Материалы Российской НТК “Информатика и проблемы телекоммуникаций”, Новосибирск. 2006. – Т.1. – С.175-179.

О МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ПРИ БЛИЗКИХ АЛЬТЕРНАТИВАХ

Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н.
НГТУ, Новосибирск
E-mail: headrd@fpm.ami.nstu.ru

С проверкой статистических гипотез связывают ошибки двух видов. Ошибка 1-го рода заключается в том, что в результате проверки отклоняется справедливая проверяемая гипотеза H_0. Ошибка 2-го рода – в признании верной гипотезы H_0, когда на самом деле справедлива некоторая конкурирующая гипотеза H_1.

Отдавая предпочтение некоторому критерию при проведении статистического анализа данных, хотелось бы быть уверенным в том, что для заданной вероятности ошибки первого рода α гарантируется минимальная вероятность ошибки 2-го рода β. Другими словами, хотелось бы отдать предпочтение критерию, который имеет наибольшую мощность $1-\beta$ относительно интересующей нас пары альтернатив H_0 и H_1.

Цель представленных в данном докладе исследований заключалась в сравнительном анализе мощности наиболее часто используемых критериев согласия на некоторых парах достаточно близких конкурирующих гипотез. Представляет интерес способность критериев различать именно близкие гипотезы, так как распознавание отличия в далеких законах распределения, как правило, не составляет проблем.

Исследовалась мощность критериев Колмогорова [1], ω^2 Крамера-Мизеса-Смирнова [1], Ω^2 Андерсона-Дарлинга [1], χ^2 Пирсона при равновероятном (РВГ) и асимптотически оптимальном (АОГ) группировании [2], типа χ^2 Никулина [3, 4]. Моделирование распределений статистик критериев и исследование мощности опиралось на развиваемое программное обеспечение задач статистического анализа.

В работе сравнительный анализ мощности критериев согласия проводится на двух парах альтернатив. Первую пару составили нормальный и логистический законы. Эти два закона близки и трудно различаются с помощью критериев согласия. Вторую пару составили распределение Вейбулла и гамма-распределение с параметрами, выбранными так, чтобы обеспечить максимальную близость этих двух законов. Объемы выборок моделируемых распределений статистик выбирались так, чтобы обеспечить точность оценивания значений функции мощности до 3-х знаков.

В таблицах 1-2 приведена часть результатов сравнительного исследования мощности критериев при проверке простых и сложных гипотез.

Таблица 1. Мощность критериев согласия при проверке простой гипотезы H_0 (нормальное распределение) против альтернативы H_1 (логистическое)

α	*n=100*	*n=200*	*n=300*	*n=500*	*n=1000*	*n=2000*
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при *k=15* и АОГ					
0,1	0.290	0.388	0.490	0.671	0.922	0.998
0,05	0.210	0.292	0.385	0.565	0.871	0.996
0,01	0.107	0.159	0.221	0.369	0.729	0.983
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при *k=15* и РВГ					
0,1	0.139	0.187	0.237	0.343	0.607	0.911
0,05	0.073	0.106	0.144	0.227	0.477	0.848
0,01	0.018	0.029	0.043	0.083	0.247	0.662
	Мощность критерия Ω^2 Андерсона-Дарлинга					
0,1	0.125	0.169	0.222	0.343	0.654	0.957
0,05	0.057	0.079	0.107	0.181	0.439	0.869
0,01	0.010	0.013	0.017	0.031	0.114	0.491
	Мощность критерия Колмогорова					
0,1	0.127	0.170	0.215	0.309	0.544	0.861
0,05	0.062	0.088	0.116	0.179	0.365	0.721
0,01	0.012	0.018	0.026	0.044	0.119	0.366
	Мощность критерия ω^2 Крамера-Мизеса-Смирнова					
0,1	0.114	0.147	0.186	0.277	0.542	0.892
0,05	0.052	0.067	0.086	0.136	0.324	0.742
0,01	0.010	0.011	0.014	0.021	0.065	0.307

Таблица 2. Мощность критериев согласия при проверке сложной гипотезы H_0 (нормальное распределение) против альтернативы H_1 (логистическое)

α	*n=20*	*n=50*	*n=100*	*n=200*	*n=300*	*n=500*	*n=1000*	*n=2000*
	Мощность критерия Ω^2 Андерсона-Дарлинга							
0,1	0.164	0.230	0.324	0.496	0.636	0.828	0.981	1.000
0,05	0.098	0.149	0.224	0.377	0.519	0.741	0.963	1.000
0,01	0.031	0.054	0.091	0.186	0.297	0.525	0.885	0.998
	Мощность критерия типа χ^2 Никулина при *k*=15 и АОГ							
0,1	**0.195**	**0.249**	**0.332**	0.466	0.579	0.755	0.952	0.999
0,05	**0.137**	**0.165**	**0.248**	0.368	0.480	0.669	0.921	0.998
0,01	**0.036**	**0.071**	**0.125**	**0.213**	**0.304**	0.488	0.825	0.992
	Мощность критерия ω^2 Крамера-Мизеса-Смирнова							
0,1	0.153	0.208	0.291	0.447	0.582	0.781	0.968	1.000
0,05	0.090	0.130	0.194	0.329	0.458	0.678	0.939	0.999
0,01	0.027	0.044	0.074	0.150	0.243	0.445	0.825	0.994
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при *k*=15 и АОГ							
0,1	0.194	0.220	0.280	0.393	0.502	0.688	0.928	0.998
0,05	0.140	0.133	0.199	0.291	0.391	0.583	0.882	0.996
0,01	0.036	0.043	0.079	0.139	0.213	0.376	0.745	0.984
	Мощность критерия Колмогорова							
0,1	0.142	0.181	0.236	0.351	0.459	0.646	0.905	0.997
0,05	0.080	0.105	0.143	0.230	0.322	0.502	0.823	0.990
0,01	0.021	0.029	0.043	0.081	0.127	0.244	0.575	0.938
	Мощность критерия χ^2 Пирсона при *k*=15 и РВГ							
0,1	0.097	0.134	0.151	0.197	0.252	0.367	0.653	0.944
0,05	0.064	0.072	0.077	0.116	0.153	0.245	0.517	0.893

0,01	0.012	0.016	0.019	0.031	0.046	0.089	0.268	0.717

Для случая проверки простых гипотез результаты исследований позволяют упорядочить критерии по мощности следующим образом:

$$X_n^2 \text{ Пирсона (АОГ)} \succ \Omega^2 \text{ Андерсона-Дарлинга} \succ \omega^2 \text{ Мизеса} \succ = \text{Колмогорова}$$

Такая шкала справедлива, если в критерии χ^2 Пирсона используется АОГ, при котором минимизируются потери в информации Фишера. При очень близких гипотезах может быть: Колмогорова $\succ$ ω^2 Мизеса.

При проверке сложных гипотез градация по мощности оказывается иной:

$$\Omega^2 \text{ Андерсона-Дарлинга} \succ \omega^2 \text{ Мизеса} \succ \text{Никулина} \succ X_n^2 \text{ Пирсона (АОГ)} \succ \text{Колмогорова.}$$

При очень близких гипотезах возможно:

$$\Omega^2 \text{ Андерсона-Дарлинга} \succ \text{Никулина} \succ \omega^2 \text{ Мизеса} \succ X_n^2 \text{ Пирсона (АОГ)} \succ \text{Колмогорова.}$$

Указанные выводы носят интегрированный характер. Такое упорядочение не является жестким: иногда критерий имеет преимущества по мощности при одних значениях α и объемах выборок n и уступает при других значениях α и n.

Надо иметь в ввиду, что мощность критериев типа χ^2 (Пирсона и Никулина) зависит не только от гипотез H_0, H_1 и объема выборок n, но, при заданных H_0 и H_1, – от способа группирования и числа интервалов. Число интервалов, при котором мощность критериев для пары альтернатив H_0 и H_1 максимальна, зависит от этих гипотез и от способа группирования. Увеличение числа интервалов не всегда приводит к росту мощности критериев типа χ^2 [5].

При близких гипотезах H_0 и H_1 выбор АОГ при использовании критерия χ^2 Пирсона дает положительный эффект как при простых, так и при сложных гипотезах. Однако это не означает, что использование АОГ всегда гарантирует максимальную мощность данного критерия. При конкретных и не очень близких гипотезах оптимальным может оказаться некоторый другой способ группирования, который может быть найден в результате максимизации мощности критерия.

1. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
2. Лемешко Б.Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия // Заводская лаборатория. – 1998. – Т. 64. – №1. – С. 56-64.
3. Никулин М.С. Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т. XVIII. – № 3. – С. 583-591.
4. Greenwood P.E., Nikulin M.S. A Guide to Chi-Squared Testing. – John Wiley & Sons, Inc. 1996. – 280 p.
5. Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В. О выборе числа интервалов в критериях

согласия типа χ^2 // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2003. Т. 69. – № 1. – С. 61-67.