ISSN 2782-2001
Системы анализа
и обработки данных
том 95, № 3, 2024, с. 55–76

http://journals.nstu.ru/vestnik
Analysis and data
processing systems
Vol. 95, No. 3, 2024, pp. 55–76

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 519.23 DOI: 10.17212/2782-2001-2024-3-55-76

Применение параметрических критериев однородности дисперсий в условиях нарушения стандартных предположений*

Б.Ю. ЛЕМЕШКО[a], С.Б. ЛЕМЕШКО[b], Е.Ю. ЛОТОЧ[c]

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет

[a] *lemeshko@ami.nstu.ru* [b] *skyer@mail.ru* [c] *lotoch3@yandex.ru*

При анализе рядов измерений в различных приложениях возникает необходимость убедиться в том, что с течением времени не изменились характеристики рассеяния измеряемых величин, или в том, что точность измерений, проводимых различными лабораториями при аналогичных испытаниях, удовлетворяет необходимым требованиям. В этих целях целесообразно использовать различные k-выборочные параметрические критерии проверки гипотез об однородности дисперсий (о равенстве дисперсий). Предпосылкой, обусловливающей возможность применения параметрических критериев, является принадлежность анализируемых выборок нормальным законам распределения, что далеко не всегда выполняется. При нарушении предположения о нормальности распределения статистик параметрических критериев, как правило, сильно изменяются, что исключает при проверке гипотез возможность использования классических результатов. Лучшие параметрические критерии обладают заметным преимуществом в мощности по сравнению с непараметрическими критериями. В условиях нарушения стандартного предположения о нормальности это преимущество, как правило, сохраняется.

В работе показывается, как меняются распределения статистик параметрических критериев в условиях нарушения стандартного предположения. Показывается, что с использованием имитационного моделирования, опирающегося на метод Монте-Карло, и с соответствующей программной поддержкой можно находить распределения статистик применяемых критериев в нестандартных условиях, соответствующих конкретным приложениям. Использование результатов такого моделирования дает возможность осуществлять корректные статистические выводы по применяемым критериям. Рассматривается методика применения параметрических критериев однородности дисперсий в условиях нарушения стандартного предположения. Методика предусматривает на первом этапе проверку гипотезы о принадлежности анализируемых выборок нормальным законам с использованием совокупности специальных критериев. В случае отрицательного результата на втором этапе выбирается закон, описывающий объединенную выборку. На третьем этапе с использованием результатов моделирования при этом

* *Статья получена 30 сентября 2024 г.*

законе формируется вывод по применяемым критериям. Приводятся примеры реализации методики в рамках разработанной программной системы.

Ключевые слова: проверка нормальности, критерии проверки однородности, критерии однородности дисперсий, непараметрические критерии согласия, распределение статистики, ошибки округления, достигнутый уровень значимости, ошибка 1-го рода, ошибка 2-го рода, мощность критерия, имитационное моделирование

ВВЕДЕНИЕ

При анализе рядов измерений в технических и не только технических приложениях часто возникает необходимость убедиться в том, что с течением времени не изменились характеристики рассеяния измеряемых величин, или, например, в том, что точность измерений, проводимых различными лабораториями при аналогичных испытаниях, удовлетворяет необходимым требованиям. Ответить на возникающие в таких ситуациях вопросы может помочь использование статистических методов анализа и, в частности, различных критериев проверки однородности. Например, цель межлабораторных сличительных испытаний заключается в подтверждении того, что «несколько лабораторий при анализе проб дают сопоставимые и достоверные результаты». Такие испытания являются очень частой процедурой в метрологии. Применение критериев проверки однородности (законов распределения, средних, дисперсий) буквально напрашивается для статистического анализа результатов такого рода испытаний. Однако приходится констатировать полное отсутствие упоминаний об использовании каких-то критериев однородности в межлабораторных сличительных испытаниях.

В критериях проверки однородности дисперсий, о которых в данном случае идет речь, проверяемая гипотеза о равенстве дисперсий k выборок имеет вид

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 , \tag{1}$$

а в качестве конкурирующей может рассматриваться гипотеза

$$H_1: \sigma_{i_1}^2 \neq \sigma_{i_2}^2 , \tag{2}$$

где неравенство выполняется, по крайней мере, для одной пары индексов i_1, i_2.

Для проверки гипотез вида (1) может использоваться целый ряд параметрических и непараметрических критериев [1].

Предпосылкой, обусловливающей возможность применения параметрических критериев однородности дисперсий, является принадлежность анализируемых выборок нормальным законам распределения. При нарушении предположения о нормальности возможность использования классических результатов для этих критериев полностью исключается, так как распределения статистик $G(S|H_0)$ критериев при справедливости H_0 в таких ситуациях существенно отклоняются от тех, которые имеют место в случае нормальных законов. Это замечание справедливо и для множества других параметрических критериев, так или иначе касающихся проверки гипотез, связанных с дисперсией. Поэтому перед применением параметрических критериев однородности дисперсий в различных приложениях в качестве обязательной процедуры должна рассматриваться проверка принадлежности выборок нормальным законам. С этой целью могут использоваться различные непараметрические критерии согласия [2], критерии согласия типа χ^2 [3], а также широкий ряд специальных критериев проверки гипотез о нормальности [4].

Достаточно длинный перечень параметрических критериев однородности дисперсий, имеющийся к настоящему моменту, не в последнюю очередь объясняется попытками авторов построить устойчивый критерий, сохраняющий свои свойства в условиях нарушения стандартного предположения о нормальности.

Корректность применения непараметрических критериев, предназначенных для проверки однородности характеристик рассеяния, также обусловлена определенными предположениями, о которых редко упоминается в явном виде. В частности, предполагается, что анализируемые выборки принадлежат одному и тому же закону распределения [5]. Если это оказывается не так, то при справедливости проверяемой гипотезы о равенстве дисперсий распределения статистик этих критериев будут существенно отличаться от тех, которые они имеют при выполнении данного предположения [6]. Во-вторых, в ряде случаев предполагается равенство математических ожиданий [5]. В таких ситуациях перед применением соответствующего непараметрического критерия для проверки однородности дисперсий приходится соответствующим образом преобразовывать выборки.

Если не учитывать нюансы, то основные итоги приведенного в [1] сравнительного анализа мощности параметрических и непараметрических критериев проверки однородности дисперсий можно свести к очевидному факту: параметрические критерии имеют значительное преимущество в мощности, и это преимущество, как правило, сохраняется в ситуациях, когда анализируемые выборки принадлежат законам, существенно отличающимся от нормального. Отсюда вытекает целесообразность реализации возможности применения в условиях нарушения стандартных предположений (в случае принадлежности выборок некоторому произвольному закону) именно параметрических критериев.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы, во-первых, продемонстрировать, как может решаться эта задача, и, во-вторых, показать, как предлагаемая методика может быть с успехом реализована в программном обеспечении, ориентированном на статистический анализ данных.

1. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О РАВЕНСТВЕ ДИСПЕРСИЙ

В настоящей работе рассмотрено применение только тех k-выборочных параметрических критериев проверки однородности дисперсий, которые в руководстве [1] характеризуются как наиболее перспективные для использования в приложениях. В это множество входят следующие критерии: Бартлетта [7], Кокрена [8], Хартли [9], Неймана – Пирсона [10], О’Брайена [11], Z-критерий Оверолла – Вудворда [12], модифицированный Z-критерий [13], Лайарда [14], Миллера [15], Левене [16].

Статистика **критерия Бартлетта** [7] вычисляется в соответствии с выражением

$$\chi^2 = M\left[1+\frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\nu_i}-\frac{1}{N}\right)\right]^{-1}, \tag{3}$$

где $M = N\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\nu_i S_i^2\right)-\sum_{i=1}^{k}\nu_i \ln S_i^2$; k – количество выборок; n_i – объемы выборок; $\nu_i = n_i$, если математическое ожидание известно, и $\nu_i = n_i - 1$, если не известно; $N=\sum_{i=1}^{k}\nu_i$; S_i^2 – оценки выборочных дисперсий. При неизвестном математическом ожидании оценки $S_i^2 = \frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ji}-\overline{X}_i\right)^2$, $\overline{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ji}$, где X_{ij} – j-е наблюдение в i-й выборке.

Статистика **критерия Кокрена** [8] выражается соотношением

$$Q = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_k^2}, \tag{4}$$

где $S_{\max}^2 = \max\left(S_1^2,\, S_2^2,\ldots,\, S_k^2\right)$, S_i^2, $i=\overline{1,k}$, – оценки выборочных дисперсий.

Статистика **критерия Хартли** [9], применяемого для проверки гипотезы об однородности дисперсий, имеет вид

$$F = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2}, \tag{5}$$

где $S_{\min}^2 = \min\left(S_1^2,\, S_2^2,\ldots,\, S_k^2\right)$.

Статистика критерия **Неймана – Пирсона** [10] определяется отношением арифметического среднего всех оценок дисперсий s_i^2 к их геометрическому среднему:

$$h = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}s_i^2 \Bigg/ \left(\prod_{i=1}^{k}s_i^2\right)^{1/k}. \tag{6}$$

Статистика **критерия О`Брайена** [11] имеет вид

$$V = \frac{\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(\overline{V_i}-\overline{\overline{V_i}}\right)^2}{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(V_{ij}-\overline{V_i}\right)^2}, \tag{7}$$

где $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$;

$$\overline{V_i}=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} V_{ij}\ ,\quad \overline{\overline{V_i}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} V_{ij}\ ,\quad V_{ij}=\frac{(n_i-1,5)n_i\left(X_{ij}-\bar{X}_i\right)^2-0,5s_i^2(n_i-1)}{(n_i-1)(n_i-2)}\ .$$

Статистика ***Z*-критерия Оверолла – Вудворда** [12] определяется выражением

$$Z=\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} Z_i^2\ , \tag{8}$$

где $Z_i=\sqrt{\frac{c_i(n_i-1)s_i^2}{MSE}}-\sqrt{c_i(n_i-1)-\frac{c_i}{2}}$, $MSE=\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\bar{X}_i\right)^2$, $c_i=2+\frac{1}{n_i}$.

Статистика **модифицированного *Z*-критерия Оверолла – Вудворда** [13] отличается вычислением величин c_i :

$$c_i=2,0\left[\frac{1}{K_i}\left(2,9+\frac{0,2}{n_i}\right)\right]^{1,6(n_i-1,8K_i+14,7)/n_i}\ , \tag{9}$$

где $K_i=\frac{1}{n_i-2}\sum_{j=1}^{n_i} G_{ij}^4$ – оценка коэффициента эксцесса *i*-й выборки, $G_{ij}=\left(X_{ij}-\bar{X}_i\right)\Big/\sqrt{\frac{n_i-1}{n_i}s_i^2}$.

Статистика **критерия Лайарда** [14] определяется выражением

$$L=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\frac{\left(\ln S_i^2-T\right)^2}{\delta^2}\ , \tag{10}$$

где $T=\left[\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\ln S_i^2\right]\Big/(n-k)$, $\delta^2=2+\gamma[1-k/n]$, взвешенное среднее коэффициентов эксцесса *k* выборок определяется выражением

$$\gamma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i^2\left[\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\bar{X}_i\right)^4\Big/\left(\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\bar{X}_i\right)^2\right)^2\right]-3\ .$$

Статистика k-выборочного варианта **критерия Миллера** [15], предложенная Лайардом [14], имеет вид

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{U}_{i\bullet} - \overline{U}_{\bullet\bullet}\right)^2 \Big/ (k-1)}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(U_{ij} - \overline{U}_{i\bullet}\right)^2 \Big/ (n-k)}, \tag{11}$$

где $U_{ij} = n_i \ln S_i^2 - (n_i - 1) \ln S_{i(j)}^2$, $\quad S_{i(j)}^2 = \frac{1}{n_i - 2} \sum_{l \neq j} \left(X_{il} - \overline{X}_{i(j)} \right)^2$,

$$\overline{X}_{i(j)} = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{l \neq j} X_{il}, \quad \overline{U}_{i\bullet} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} U_{ij}, \quad \overline{U}_{\bullet\bullet} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} U_{ij}.$$

Статистика **критерия Левене** [16] имеет вид

$$W = \frac{n-k}{k-1} \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{Z}_{i\bullet} - \overline{Z}_{\bullet\bullet}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Z_{ij} - \overline{Z}_{i\bullet}\right)^2}, \tag{12}$$

где $Z_{ij} = \left| X_{ij} - \overline{X}_{i\bullet} \right|$, $\overline{X}_{i\bullet}$ − среднее в i-й выборке; $\overline{Z}_{i\bullet}$ − среднее Z_{ij} по i-й выборке; $\overline{Z}_{\bullet\bullet}$ − среднее Z_{ij} по всем выборкам.

Все вышеперечисленные критерии являются правосторонними: проверяемая H_0 гипотеза отклоняется при больших значениях статистик.

Подробности о распределениях $G(S|H_0)$ статистик S рассматриваемых критериев при справедливости проверяемой гипотезы H_0, особенности сходимости их к асимптотическим распределениям при их наличии или таблицы критических значений, а также оценки мощности критериев относительно различных конкурирующих гипотез приведены в [1].

Напомним, что с проверкой любых гипотез связаны два вида ошибок. Ошибка 1-го рода связана с отклонением справедливой проверяемой гипотезы H_0, вероятность которой обозначают α; ошибка 2-го рода – с неотклонением проверяемой гипотезы, когда справедлива некоторая конкурирующая гипотеза, например H_1, вероятность которой обозначают β. Мощность соответствующего критерия относительно H_1 определяется соотношением $1 - \beta$. Подчеркнем, что в конкретной ситуации (при заданных α и объемах выборок) величина мощности критерия представляет собой вероятность отклонения гипотезы H_0, когда справедлива гипотеза H_1.

Как правило, аналитический вид распределений $G(S|H_1)$ статистик критериев при справедливости конкурирующих гипотез H_1 бывает неизвестен. Поэтому оценки мощности критериев могут быть найдены только численно с использованием методов статистического моделирования.

Оценки мощности рассматриваемых критериев однородности дисперсий, полученные в условиях выполнения предположения о нормальности при проверке гипотезы H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ в случае $k = 2$ в зависимости от объемов выборок $n_i = n$ (при заданной вероятности ошибок 1-го рода $\alpha = 0{,}1$) относительно конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma_2 = 1{,}1\sigma_1$, представлены в табл. 1. При $k = 2$ и нормальном законе критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера [1], Неймана – Пирсона и Z-критерий Оверолла – Вудворда эквивалентны по мощности [1]. Поэтому в табл. 1 приведены оценки мощности только для критерия Кокрена.

Как видим, в данном случае группа перечисленных критериев обладает некоторым преимуществом в мощности по сравнению с остальными критериями однородности. С другой стороны, из результатов, приведенных в табл. 1, очевидно, что критерии Лайарда, Миллера, О\`Брайена и модифицированный Z-критерий Оверолла – Вудворда образуют другую асимптотически эквивалентную группу параметрических критериев. Устойчивый критерий Левене в данном случае оказывается на последней позиции.

Таблица 1

Table 1

Оценки мощности критериев однородности дисперсий при $\alpha = 0{,}1$ относительно конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma_2 = 1{,}1\sigma_1$ в зависимости от объемов выборок в случае нормального закона при $k = 2$

Estimates of the power of the homogeneity of variance tests with $\alpha = 0{,}1$ relative to the competing hypothesis $H_1: \sigma_2 = 1{,}1\sigma_1$ depending on the sample sizes in the case of the normal law with $k = 2$

Критерий	Объемы выборок $n_i = n$								
	10	25	50	100	200	400	600	800	1000
Кокрена	0,112	0,135	0,173	0,246	0,381	0,602	0,754	0,853	0,914
Лайарда	0,110	0,133	0,171	0,243	0,379	0,600	0,753	0,852	0,914
Миллера	0,110	0,132	0,170	0,243	0,379	0,600	0,753	0,852	0,914
О\`Брайена	0,109	0,132	0,170	0,243	0,379	0,600	0,753	0,852	0,914
Модиф. Z	0,109	0,131	0,170	0,243	0,378	0,599	0,752	0,852	0,914
Левене	0,110	0,129	0,163	0,228	0,348	0,553	0,704	0,809	0,879

О чем говорят приведенные оценки мощности при $\alpha = 0{,}1$, например, в случае критерия Кокрена? Они говорят, например, о том, что в ситуации справедливости гипотезы H_1 при $n_i = 10$ вероятность отклонения гипотезы H_0 всего 0,112; при $n_i = 100$ вероятность отклонения гипотезы H_0 равна 0,246; при $n_i = 400$ вероятность отклонения 0,602, при $n_i = 1000$ вероятность отклонения 0,914. То есть при малых n_i критерий просто не заметит, что справедливой является гипотеза H_1, а вероятность ошибки 2-го рода β лишь при $n_i = 1000$ оказывается меньше заданной $\alpha = 0{,}1$.

Для сравнения укажем, что в такой же ситуации и при справедливости более далекой конкурирующей гипотезы $H_2: \sigma_2 = 1{,}2\sigma_1$ при объемах выборок

$n_i = 100$ гипотеза H_0 будет отклоняться с вероятностью 0,564, а при справедливости H_3: $\sigma_2 = 1{,}5\sigma_1$ – с вероятностью 0,991 [1].

Заметим, что в условиях нарушения предположения о нормальности анализируемых выборок и симметричности предполагаемого закона при анализе двух выборок группа из шести вышеупомянутых критериев остается наиболее предпочтительной и эквивалентной по мощности [1]. Но при $k \geq 3$ эквивалентность по мощности критериев этой группы исчезает и сказывается преимущество в мощности критерия Кокрена (при нормальном законе и законах с более «легкими хвостами», чем у нормального).

2. ПОВЕДЕНИЕ КРИТЕРИЕВ В УСЛОВИЯХ НАРУШЕНИЯ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О НОРМАЛЬНОСТИ

Рассмотрим, как меняются распределения статистик критериев в условиях нарушения стандартного предположения, в частности, в случае принадлежности выборок обобщенному нормальному закону с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{ -\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1} \right)^{\theta_2} \right\} \quad (13)$$

при различных значениях параметра формы θ_2. Частными случаями этого закона являются нормальный закон при $\theta_2 = 2$ и распределение Лапласа при $\theta_2 = 1$. На рис. 1 плотности распределения семейства (13) приведены при различных значениях параметра формы θ_2, но при одинаковой дисперсии $\sigma^2 = 1$.

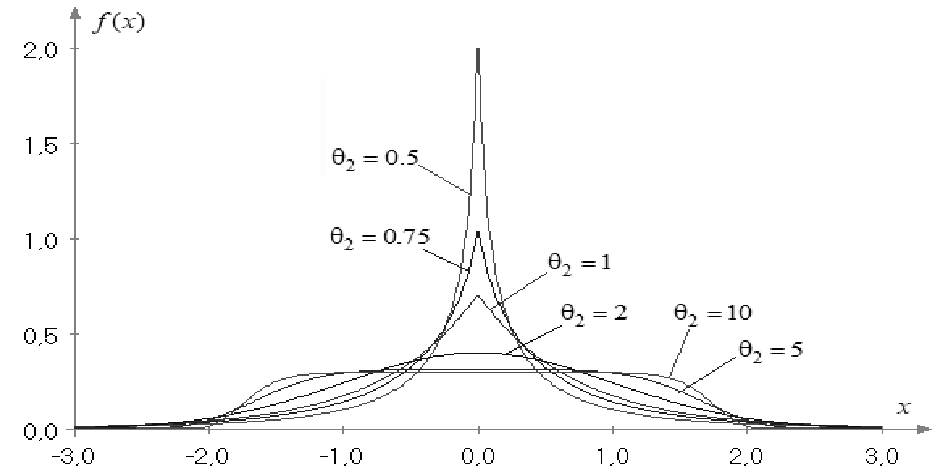


Рис. 1. Плотность распределения обобщенного нормального закона в зависимости от значения параметра формы θ_2 при дисперсии $\sigma^2 = 1$

Fig. 1. The density function of the generalized normal law distribution depending on the value of the shape parameter θ_2 with variance $\sigma^2 = 1$

Как правило, в нестандартных условиях распределения статистик критериев проверки однородности дисперсий очень сильно меняются. На рис. 2 показаны распределения статистики Кокрена в случае принадлежности четырех анализируемых выборок обобщенным нормальным законам в зависимости от значения параметра формы θ_2 при равных объемах выборок $n_i = 100$. Аналогичным образом в зависимости от законов, которым принадлежат извлекаемые выборки, меняются распределения статистик критериев Бартлетта, Хартли, Фишера, Неймана – Пирсона и Z-критерия Оверолла – Вудворда. Несколько более устойчивы к нарушению стандартного предположения критерии Лайарда и Миллера. В меньшей степени в условиях нарушения стандартного предположения о нормальности меняются распределения статистик критериев Левене, О`Брайена и модификации Z-критерия Оверолла – Вудворда. Но и в этом случае пренебрегать изменением распределений статистик не следует.

Из картины, показанной на рис. 2, очевидно следующее. Если выборки принадлежат закону с параметром формы $\theta_2 < 2$, а мы решим использовать классические результаты, касающиеся распределений статистик критериев при нормальном законе (при $\theta_2 = 2$), то это приведет к увеличению числа отклонений гипотезы H_0 (к увеличению вероятности α ошибок 1-го рода). Аналогичное решение в ситуации принадлежности выборок закону при $\theta_2 > 2$ приведет к увеличению вероятности β ошибок 2-го рода.

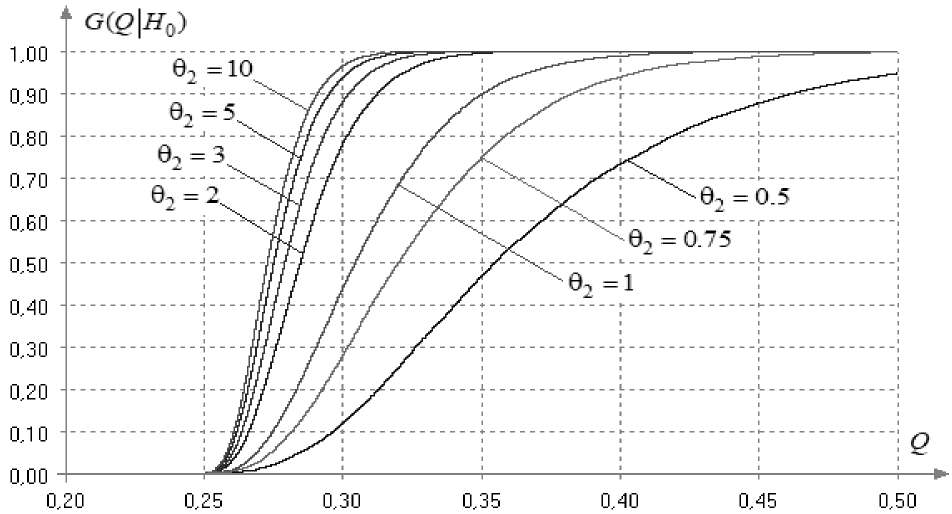


Рис. 2. Распределения статистики критерия Кокрена в случае принадлежности четырех анализируемых выборок равного объема $n_i = 100$ обобщенному нормальному закону в зависимости от значения параметра формы θ_2 при справедливости гипотезы H_0 о равенстве дисперсий

Fig. 2. Distributions of the Cochran criterion statistics in the case of belonging of 4 analyzed samples of equal size $n_i = 100$ to the generalized normal law depending on the value of the shape parameter θ_2 under the validity of the hypothesis H_0 about the equality of variances

Относительно поведения распределений статистик параметрических критериев однородности дисперсий в условиях нарушения стандартных предположений необходимо отметить еще один момент.

В условиях принадлежности выборок нормальным законам асимптотические распределения статистик $G(S|H_0)$ критериев Бартлетта, Лайарда и *Z*-критерия Оверолла – Вудворда не зависят от объемов анализируемых выборок. Но в условиях нарушения этого предположения ситуация может меняться.

В частности, при симметричных законах с более легкими по сравнению с нормальным законом «хвостами» (при различных значениях параметра формы $\theta_2 > 2$) характер зависимости $G(S|H_0)$ от размеров n_i остается такой же, как и при нормальном законе (распределения зависят от n_i или не зависят).

Но в случае принадлежности выборок закону с более «тяжелыми хвостами» по сравнению с нормальным законом (при параметре формы $\theta_2 < 2$) у распределений статистик (например, критерия Бартлетта) проявляется зависимость от объемов анализируемых выборок n_i. Это замечание касается всех параметрических критериев однородности дисперсий. В наименьшей степени зависимость от n_i в такой ситуации проявляется для распределений статистик критериев Левене и О`Брайена, относительно устойчивых к нарушению стандартного предположения о нормальности, чуть существенней – для распределений статистики критерия Миллера.

Необходимо отметить еще один факт, влияющий на распределения $G(S|H_0)$ статистик критериев проверки однородности дисперсий как при выполнении стандартного предположения о нормальности анализируемых выборок, так и в нестандартных условиях. Это касается ошибок округления Δ_i, касающихся соответствующих выборок. Если ошибки округления Δ_i анализируемых выборок имеют один и тот же порядок (равны), то их наличие никак не сказывается на распределениях $G(S|H_0)$ статистик. Но в ситуации, когда неравенство $\Delta_{i_1} \neq \Delta_{i_2}$ выполняется, по крайней мере, для одной пары выборок i_1, i_2, распределения статистик правосторонних критериев однородности дисперсий сдвигаются в область бóльших значений статистик. Это следует учитывать, применяя критерии.

Замечание по поводу мощности критериев. При $k = 2$ и принадлежности выборок семейству (13) при различных значениях параметра формы θ_2 группа критериев Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана – Пирсона и *Z*-критерий Оверолла – Вудворда остается эквивалентной по мощности. При $k \geq 3$ ситуация меняется, эквивалентность критериев исчезает, и в стандартной ситуации преимущество в мощности оказывается за критерием Кокрена.

В общем случае и принадлежности анализируемых выборок обобщенному нормальному закону с плотностью (13) со значениями параметра формы $\theta_2 \geq 2$ критерий Кокрена остается наиболее мощным, причем с ростом θ_2 несколько возрастает мощность всех критериев. Естественно, с уменьшением θ_2 мощность критериев снижается, и при $\theta_2 < 2$ преимущество в мощности постепенно оказывается за критерием Левене.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ В УСЛОВИЯХ НАРУШЕНИЯ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О НОРМАЛЬНОСТИ

Методика применения параметрических критериев однородности дисперсий в общем случае выглядит следующим образом.

1. В первую очередь следует проверить гипотезу о принадлежности анализируемых выборок нормальным законам. Если гипотеза о принадлежности нормальному закону каждой из выборок или объединенной выборки не отклоняется, то при проверке гипотезы об однородности дисперсий опираются на классические результаты, связанные с соответствующими критериями.

2. Если гипотеза о принадлежности выборок нормальному закону отклоняется, то следует идентифицировать параметрическую модель закона, т. е. подобрать модель, наилучшим образом описывающую совокупность отдельных выборок и/или объединенную выборку. Отметим, что достаточно хорошую модель можно построить практически всегда, в том числе с построением модели закона в виде смеси параметрических моделей.

3. Проверить гипотезу об однородности с использованием выбранных критериев. Эта процедура должна предусматривать интерактивное моделирование распределений статистик $G(S_i | H_0)$ соответствующих критериев, на основе которых будут вычисляться достигнутые уровни значимости P_v по эти критериям.

Вообще говоря, применение некоторых критериев вынуждает обратиться к процедуре интерактивного моделирования распределений статистик для вычисления P_v и в условиях принадлежности выборок нормальным законам. Как правило, это объясняется следующими причинами. Относительно одних критериев известно [1], что реальные распределения статистик этих критериев отличаются от указанных в первоисточниках асимптотических распределений. Относительно других критериев известно [1], что распределения статистик плохо сходятся к асимптотическим. В случае третьих – распределения статистик зависят от объемов выборок n_i и вид этих распределений неизвестен, а информация о распределениях статистик оказывается представленной лишь краткой таблицей критических значений для некоторых n_i.

В полном объеме этапы описанной методики реализованы в программной системе статистического анализа [17].

На первом этапе в рамках системы [17] проверить гипотезы о принадлежности анализируемых выборок и/или объединенной выборки нормальным законам распределения можно, используя 10 непараметрических критериев согласия [2], критерии согласия типа χ^2 Пирсона и Никулина – Рао – Робсона [3], а также почти 40 специальных критериев, ориентированных только на проверку нормальности [4].

На втором этапе при идентификации параметрической модели закона, хорошо согласующейся с выборкой, объединяющей все сравниваемые выборки, можно опереться на непараметрические критерии согласия и критерии согласия типа χ^2. В программной системе [17] для описания законов наблюдаемых случайных величин встроена возможность выбора модели из множества, представляющего собой совокупность более чем 30 параметрических моделей законов. В системе предусмотрена также возможность построения моделей в виде смесей законов. Поэтому всегда можно подобрать модель, отвечающую требуемым качествам.

Более подробно третий этап методики применения параметрических критериев однородности дисперсий, в том числе в условиях нарушения стандартного предположения о принадлежности выборок нормальному закону, рассмотрим на примере его реализации в программной системе [17]. Применение критериев определяется следующим порядком действий (рис. 3).

1. В меню «Действия» главного окна системы [17] выбирается «Проверка однородности дисперсий».

2. В окне «Однородность дисперсий» последовательно выполняются следующие действия:

– загружается множество анализируемых выборок;

– указывается, относительно каких выборок будет проверяться гипотеза об однородности дисперсий.

3. Указывается, с использованием каких критериев будет проверяться эта гипотеза.

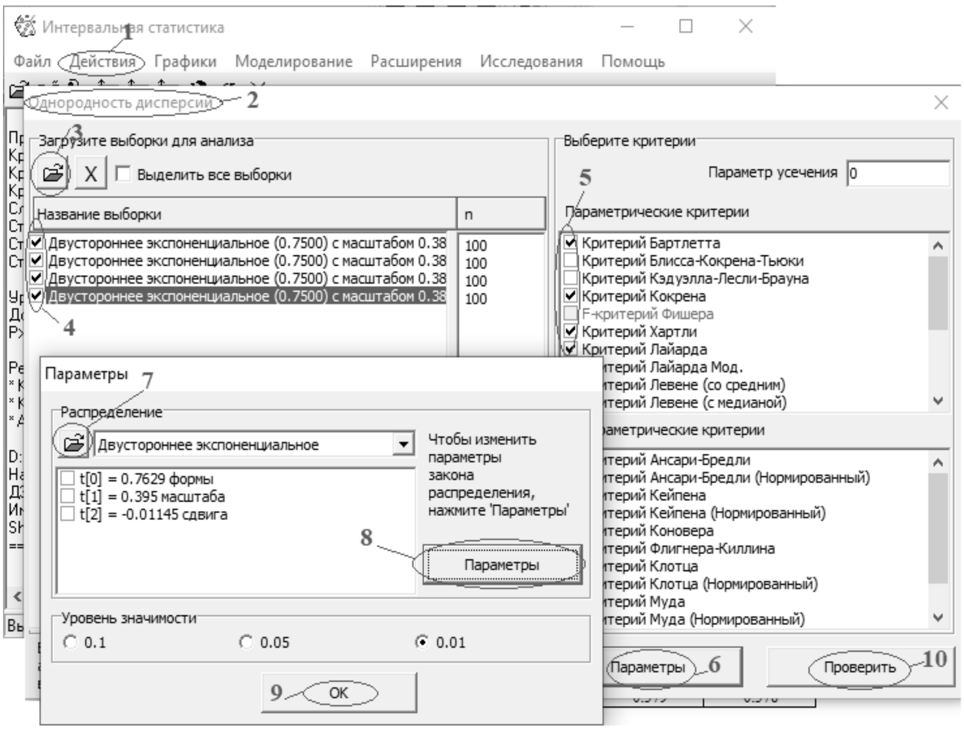


Рис. 3. Последовательность действий при использовании критериев однородности дисперсий в программной системе [17] в условиях нарушения стандартного предположения о принадлежности выборок нормальным законам

Fig. 3. The sequence of actions when using the criteria of homogeneity of variances in the software system [17] under conditions of violation of the standard assumption of the samples belonging to normal laws

4. Если на 1-м этапе методики применения гипотеза о принадлежности анализируемых выборок нормальным законам не была отклонена, то сразу переходим к п. 8 «Проверить». В этом случае проверка по умолчанию осуществляется в условиях принадлежности выборок нормальным законам. В противном случае выбираются «Параметры».

5. В открывшемся окне загружается перечень законов распределения и выбирается тот, который на 2-м этапе реализуемой методики оказался хорошей моделью для объединенной выборки.

6. Задаются параметры этого закона.

7. Закрывается окно «Параметры».

8. Выбирается «Проверить».

9. В открывшемся окне «Результаты проверки гипотезы» (рис. 4) выбираем «Инструменты», а в открывшемся окне «Параметры моделирования» задаем число экспериментов методом Монте-Карло и число потоков для распараллеливания процесса моделирования. Если анализируемым выборкам соответствуют различные ошибки округления Δ_i, $i=\overline{1,k}$, то их можно задать, указав «Использовать преобразование».

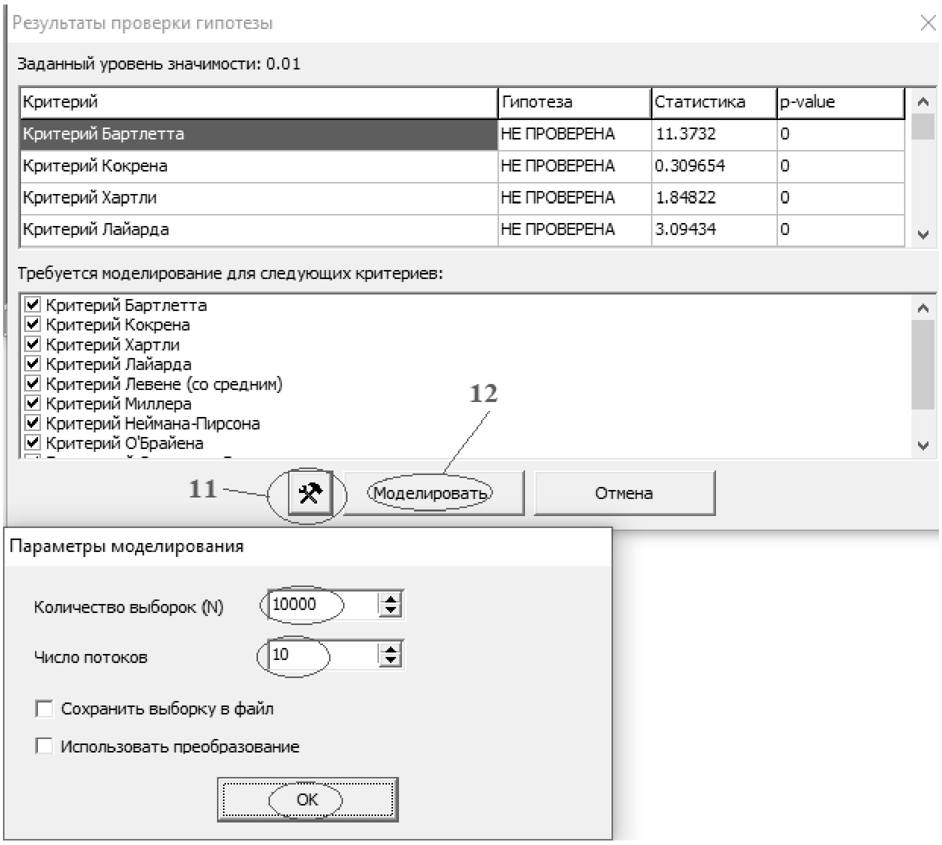
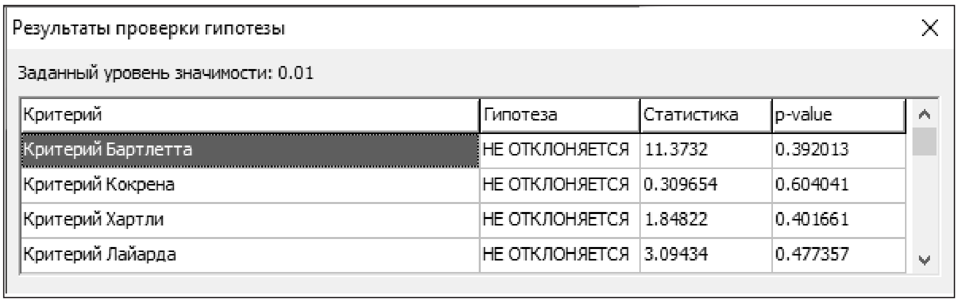


Рис. 4. Задание параметров моделирования при вычислении оценок достигнутых уровней значимости P_v по применяемым критериям

Fig. 4. Setting the simulating parameters when calculating the estimates of the achieved significance levels P_v according to the applied criteria

10. Закрываем окно «Параметры моделирования» и запускаем процесс моделирования.

Полученные в результате моделирования оценки P_v по соответствующим критериям выдаются в окне «Результаты проверки гипотезы» (рис. 5).


Результаты проверки гипотезы

Заданный уровень значимости: 0.01

Критерий	Гипотеза	Статистика	p-value
Критерий Бартлетта	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	11.3732	0.392013
Критерий Кокрена	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	0.309654	0.604041
Критерий Хартли	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	1.84822	0.401661
Критерий Лайарда	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	3.09434	0.477357

Рис. 5. Оценки достигнутых уровней значимости P_v по применяемым критериям, полученные в результате моделирования

Fig. 5. Estimates of the achieved significance levels P_v according to the applied criteria, obtained as a result of simulating

Рассмотрим два демонстрационных примера с использованием рассмотренной методики в рамках программной системы статистического анализа [17]. Примеры затрагивают применение параметрических критериев однородности дисперсий как в условиях выполнения стандартного предположения о нормальности анализируемых выборок, так и применение в условиях нарушения этого предположения. Примеры касаются использования k-выборочных критериев в ситуации справедливости проверяемой гипотезы H_0 о равенстве дисперсий.

Пример 1. В соответствии с законом семейства (13) с параметрами формы $\theta_2 = 0{,}75$, масштаба $\theta_1 = 0{,}38578$ и сдвига $\theta_0 = 0$ были смоделированы четыре выборки, каждая объемом $n_i = 100$. При таком законе каждой выборке соответствует дисперсия $\sigma_i^2 = 1$. Эмпирические распределения, соответствующие этим выборкам, приведены на рис. 6.

Вычисленные значения статистик применяемых критериев, полученные при проверке гипотезы о равенстве дисперсий этих четырех выборок, приведены во втором столбце табл. 2.

Достигнутые уровни значимости P_{v_norm}, полученные в предположении о принадлежности выборок нормальному закону в результате интерактивного моделирования при числе экспериментов метода Монте-Карло $N = 10^6$, приведены в третьем столбце табл. 2.

В данном случае известен закон распределения, которому подчиняются выборки, так как именно в соответствии с ним моделировались выборки. Достигнутые уровни значимости P_v, полученные в результате интерактивного моделирования в условиях принадлежности выборок этому закону с тем же числом экспериментов, приведены в четвертом столбце табл. 2.

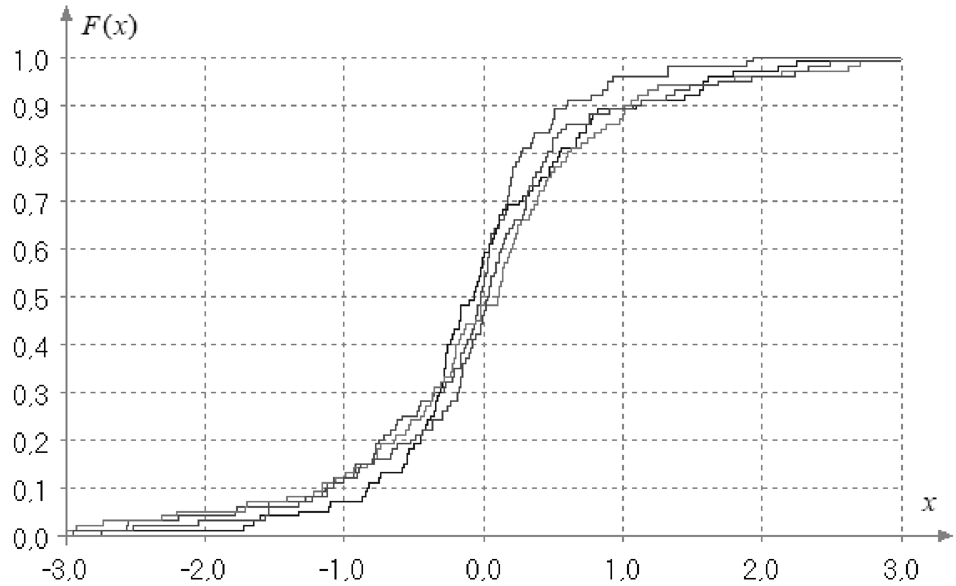


Рис. 6. Эмпирические распределения четырех выборок, смоделированных в соответствии с обобщенным нормальным законом с параметрами формы $\theta_2 = 0,75$, масштаба $\theta_1 = 0,38578$ и сдвига $\theta_0 = 0,0$

Fig. 6. Empirical distributions of four samples simulated according to a generalized normal law with shape $\theta_2 = 0,75$, scale $\theta_1 = 0,38578$, and shift $\theta_0 = 0,0$ parameters

Допустим, закон распределения неизвестен. Проверка принадлежности данных четырех выборок нормальным законам по ряду критериев согласия во всех случаях привела к отклонению гипотезы о нормальности.

В процессе идентификации закона, хорошо согласующегося с объединенной выборкой, остановились на законе семейства (13) с параметрами формы $\theta_2 = 0,7629$, масштаба $\theta_1 = 0,3950$ и сдвига $\theta_0 = -0,01145$. Достигнутые уровни значимости P_{v_real}, полученные в результате моделирования в предположении о принадлежности выборок этому закону, приведены в пятом столбце таблицы.

Так как в табл. 2 для большинства критериев $P_{v\_real} > P_{v\_norm}$, то можно говорить о том, что в нестандартной ситуации данного примера (в случае $\theta_2 < 2$) использование классических результатов, касающихся применяемых критериев и имеющих место в предположении о нормальности, приводит к увеличению ошибок 1-го рода. Для критерия Кокрена этот вывод подтверждается поведением распределения его статистики, показанным на рис. 2.

Пример 2. В данном случае четыре выборки объемом $n_i = 100$ с дисперсией $\sigma_i^2 = 1$ также были смоделированы в соответствии с семейством (13), но с другими параметрами: формы $\theta_2 = 10$, масштаба $\theta_1 = 0,783285$ и сдвига $\theta_0 = 0$. Эмпирические распределения этих выборок приведены на рис. 7.

Таблица 2

Table 2

Результаты проверки гипотезы об однородности дисперсий при $n_i = 100$, справедливости гипотезы H_0, $k = 4$ в случае принадлежности выборок семейству (13) при значении параметра формы $\theta_2 = 0,75$

Results of testing the hypothesis of homogeneity of variances for $n_i = 100$, the validity of the hypothesis H_0, $k = 4$ in the case of samples belonging to the family (13) with the value of the shape parameter $\theta_2 = 0,75$

Критерий	Статистика	P_{v_norm}	P_v	P_{v_real}
1	2	3	4	5
Кокрена	0,3097	0,123	0,614	0,604
Бартлетта	11,373	0,010	0,406	0,392
Хартли	1,8482	0,013	0,415	0,402
Неймана – Пирсона	1,0293	0,010	0,406	0,392
Z-критерий ОВ	3,7069	0,011	0,415	0,401
Лайарда	3,0943	0,397	0,480	0,477
Миллера	0,8984	0,433	0,486	0,484
О`Брайена	0,7203	0,544	0,572	0,571
Модиф. Z-критерий ОВ	0,6270	0,575	0,529	0,528
Левене	1,0871	0,358	0,379	0,378

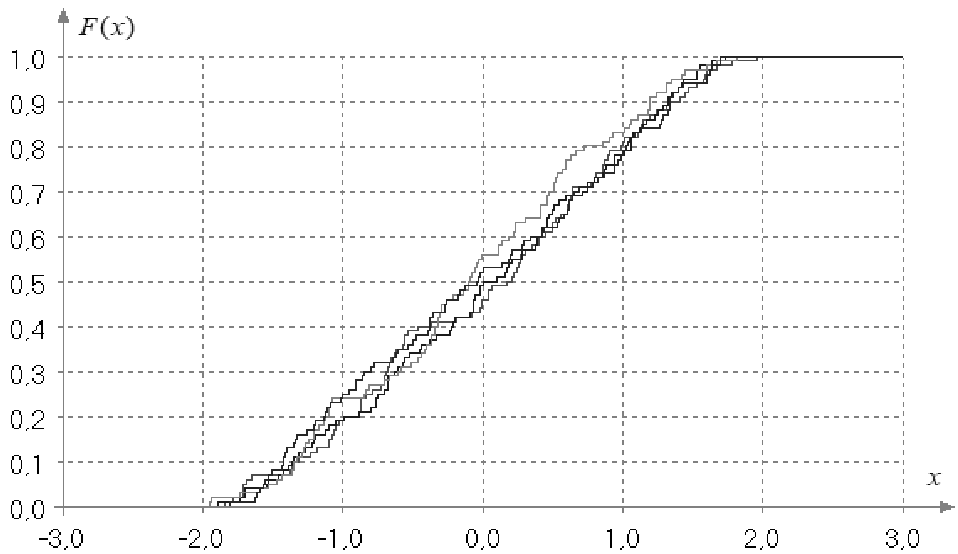


Рис. 7. Эмпирические распределения четырех выборок, смоделированных в соответствии с обобщенным нормальным законом с параметрами формы $\theta_2 = 10$, масштаба $\theta_1 = 0,783285$ и сдвига $\theta_0 = 0,0$

Fig. 7. Empirical distributions of four samples simulated according to a generalized normal law with shape $\theta_2 = 10$, scale $\theta_1 = 0,783285$, and shift $\theta_0 = 0,0$ parameters

В данном случае объединенная выборка также хорошо описывается законом семейства (13) с параметрами формы $\theta_2 = 9{,}5272,$ масштаба $\theta_1 = 1{,}75549$ и сдвига $\theta_0 = -0{,}3257.$

Аналогично предшествующему примеру по всем критериям однородности дисперсий получены значения статистик и достигнутые уровни значимости P_{v_norm}, P_v, P_{v_real}, которые представлены в табл. 3.

Таблица 3

Table 3

Результаты проверки гипотезы об однородности дисперсий при $n_i = 100,$ справедливости гипотезы H_0, $k = 4$ в случае принадлежности выборок семейству (13) при значении параметра формы $\theta_2 = 10$

Results of testing the hypothesis of homogeneity of variances for $n_i = 100,$ the validity of the hypothesis H_0, $k = 4$ in the case of samples belonging to the family (13) with the value of the shape parameter $\theta_2 = 10$

Критерий	Статистика	P_{v_norm}	P_v	P_{v_real}
1	2	3	4	5
Кокрена	0,2743	0,739	0,457	0,460
Бартлетта	1,0440	0,790	0,507	0,510
Хартли	1,2181	0,761	0,461	0,464
Неймана – Пирсона	1,0026	0,790	0,507	0,510
Z-критерий ОВ	0,3513	0,790	0,507	0,510
Лайарда	2,3332	0,524	0,505	0,505
Миллера	0,7415	0,519	0,509	0,509
О`Брайена	0,7739	0,513	0,503	0,503
Модиф. *Z*-критерий ОВ	0,7153	0,519	0,506	0,507
Левене	1,1080	0,350	0,348	0,348

Как можно судить по выполнению неравенства $P_{v\_real} < P_{v\_norm}$, использование при проверке в критериях классических результатов при $\theta_2 > 2$ приводит к увеличению вероятности ошибок 2-го рода. Это согласуется с картиной, представленной на рис. 2 для распределений статистики критерия Кокрена в случае принадлежности выборок различным законам семейства (13).

В табл. 4 представлены полученные оценки мощности критериев при объемах выборок $n_i = 100,$ когда при проверяемой гипотезе H_0 все $\sigma_i = 1,$ $i = \overline{1,4}.$ При конкурирующей гипотезе H_1 равные дисперсии имеют только первые три выборки, т. е. $\sigma_i = 1,$ $i = \overline{1,3}$, а в случае четвертой выборки $\sigma_4 = 1{,}1\sigma_1$.

Таблица 4

Table 4

Оценки мощности критериев однородности дисперсий при α = 0,1, k = 4, $n_i = 100$ относительно конкурирующей гипотезы $H_1:\ \sigma_4 = 1{,}1\sigma_1$ в случае принадлежности выборок семейству (13)

Estimates of the power of the homogeneity of variances tests α = 0,1, k = 4, $n_i = 100$ relative to the competing hypothesis $H_1:\ \sigma_4 = 1{,}1\sigma_1$ in the case of samples belonging to the family (13)

Критерий	Семейство распределений (13)		
	$\theta_2 = 0,75$	$\theta_2 = 2$	$\theta_2 = 10$
Кокрена	0,127	0,246	0,446
Бартлетта	0,131	0,233	0,397
Хартли	0,130	0,228	0,390
Неймана – Пирсона	0,131	0,233	0,397
Z-критерий ОВ	0,131	0,235	0,400
Лайарда	0,132	0,226	0,393
Миллера	0,130	0,226	0,395
О`Брайена	0,136	0,236	0,404
Модиф. *Z*-критерий ОВ	0,132	0,231	0,403
Левене	0,148	0,217	0,290

Приведенные примеры демонстрируют возможность применения параметрических критериев однородности дисперсий как в условиях стандартного предположения о нормальности, так и в условиях его нарушения, что обеспечивает корректность статистических выводов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение некоторых параметрических критериев проверки однородности дисперсий даже в условиях принадлежности выборок нормальным законам связано с определенными проблемами. Реальные распределения статистик одних критериев отличаются от указанных асимптотических распределений, распределения статистик других критериев плохо сходятся к асимптотическим, распределения статистик третьих зависят от объемов выборок и представлены лишь краткими таблицами критических значений. Очевидно, что это отражается на качестве формируемых статистических выводов.

При нарушении предположения о нормальности распределения статистик параметрических критериев, как правило, сильно изменяются, что исключает возможность использования классических результатов даже в случае так называемых устойчивых критериев.

В то же время лучшие параметрические критерии обладают заметным преимуществом в мощности по сравнению с непараметрическими критериями, и это, как правило, сохраняется в нестандартных условиях реальных приложений.

Рассмотренная методика, предусматривающая идентификацию закона, описывающего объединенную выборку, и последующее использование найденной модели закона при имитационном моделировании, нацеленном на определение реальных распределений статистик (и оценку P_v) для применяемых критериев, позволяет обеспечить корректность статистических выводов в нестандартных условиях различных приложений.

Таким образом, в работе показана и реализована возможность корректного применения параметрических критериев однородности дисперсий в ситуации нарушения стандартного предположения о принадлежности выборок нормальным законам распределения. Программная система [17], обеспечивающая такие возможности, находится в открытом доступе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Инфра-М, 2021. – 248 с. – (Научная мысль). – DOI: 10.12737/986695.

2. *Лемешко Б.Ю.* Непараметрические критерии согласия. Руководство по применению. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Инфра-М, 2024. – 201 с. – (Научная мысль). – DOI: 10.12737/2058731.

3. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с.

4. *Лемешко Б.Ю.*, *Попов А.А., Селезнев В.А.* Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Инфра-М, 2023. – 353 с. – (Научная мысль). – DOI: 10.12737/1896110.

5. *Гаек Я.*, *Шидак З.* Теория ранговых критериев. – М.: Наука, 1971. – 376 с.

6. *Лемешко Б.Ю.*, *Лемешко С.Б.*, *Горбунова А.А.* О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. 2. Непараметрические критерии // Измерительная техника. – 2010. – № 5. – С. 11–18.

7. *Bartlett M.S.* Properties of sufficiency and statistical tests // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1937. – Vol. 160 (901). – P. 268–287. – DOI: 10.1098/rspa.1937.0109.

8. *Cochran W.G.* The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total // Annals of Eugenics. – 1941. – Vol. 11. – P. 47–52.

9. *Hartley H.O.* The maximum F-ratio as a short-cut test of heterogeneity of variance // Biometrika. – 1950. – Vol. 37. – P. 308–312.

10. *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.

11. *O'Brien R.G.* Robust techniques for testing heterogeneity of variance effects in factorial designs // Psychometrika. – 1978. – Vol. 43 (3). – P. 327–342.

12. *Overall J.E., Woodward J.A.* A simple test for heterogeneity of variance in complex factorial design // Psychometrika. – 1974. – Vol. 39 (3). – P. 311–318.

13. *Overall J.E., Woodward J.A.* A robust and powerful test for heterogeneity of variance. – University of Texas Medical Branch Psychometric Laboratory, 1976.

14. *Layard M.W.J.* Robust large-sample tests for homogeneity of variances // Journal of the American Statistical Association. – 1973. – Vol. 68. – P. 195–198.

15. *Miller R.G.* Jackknifing variances // The Annals of Mathematical Statistics. – 1968. – Vol. 39. – P. 567–582.

16. *Levene H.* Robust tests for equality of variances // Contributions to Probability and Statistics: Essays in Honor of Harold Hotelling. – Stanford, Calif.: University Press, 1960. – P. 278–292.

17. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин «Интервальная статистика 5.4»: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018666213 / Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Блинов П.Ю., Веретельникова И.В., Новикова А.Ю. – Заявка № 2018663206; заявл. 22.11.2018; зарег. 13.12.2018. – URL: https://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm (дата обращения: 16.11.2024).

Лемешко Борис Юрьевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – компьютерные технологии исследования статистических и вероятностных закономерностей. Имеет более 400 печатных работ, в том числе 20 монографий и учебных пособий. E-mail: lemeshko@ami.nstu.ru

Лемешко Станислав Борисович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Центра статистических технологий Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – компьютерные технологии моделирования и исследования статистических закономерностей. Имеет 69 печатных работ, в том числе одну монографию. E-mail: skyer@mail.ru

Лоточ Евгений Юрьевич, аспирант Новосибирского государственного технического университета. E-mail: lotoch3@yandex.ru

Lemeshko Boris Yu., D.Sc. (Eng,), Professor, Professor of the Department of Theoretical and Applied Informatics, Novosibirsk State Technical University. The main direction of scientific research is computer technologies for the study of statistical and probabilistic laws. Has more than 400 publications, including 20 monographs and textbooks. E-mail: lemeshko@ami.nstu.ru

Lemeshko Stanislav B., PhD (Eng.), senior researcher Center for Statistical Technology, Novosibirsk State Technical University. The main direction of scientific research is computer modeling technologies and research of statistical laws. Has 69 publications, including 1 monograph. E-mail: skyer@mail.ru

Lotoch Evgeny Yu., postgraduate student of the Novosibirsk State Technical University.

DOI: 10.17212/2782-2001-2024-3-55-76

Application of parametric criteria for homogeneity of variances under conditions of standard assumptions violation *

B.Yu. LEMESHKO[a], *S.B. LEMESHKO*[b], *E.Yu. LOTOCH*[c]

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospect, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

[a] *lemeshko@ami.nstu.ru* [b] *skyer@mail.ru* [c] *lotoch3@yandex.ru*

Abstract

When analyzing measurement series in various applications, it becomes necessary to ensure that the scattering characteristics of the measured quantities have not changed over time, or that the accuracy of measurements carried out by different laboratories in similar tests meets the necessary requirements. For these purposes, it is advisable to use various k-sample parametric criteria for testing hypotheses about the homogeneity of variances (about the equality of vari-

* *Received 30 September 2024.*

ances). The prerequisite for the possibility of using parametric criteria is that the analyzed samples belong to normal distribution laws, which is not always the case. When the assumption of normal distribution of statistics is violated, parametric criteria usually change significantly, which excludes the possibility of using classical results when testing hypotheses. The best parametric tests have a significant advantage in power over nonparametric tests. This advantage is usually retained when the standard assumption of normality is violated.

The paper shows how the distributions of parametric test statistics change under conditions of violation of the standard assumption. It is shown that using simulation modeling based on the Monte Carlo method and with appropriate software support, it is possible to find the distributions of the statistics of the applied criteria under non-standard conditions corresponding to specific applications. The use of the results of such modeling makes it possible to make correct statistical conclusions based on the criteria used. The methodology of applying parametric criteria of homogeneity of variances under conditions of violation of the standard assumption is considered. The method involves, at the first stage, testing the hypothesis about the belonging of the analyzed samples to normal laws using a set of special criteria. In case of a negative result, at the second stage a law is selected that describes the combined sample. At the third stage, using the results of the modeling under this law, a conclusion is formed based on the applied criteria. Examples of the implementation of the methodology within the framework of the developed software system are given.

Keywords: normality check, homogeneity tests, tests of homogeneity of variances, nonparametric goodness-of-fit tests, distribution of statistics, round-off errors, achieved significance level, error of the 1st kind, error of the 2nd kind, power of test, simulation

REFERENCES

1. Lemeshko B.Yu. *Kriterii proverki gipotez ob odnorodnosti. Rukovodstvo po primeneniyu* [Criteria for testing hypotheses about uniformity. Application manual]. 2nd ed., rev. Moscow, Infra-M Publ., 2021. 248 p. DOI 10.12737/986695.

2. Lemeshko B.Yu. *Neparametricheskie kriterii soglasiya. Rukovodstvo po primeneniyu* [Nonparametric consent criteria. . Application manual]. 2nd ed., rev. Moscow, Infra-M Publ., 2024. 201 p. DOI: 10.12737/2058731.

3. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Postovalov S.N., Chimitova E.V *Statisticheskii analiz dannykh, modelirovanie i issledovanie veroyatnostnykh zakonomernostei. Komp'yuternyi podkhod* [Statistical data analysis, modeling and study of probabilistic patterns. Computer approach]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2011. 888 p.

4. Lemeshko B.Yu., Popov A.A., Seleznev V.A. *Kriterii proverki otkloneniya raspredeleniya ot normal'nogo zakona. Rukovodstvo po primeneniyu* [Criteria for checking the deviation of the distribution from the normal law. Application Guide]. 2nd ed., rev. Moscow, Infra-M Publ., 2023. 353 p. DOI 10.12737/1896110.

5. Hajek J., Sidak Z. *Teoriya rangovykh kriteriev* [Theory of rank tests]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 376 p. (In Russian).

6. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Gorbunova A.A. Application and power of criteria for testing the homogeneity of variances. Pt. 2. Nonparametric criteria. *Measurement Techniques*, 2010, vol. 53, no. 5, pp. 476–486. DOI: 10.1007/s11018-010-9530-x. Translated from *Izmeritel'naya tekhnika*, 2010, no. 5, pp. 11–18.

7. Bartlett M.S. Properties of sufficiency and statistical tests. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1937, vol. 160 (901), pp. 268–287. DOI: 10.1098/rspa.1937.0109.

8. Cochran W.G. The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total. *Annals of Eugenics*, 1941, vol. 11, pp. 47–52.

9. Hartley H.O. The maximum F-ratio as a short-cut test of heterogeneity of variance. *Biometrika*, 1950, vol. 37, pp. 308–312.

10. Kobzar' A.I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika: dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov* [Applied Mathematical Statistics. For Engineers and Scientists]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 816 p.

11. O'Brien R.G. Robust techniques for testing heterogeneity of variance effects in factorial designs. *Psychometrika*, 1978, vol. 43 (3), pp. 327–342.

12. Overall J.E., Woodward J.A. A simple test for heterogeneity of variance in complex factorial design. *Psychometrika*, 1974, vol. 39 (3), pp. 311–318.

13. Overall J.E., Woodward J.A. *A robust and powerful test for heterogeneity of variance*. University of Texas Medical Branch Psychometric Laboratory, 1976.

14. Layard M.W.J. Robust large-sample tests for homogeneity of variances. *Journal of the American Statistical Association*, 1973, vol. 68, pp. 195–198.

15. Miller R.G. Jackknifing variances. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1968, vol. 39, pp. 567–582.

16. Levene H. Robust tests for equality of variances. *Contributions to Probability and Statistics: Essays in Honor of Harold Hotelling*. Stanford, Calif., University Press, 1960, pp. 278–292.

17. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Blinov P.Yu., Veretel'nikova I.V., Novikova A.Yu. Statisticheskii analiz interval'nykh nablyudenii odnomernykh nepreryvnykh sluchainykh velichin "Interval'naya statistika 5.4" [Statistical analysis of interval observations of one-dimensional continuous random variables "Interval statistics 5.4"]. The certificate on official registration of the computer program. No. 2018666213, 2018. Available at: https://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm (accessed 22.11.2024).

Для цитирования:

Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Лоточ Е.Ю. Применение параметрических критериев однородности дисперсий в условиях нарушения стандартных предположений // Системы анализа и обработки данных. – 2024. – № 3 (95). – С. 55–76. – DOI: 10.17212/2782-2001-2024-3-55-76.

For citation:

Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B. Lotoch E.Yu. Primenenie parametricheskikh kriteriev odnorodnosti dispersii v usloviyakh narusheniya standartnykh predpologenii [Application of parametric criteria for homogeneity of variances under conditions of standard assumptions violation]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2022, no. 3 (95), pp. 55–76. DOI: 10.17212/2782-2001-2024-3-55-76.