\right]-3(n-1). \qquad (6)$$

Статистика представляет собой дисперсию ранговых сумм. При больших n_i и k (практически при $n_i \geq 5,\ k \geq 4$) при справедливости гипотезы H_0 статистика (6) должна подчиняться χ^2_{k-1}-распределению.

Применение большинства критериев, за исключением непараметрических, предполагает нормальность наблюдаемого закона. Известны либо предельные распределения статистик, либо процентные точки этих распределений.

В литературных источниках содержатся весьма неопределенные сведения о скорости сходимости распределений статистик данных критериев к предельным, практически отсутствует информация об устойчивости соответствующих критериев к отклонениям от нормального закона, недостаточно информации о мощности критериев по отношению к различным альтернативам.

Цель данной работы состояла в исследовании методами компьютерного моделирования устойчивости распределений статистик указанных критериев к нарушению предположений о нормальности наблюдаемого показателя, в сравнительной оценке мощности критериев относительно некоторых альтернатив и в ранжировании критериев по мощности.

Ранее в работах [1–3] была показана высокая устойчивость к отклонениям от нормальности некоторых критериев проверки гипотез о равенстве математически ожиданий. В данном случае в зависимости от объемов выборок исследованы распределения статистик и мощность критериев, перечисленных выше, исследовано влияние на распределения статистик данных критериев различной степени отклонений от нормального закона. В частности исследованы распределения статистик перечисленных критериев при различных законах распределения ошибок измерений.

1. Лемешко Б.Ю., Помадин С.С. Проверка гипотез о математических ожиданиях и дисперсиях в задачах метрологии и контроля качества при вероятностных законах, отличающихся от нормального // Метрология. 2004. – № 3. – С.3-15.
2. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Pomadin S.S., Mirkin E.P. Investigation Of The Stability Of Statistical Hypotheses Testing Procedures Used In Quality Management Problems // Proc. of the Seventh Intern. Conf. “Computer Data Analysis and Modeling”, September 6-10, 2004, Minsk. Vol. 1. – P. 90-93.

3. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Миркин Е.П. Исследование критериев проверки гипотез, используемых в задачах управления качеством // Мат. VII межд. конф. АПЭП-2004. Новосибирск, 2004. – Т. 6. – С. 269-272