НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫХ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Методы принятия оптимальных решений

Методические указания
к лабораторным работам для студентов IV курса ФПМИ
(направление 01.03.02 - "Прикладная математика и
информатика", специальность 02.03.03- "Математическое
обеспечение и администрирование информационных систем"
дневного отделения)

Новосибирск,
2011

Методические указания являются руководством при выполнении лабораторных занятий, проводимых по курсу "Теория игр и исследование операций со студентами (направление 01.03.02 - "Прикладная математика и информатика", специальность 02.03.03 "Математическое обеспечение администрирование информационных систем") терминальном классе. Они охватывают ряд разделов математического программирования, теории игр, исследования операций и могут быть полезны студентам других специальностей.

Составители: д-р техн. наук, проф. Б.Ю. Лемешко,
канд. техн. наук С.Н. Постовалов,
канд. техн. наук Е.В. Чимитова

Работа подготовлена на кафедре прикладной математики

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Исследование операций включает в себя чрезвычайно широкий спектр методов и задач, связанных с необходимостью принятия наиболее оптимального решения. Каждое исследование сопровождается последовательностью выполнения таких этапов, как постановка задачи, построение математической модели, нахождение или разработка метода решения, проверка и корректировка модели, реализация найденного решения на практике.

Лабораторные работы связаны с методами поиска оптимальных решений и охватывают ряд разделов математического программирования. Это одномерные методы поиска, методы минимизации функций многих переменных, метод штрафных функций, статистические методы поиска, решение задач линейного программирования, решение многокритериальных задач, принятие решений в условиях риска и неопределённости, решение матричных игр.

Ряд предлагаемых задач имеют экономическое содержание: оптимизация плана производства; оптимальное инвестирование денежных средств в ценные бумаги; оптимальное поведение контрагентов на рынке. Они охватывают различные разделы экономической теории. Решая такие задачи, студенты получат определенный опыт применения математических методов и алгоритмов на практике.

При выполнении лабораторных работ предусмотрены как использование фрагментов готового программного обеспечения, так и самостоятельная программная реализация конкретных методов и их анализ, что позволяет глубже понять отдельные аспекты алгоритмов.

В зависимости от темы лабораторной работы, доступности соответствующего материала в литературных источниках или полноты его изложения в курсе лекций, в тексте указаний могут присутствовать или отсутствовать сведения об алгоритмах используемых методов. В последнем случае предполагается, что студент может ознакомиться с необходимыми сведениями в литературном источнике, ссылка на который предлагается, или воспользоваться конспектом лекций.

При подготовке отчёта по каждой лабораторной работе основной упор должен быть сделан не на объём проделанной работы и обилие полученных результатов, а на анализ эффективности методов, сравнение их характеристик, определение области предпочтительного использования, на наглядность результатов, подтверждающих выводы по работе, что особенно важно при решении экономических задач. Отчет может быть представлен в электронном виде, но должен содержать всю необходимую информацию.

Лабораторная работа № 1

Решение прикладных задач методами линейного, квадратичного и нелинейного программирования

Цель работы

Ознакомиться с методами решения задач линейного и квадратичного программирования, в том числе транспортных задач.

Методические указания

При решении задач линейного программирования используйте специальное программное обеспечение. Решать задачи линейного программирования можно также в системе Maple. Пример решения задачи линейного программирования в системе Maple:

```
> with(simplex):

> cnsts := {3*x+4*y-3*z <= 23, 5*x-4*y-3*z <= 10, 7*x+4*y+11*z <= 30}:

> obj := -x + y + 2*z:

> maximize(obj,cnsts union {x>=0,y>=0,z>=0});

                    {x = 0, y = 49/8, z = 1/2}
```

При решении транспортной задачи методами линейного программирования и методом потенциалов используйте соответствующее программное обеспечение.

Задача квадратичного программирования представляет собой частный случай задачи нелинейного программирования, когда ограничения линейны, а целевая функция – сумма линейной и квадратичной форм:

$$Q(\bar{x}) = \bar{p}^{\mathrm{T}}\bar{x} + \bar{x}^{\mathrm{T}}C\bar{x} \to \min$$

при

$$q_j(\bar{x}) = a_j^{\mathrm{T}}\bar{x} - b_j \le 0, \quad j = \overline{1,m},$$

$$\bar{x} \ge \bar{0},$$

где C - положительно полуопределенная матрица.

В отличие от линейных задач, где решение находится в угловой точке многогранника, в квадратичных оптимальная точка может быть на ограничении, где нормаль к гиперплоскости ограничения совпадает с направлением градиента, а может находиться внутри допустимой области.

Задача квадратичного программирования может быть записана в следующем виде:

$$\min\left\{\bar{p}^{\mathrm{T}}\bar{x}+\bar{x}^{\mathrm{T}}C\bar{x}\;\middle|\;A\bar{x}\le\bar{b},\;\bar{x}\ge\bar{0}\right\}.$$

Методы решения задач квадратичного программирования опираются на условие Куна-Такера. Основными являются: Метод Франка и Вулфа; Метод Баранкина и Дорфмана; Метод Била; Метод Тейла и Ван Де Панна.

Порядок выполнения работы

1. В соответствии с вариантом задания сформулировать математическую постановку задачи.
2. Выбрать метод решения задачи.
3. Решить задачу, используя соответствующее программное обеспечение.
4. Дать смысловую интерпретацию полученного решения.

Варианты заданий

1. Плановое задание по изготовлению 4 видов костюмов необходимо распределить между 3 швейными фабриками. Производственные мощности i-й фабрики ($i=1,2,3$) позволяют за рассматриваемый период времени выпустить r_{ij} костюмов j-й модели ($j=1,2,3,4$). При этом, если все производственные мощности фабрики идут на производство костюмов одного типа, то костюмы других видов производиться не могут. Заданы цены c_j на костюм j-й модели и себестоимости s_{ij} изготовления j-й модели на i-й фабрике.

$$R=\begin{bmatrix}20 & 240 & 300 & 150\\ 240 & 300 & 200 & 300\\ 150 & 240 & 300 & 200\end{bmatrix},$$

$$S=\begin{bmatrix}400 & 400 & 500 & 200\\ 250 & 300 & 250 & 400\\ 400 & 500 & 400 & 300\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}500 & 650 & 800 & 500\end{bmatrix}.$$

Плановое задание (180, 150, 100, 100).

Опираясь на эти данные решить следующие задачи.

а. Составить оптимальный план загрузки фабрик из условия минимизации себестоимости плановой продукции.

б. Составить оптимальный план загрузки из условия максимизации прибыли при точном выполнении планового задания.

в. То же, при допустимости перевыполнения планового задания.

г. Составить оптимальный план загрузки фабрик, обеспечивающий максимальное количество комплектов костюмов, если числа планового задания рассматривать как ассортиментные отношения.
д. Составить и решить двойственную задачу к задаче а.

2. Три вида деталей можно производить на станках разных типов без переналадки.

Мощность станков, ограничение на рабочее время и себестоимость в рублях одной детали каждого вида указаны в таблице:

Вид деталей	Производительность станков (деталей в час)		Себестоимость деталей
	1 тип	2 тип	
1	20	45	8
2	30	20	6
3	50	60	0,5

Фонд рабочего времени для станков составляет соответственно 12 и 8 часов.
а. Как нужно распределить рабочее время станков в целях получения минимальной себестоимости, если плану положено за рабочий день выпустить не менее 160 деталей 1-го вида и 120 деталей 2-го и не менее 240 3-го вида?
б. Предприятию предложили увеличить план производства или деталей 1-го вида до 180 штук или 3-го вида до 285 штук. Какое экономически выгодное решение следует принять руководству и почему?
в. В силу экономической необходимости на станках 2-го типа нужно выпустить не менее 30 деталей 1-го вида и 50 деталей 3-го вида. Произойдет ли изменение минимума себестоимости в этих условиях?
г. Можно ли выполнить первоначальный план, не увеличивая себестоимости продукции, если фонд рабочего времени 1-го станка снизить до 10 часов?
д. Составить и решить двойственную задачу к задаче а.

3. Нефтеперерабатывающий завод получает 4 различных полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин А 2:3:5:2, бензин Б - 3:1:2:1 и бензин С - 2:2:1:3.

Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина характеризуется числами 12000 руб., 10000 руб., 15000 руб.

По этим исходным данным решить следующие задачи:

а. Определить план смешения компонентов, при котором будет достигнута максимальная стоимость всей продукции.
б. Определить оптимальный план смешения из условия максимального использования компонентов.
в. Составить и решить двойственную задачу к задаче а.

4. Полуфабрикаты поступают на предприятие в виде листов фанеры. Всего имеется две партии материала, причем первая партия содержит 400 листов, а вторая 250 листов фанеры. Из поступающих листов фанеры необходимо изготовить комплекты, включающие 4 детали 1-го типа, 3 детали 2-го типа и 2 детали 3-го типа. Лист фанеры каждой партии может раскраиваться различными способами.

Количество деталей каждого типа, которое получается при раскрое одного листа соответствующей партии по тому или иному способу раскроя, представлено в таблице.

Таблица 2

Исходные данные

Детали	Способ раскроя (1 п)			Детали	Способ раскроя (2 п)	
	1	2	3		1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Требуется раскроить материал так, чтобы обеспечить изготовление максимального количества комплектов. Составить и решить двойственную задачу.

5. На фабрике производится продукты двух типов. Для производства используются станки трех типов, два типа сырья, квалифицированная и неквалифицированная рабочая сила.

Сырье. Для производства одной единицы первого продукта требуется одна единица сырья первого типа и семь единиц сырья второго типа. Для производства одной единицы второго продукта требуется три единицы сырья первого типа и пять единиц сырья второго типа.

Станки. Станок первого типа имеет ресурс мощности $3\cdot10^6$, второго типа – $1\cdot10^6$, третьего типа – $3\cdot10^5$. При производстве первого продукта используется 0.5 единиц ресурса мощности станка первого типа, 0.2 единицы ресурса мощности станка второго типа и 0.025 единиц ресурса мощности станка третьего типа. При производстве второго продукта используется 2 единицы ресурса мощности станка первого типа, 0.5 единиц ресурса мощности станка второго типа и 0.1 единица ресурса мощности станка третьего типа.

Персонал. Бригада из одного квалифицированного рабочего и восьми неквалифированных рабочих может выпустить $1.5 \cdot 10^5$ единиц первого продукта. Бригада из двух квалифицированных рабочих и 11-ти неквалифированных рабочих может выпустить $4 \cdot 10^4$ единиц второго продукта.

Стоимость одной единицы сырья первого типа 1 руб., второго типа – 0.15 руб. Стоимость одного станка первого типа $8 \cdot 10^6$ руб., станка второго типа – $7 \cdot 10^6$ руб., станка третьего типа – $9 \cdot 10^6$ руб. Амортизационные отчисления составляют 5 % от стоимости станка. Заработная плата квалифицированных рабочих $6.25 \cdot 10^3$ руб., неквалифицированных – $4 \cdot 10^3$ руб.

Цена первого продукта составляет 3.5 руб., второго – 12.5 руб.

Считается, что имеется неограниченное количество сырья. В наличии имеется 5 станков первого типа, 5 – второго типа, 3 – третьего типа. Максимальное число квалифицированных рабочих – 360, неквалифицированных – 2500. Платежеспособный спрос на первый продукт составляет $2.2 \cdot 10^7$ руб., на второй продукт – $2.7 \cdot 10^7$ руб.

Плановое задание: $1.25 \cdot 10^7$ единиц первого продукта и $4 \cdot 10^6$ единиц второго продукта.

По этим исходным данным решить следующие задачи:

а. Вычислить себестоимость плановой продукции и объем необходимых ресурсов.
б. Определить оптимальный план выпуска продукции из условия максимальной стоимости продукции.
в. Определить оптимальный план выпуска продукции из условия максимальной прибыли.
г. Составить и решить двойственную задачу к задаче б.

6. Четыре нефтеперерабатывающих завода с ежедневной производительностью 4, 6, 10 и 10 млн. тонн бензина снабжают пять бензохранилищ, ежедневная потребность которых составляет 7, 7, 7, 7 и 2 млн. тонн бензина соответственно. Стоимость транспортировки составляет 0.3 руб. за 1000 тонн на один км между заводами и хранилищами.

Заводы	Хранилища					Объем
	1	2	3	4	5	
1	160	300	170	100	160	4
2	300	270	260	90	230	6
3	130	40	220	30	100	10
4	30	100	50	40	240	10
Вместимость хранилища	7	7	7	7	2	30

Найти оптимальную схему транспортировки бензина.
Решить задачу
а) методом потенциалов;
б) симплекс-методом.

7. 4 распределительных центра поставляют автомобили пяти дилерам. Автомобили от распределительных центров к дилерам перевозятся на трейлерах, и стоимость перевозки пропорциональна расстоянию между пунктами отправления и назначения и не зависят от степени загрузки трейлера. В таблице приведены расстояния между распределительными центрами и дилерами, а также соответствующие величины спроса и предложения, выраженные в количествах автомобилей. При полной загрузке трейлер вмещает 18 автомобилей. Транспортные расходы составляют 25 рублей за один км пути, пройденного трейлером.

Центры	Дилеры					Предложения
	1	2	3	4	5	
1	100	150	200	140	35	240
2	50	70	60	65	80	120
3	40	90	100	150	130	180
4	170	50	110	230	100	160
Спрос	110	130	260	100	100	700

Найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные издержки.
Решить задачу
а) методом потенциалов;
б) симплекс-методом.

8. 4 пекарни осуществляют ежедневные поставки хлеба для пяти магазинов. В таблице представлена информация о спросе на продукцию, ее наличии и транспортных издержках:

Пекарни	Транспортные издержки, руб./кг					Предложение
	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	4-й магазин	5-й магазин	
A	0,9	1,7	2,9	2,8	0,8	200
B	1,3	2,1	2,7	1,6	2,9	300
C	2,0	3,0	2,4	0,7	2,6	200
D	1,1	1,9	3,0	0,6	0,2	200
Потребность магазинов	100	200	150	100	300	850 / 900

Требуется найти распределение поставок из каждой пекарни в магазины, минимизирующие общие транспортные издержки.

9. 4 лесозаготовочных предприятия осуществляют поставки леса пяти деревообрабатывающим заводам. Стоимость перевозки из пунктов отправления в пункты назначения, а также соответствующие величины спроса и предложения, выраженные в куб. м приведены в следующей таблице.

Лесозагот. предприятия	Деревообрабатывающие заводы					Предложения
	1	2	3	4	5	
1	160	300	170	100	160	700
2	300	270	260	90	230	650
3	130	40	220	30	100	700
4	30	100	50	40	240	520
Спрос	400	500	350	900	420	2570

Найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные издержки.
Решить задачу
а) методом потенциалов;
б) симплекс-методом.

10. 4 фермерских хозяйства осуществляют поставки зерна пяти мелькомбинатам. Стоимость перевозки из пунктов отправления в пункты назначения, а также соответствующие величины спроса и предложения, выраженные тоннах приведены в следующей таблице.

Фермерские хозяйства	Мелькомбинаты					Предложения
	1	2	3	4	5	
1	8	17	29	28	8	22
2	13	21	17	16	29	13
3	20	25	24	7	24	17
4	11	19	30	6	2	18
Спрос	3	13	7	7	40	70

Найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные издержки.
Решить задачу
а) методом потенциалов;
б) симплекс-методом.

11. Сотовая компания собирается строить новую базовую станцию в области, где имеется 10 населенных пунктов с координатами X и Y. Уровень сигнала от базовой станции уменьшается пропорционально квадрату расстояния до населенного пункта.

Населенный пункт	X	Y	Число жителей
1	10	15	52
2	3	6	104
3	5	25	30000
4	17	4	110
5	9	10	26
6	15	7	315
7	6	18	754
8	1	3	1267
9	12	8	1999
10	18	4	516

Требуется:
1. Определить координаты базовой станции из условия минимума суммы квадратов расстояний до населенных пунктов.
2. Определить координаты базовой станции из условия минимума взвешенной суммы квадратов расстояний до населенных пунктов с учетом числа жителей в каждом населенном пункте.
3. Определить количество и координаты базовых станций из условия минимума взвешенной суммы квадратов расстояний до населенных

пунктов с учетом числа жителей в каждом населенном пункте, чтобы в окрестности каждого населенного пункта находилось не менее одной базовой станции на расстоянии не более 5 километров.

Содержание отчета

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; задание; математическую постановку задачи, результаты ее решения различными методами, выводы об эффективности различных методов решения задачи, а также выводы по результатам решения.

Контрольные вопросы

1. Прямая и двойственная задачи линейного программирования.
2. Теоремы двойственности.
3. Метод последовательного улучшения плана.
4. Метод последовательного уточнения оценок.
5. Методы определения опорного плана транспортной задачи.
6. Условия оптимальности опорного плана.
7. Метод потенциалов.
8. Определение опорного плана в транспортной задаче с ограничениями.
9. Условия Куна-Такера для задачи квадратичного программирования.
10. Методы решения задач нелинейного программирования

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Сложность задания (максимальное количество баллов)	11	9	10	11	12	9	10	9	9	9	12

Лабораторная работа № 2

Многокритериальные задачи линейного и нелинейного программирования

Цель работы

Исследование многокритериальных задач линейного и нелинейного программирования при различных компромиссных критериях [5].

Методические указания

Основная трудность принятия решений в условиях определенности связана с наличием нескольких критериев. В этом случае возникает необходимость в формировании некоторого компромиссного векторного критерия.

Пусть имеется совокупность критериев:

$$F_1(\bar{x}), F_2(\bar{x}), \ldots, F_n(\bar{x}),$$

которые необходимо максимизировать, и $\bar{x}$ принадлежит допустимой области X.

Если все критерии измеряются в одной шкале, то компромиссный критерий можно записать в виде взвешенной суммы критериев:

$$F_0(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i F_i(\bar{x}), \tag{2.1}$$

где w_i – вес соответствующего критерия. В этом случае необходимо найти

$$\max_{x \in X} F_0(\bar{x}) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} w_i F_i(\bar{x}). \tag{2.2}$$

Если же критерии измеряются в различных шкалах, то необходимо привести их к единой шкале. Для этого критерий может быть сформирован в следующем виде:

$$\min_{x \in X} F_0(\bar{x}) = \min_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{F_i^{\max} - F_i(\bar{x})}{\left|F_i^{\max}\right|}, \tag{2.3}$$

где $F_i^{\max} = \max\limits_{x \in X} F_i(\bar{x})$ и $F_i^{\max} \neq 0$. В этом случае требуется минимизировать величину отклонения каждого критерия от его оптимального значения. При таком формировании обобщенного критерия можно добиться высоких показателей по одним критериям за счет ухудшения показателей по другим.

На некоторые частные критерии могут быть наложены ограничения

$$F_i(\bar{x}) \geq F_{i\,доп}. \tag{2.4}$$

Тогда исходная многокритериальная задача может быть преобразована к виду (2.1) или (2.3) с дополнением системы ограничением вида (2.4).

Решение многокритериальных задач зависит от выбора весовых коэффициентов. Для лица, принимающего решения, важно уметь не только решать многокритериальные задачи, но и сравнивать полученные решения между собой с целью выделения наиболее оптимальных. Одним из критериев сравнения может быть критерий Парето.

Решение называется оптимальным по *Парето*, если не существует никакого другого решения, улучшающего значение одного из критериев и неухудшающего значения остальных критериев. Так как Парето-оптимальное решение может быть не единственным, то возникает понятие Парето-оптимального множества решений.

При определении Парето-оптимального множества полезно изобразить на графике изменения допустимых значений критериев. Так, в одномерном случае, когда критерии зависят от одной переменной (см. рис. 2.1), Парето-оптимальное множество состоит из одной точки, соответствующей максимальным значениям критериев, а на рис. 2.2. Парето-оптимальным является все множество решений.

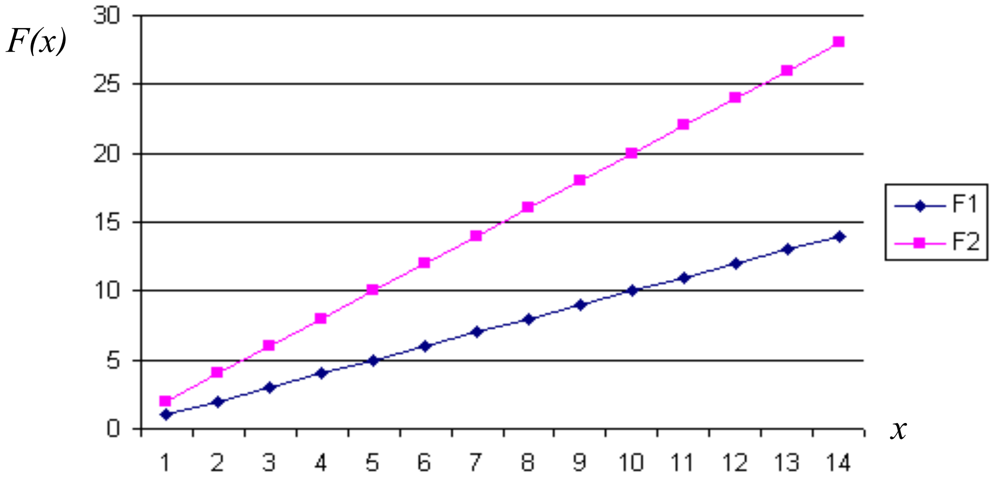

Рис. 2.1. Значения критериев F1 и F2
(Парето-оптимальное множество – одна точка)

F(x)

x

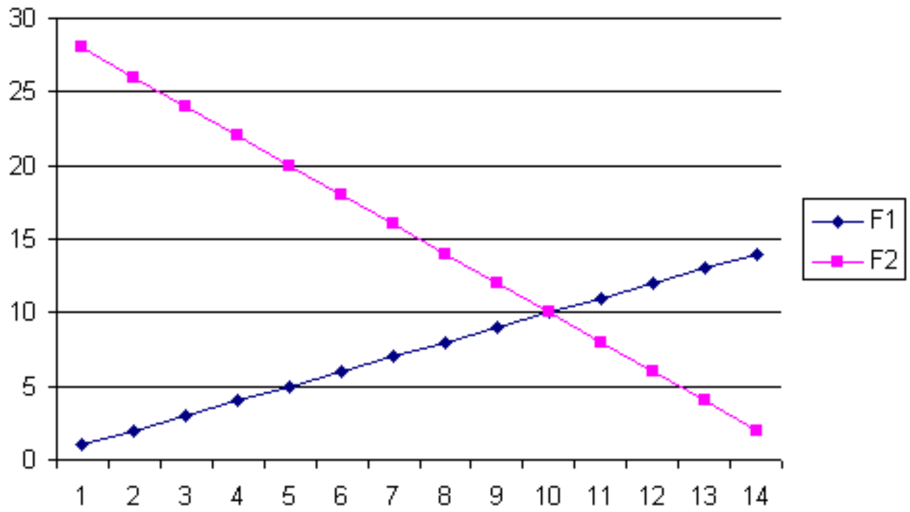

Рис. 2.2. Значения критериев F1 и F2
(Парето-оптимальное множество – все возможные решения)

В случае, когда критерии зависят более, чем от одной переменной удобно изобразить множество значений критериев в координатах F1 и F2 (рис. 2.3). Если критерии F1 и F2 необходимо максимизировать, то Парето-оптимальным множеством является граница области допустимых значений, отмеченная на рис. 2.3 фигурной скобкой.

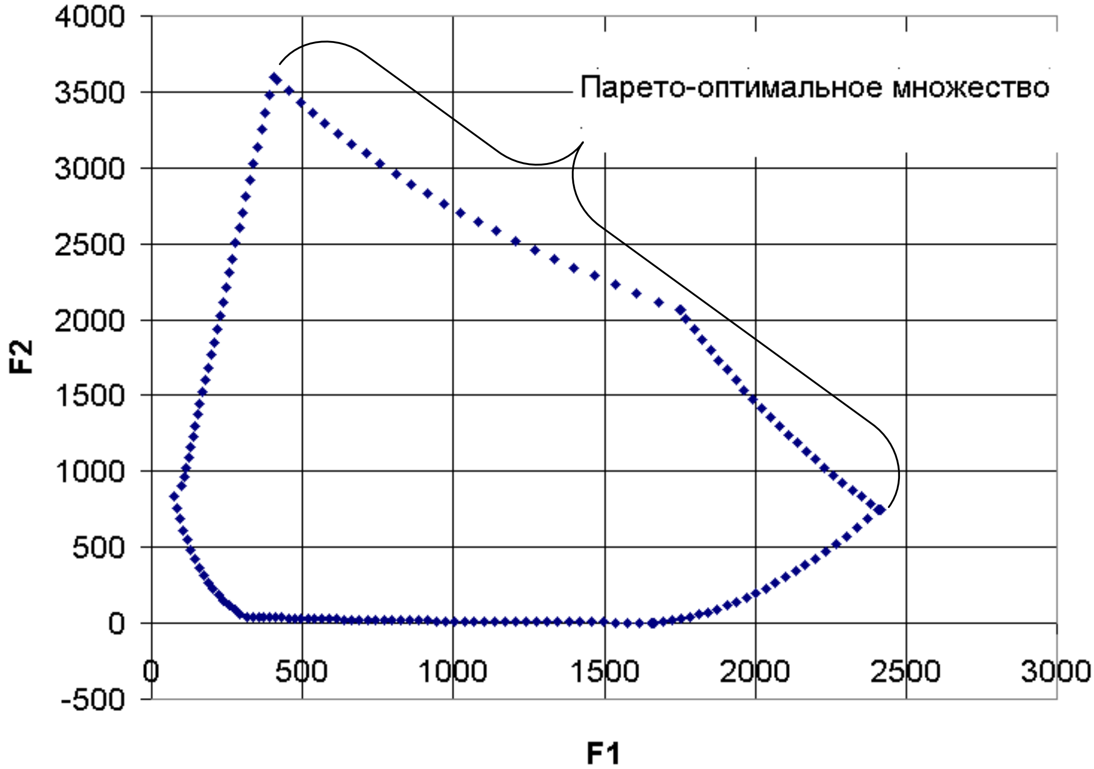

Рис. 2.3. Нахождение Парето-оптимального множества в координатах критериев F1 и F2

Порядок выполнения работы

1. Определить тип компромиссного критерия (2.1) или (2.3), который необходимо использовать для решения варианта задания.
2. Используя программное обеспечение решения задач линейного и нелинейного программирования, исследовать влияние весовых коэффициентов w_i на оптимальное компромиссное решение.
3. Изобразить множество допустимых значений критериев в координатах F_i, F_j в соответствие с вариантом задания. Найти Парето-оптимальное множество решений.

Варианты заданий

1. Плановое задание по изготовлению 4 видов костюмов необходимо распределить между 3 швейными фабриками. Производственные мощности i-й фабрики ($i = 1,2,3$) позволяют за рассматриваемый период времени выпустить r_{ij} костюмов j-й модели ($j = 1,2,3,4$). При этом, если все производственные мощности фабрики идут на производство костюмов одного типа, то костюмы других видов производиться не могут. Заданы цены c_j на костюм j-й модели и себестоимости s_{ij} изготовления j-й модели на i-й фабрике.

$$R = \begin{bmatrix} 20 & 240 & 300 & 150 \\ 240 & 300 & 200 & 300 \\ 150 & 240 & 300 & 200 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 400 & 400 & 500 & 200 \\ 250 & 300 & 250 & 400 \\ 400 & 500 & 400 & 300 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 500 & 650 & 800 & 500 \end{bmatrix}.$$

Необходимо решить многокритериальную задачу.
Критерий 1. Максимизация прибыли.
Критерий 2. Максимизация количества комплектов. Комплект состоит из 18 костюмов первого вида, 15 костюмов второго вида и по 10 костюмов третьего и четвертого видов.

2. Три вида деталей можно производить на станках разных типов без переналадки.

Мощность станков, ограничение на рабочее время и себестоимость в рублях одной детали каждого вида указаны в следующей таблице:

Вид деталей	Производительность станков (деталей в час)		Себестоимость деталей
	1 тип	2 тип	
1	20	45	8
2	30	20	6
3	50	60	0,5

Фонд рабочего времени для станков составляет соответственно 12 и 8 часов.

Необходимо решить многокритериальную задачу.

Критерий 1. Максимизация количества комплектов. Комплект состоит из 16 деталей первого вида, 12 деталей второго вида и 24 детали третьего вида.

Критерий 2. **Максимизация** себестоимости.

3. Нефтеперерабатывающий завод получает 4 различных полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин А 2:3:5:2, бензин Б - 3:1:2:1 и бензин С - 2:2:1:3.

Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина характеризуется числами 12000 руб., 10000 руб., 15000 руб.

Необходимо решить многокритериальную задачу.

Критерий 1. Максимизация стоимости всей продукции.

Критерий 2. Минимизация остатков полуфабрикатов.

4. Полуфабрикаты поступают на предприятие в виде листов фанеры. Всего имеется две партии материала, причем первая партия содержит 400 листов, а вторая 250 листов фанеры. Из поступающих листов фанеры необходимо изготовить комплекты двух видов. Комплект первого вида включает 4 детали 1-го типа, 3 детали 2-го типа и 2 детали 3-го типа. Комплект второго вида включает 2 детали 1-го типа, 4 детали 2-го типа и 3 детали 3-го типа. Лист фанеры каждой партии может раскраиваться различными способами.

Количество деталей каждого типа, которое получается при раскрое одного листа соответствующей партии по тому или иному способу раскроя, представлено в следующей таблице.

Стоимость одного листа первой партии составляет 1000 руб., а стоимость одного листа второй партии – 1200 руб. Цена комплекта первого вида составляет 150 руб., цена комплекта второго вида – 200 руб.

Детали	Способ раскроя (1 п)			Детали	Способ раскроя (2 п)	
	1	2	3		1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Необходимо решить многокритериальную задачу.
Критерий 1. Максимизация прибыли от продажи всех комплектов деталей.
Критерий 2. Максимизация количества комплектов первого вида.
Критерий 3. Максимизация количества комплектов второго вида.

Примечание: для построения Парето-оптимального множества рассмотреть только критерии 2,3.

5. На фабрике производится продукты двух типов. Для производства используются станки трех типов, два типа сырья, квалифицированная и неквалифицированная рабочая сила.

Сырье. Для производства одной единицы первого продукта требуется одна единица сырья первого типа и семь единиц сырья второго типа. Для производства одной единицы второго продукта требуется три единицы сырья первого типа и пять единиц сырья второго типа.

Станки. Станок первого типа имеет ресурс мощности $3{\cdot}10^6$, второго типа – $1{\cdot}10^6$, третьего типа – $3{\cdot}10^5$. При производстве первого продукта используется 0.5 единиц ресурса мощности станка первого типа, 0.2 единицы ресурса мощности станка второго типа и 0.025 единиц ресурса мощности станка третьего типа. При производстве второго продукта используется 2 единицы ресурса мощности станка первого типа, 0.5 единиц ресурса мощности станка второго типа и 0.1 единица ресурса мощности станка третьего типа.

Персонал. Бригада из одного квалифицированного рабочего и восьми неквалифицированных рабочих может выпустить $1.5{\cdot}10^5$ единиц первого продукта. Бригада из двух квалифицированных рабочих и 11-ти неквалифированных рабочих может выпустить $4{\cdot}10^4$ единиц второго продукта.

Стоимость одной единицы сырья первого типа 1 руб., второго типа – 0.15 руб. Стоимость одного станка первого типа $8{\cdot}10^6$ руб., станка второго типа – $7{\cdot}10^6$ руб., станка третьего типа – $9{\cdot}10^6$ руб. Амортизационные отчисления составляют 5 % от стоимости станка. Заработная плата квалифицированных рабочих $6.25{\cdot}10^3$ руб., неквалифицированных – $4{\cdot}10^3$ руб.

Цена первого продукта составляет 3.5 руб., второго – 12.5 руб.

Считается, что имеется неограниченное количество сырья. В наличии имеется 5 станков первого типа, 5 – второго типа, 3 – третьего типа. Максимальное число квалифицированных рабочих – 360, неквалифицированных – 2500. Платежеспособный спрос на первый продукт составляет $2.2 \cdot 10^7$ руб., на второй продукт – $2.7 \cdot 10^7$ руб.

Необходимо решить многокритериальную задачу.

Критерий 1. Максимизация стоимости продукции.

Критерий 2. Максимизация количества комплектов. Комплект состоит из 15 продуктов первого типа и 5 продуктов второго типа.

6. Четыре нефтеперерабатывающих завода с ежедневной производительностью 4, 6, 10 и 10 млн. тонн бензина снабжают пять бензохранилищ, ежедневная потребность которых составляет 7, 7, 7, 7 и 2 млн. тонн бензина соответственно. Стоимость транспортировки составляет 0.3 руб. за 1000 тонн на один км между заводами и хранилищами. Расстояние между заводами и хранилищами в км приведено в следующей таблице.

Заводы	Хранилища					Объем
	1	2	3	4	5	
1	160	300	170	100	160	4
2	300	270	260	90	230	6
3	130	40	220	30	100	10
4	30	100	50	40	240	10
Вместимость хранилища	7	7	7	7	2	30

Время (в часах), затрачиваемое на транспортировку бензина, приведено в следующей таблице.

Заводы	Хранилища				
	1	2	3	4	5
1	3	5	1	8	2
2	4	5	3	7	2
3	4	9	3	6	4
4	1	2	1	5	7

Найти оптимальную схему транспортировки бензина, решая многокритериальную задачу.

Критерий 1. Минимизация стоимости транспортировки бензина.

Критерий 2. Минимизация **общего** времени, затрачиваемого на транспортировку бензина из всех заводов во все хранилища.

7. 4 распределительных центра поставляют автомобили пяти дилерам. Автомобили от распределительных центров к дилерам перевозятся на трейлерах, и стоимость перевозки пропорциональна расстоянию между пунктами отправления и назначения и не зависят от степени загрузки трейлера. В таблице приведены расстояния между распределительными центрами и дилерами, а также соответствующие величины спроса и предложения, выраженные в количествах автомобилей. При полной загрузке трейлер вмещает 18 автомобилей. Транспортные расходы составляют 25 рублей за один км пути, пройденного трейлером.

Центры	Дилеры					Предложения
	1	2	3	4	5	
1	100	150	200	140	35	239
2	50	70	60	65	80	119
3	40	90	100	150	130	181
4	170	50	110	230	100	161
Спрос	111	131	259	98	101	700

Найти оптимальную схему транспортировки автомобилей, решая многокритериальную задачу.
Критерий 1. Максимизация общей загрузки трейлеров.
Критерий 2. Минимизация суммарной стоимости транспортировки автомобилей.

8. 4 пекарни осуществляют ежедневные поставки хлеба для пяти магазинов. В таблице представлена информация о спросе на продукцию, ее наличии и транспортных издержках:

Пекарни	Транспортные издержки, руб./кг					Предложение
	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	4-й магазин	5-й магазин	
A	0,9	1,7	2,9	2,8	0,8	200
B	1,3	2,1	2,7	1,6	2,9	300
C	2,0	3,0	2,4	0,7	2,6	200
D	1,1	1,9	3,0	0,6	0,2	200
Потребность магазинов	100	200	150	100	300	850 / 900

Время (в часах), затрачиваемое на транспортировку хлеба, приведено в следующей таблице.

Пекарни	Магазины				
	1	2	3	4	5
1	1,2	0,7	0,9	0,8	1,8
2	0,3	1,5	0,5	0,8	1,2
3	0,2	1,7	0,4	1,4	0,6
4	0,8	1,4	0,4	1,6	0,8

Найти оптимальную схему транспортировки хлеба, решая многокритериальную задачу.
Критерий 1. Минимизация стоимости транспортировки.
Критерий 2. Минимизация **общего** времени, затрачиваемого на транспортировку хлеба из всех пекарней во все магазины.

9. 4 лесозаготовочных предприятия осуществляют поставки леса пяти деревообрабатывающим заводам. Лес перевозят на лесовозах, и стоимость перевозки пропорциональна расстоянию между пунктами отправления и назначения и не зависят от степени загрузки лесовоза. В таблице приведены расстояния между лесозаготовочными предприятиями и деревообрабатывающими заводами, а также соответствующие величины спроса и предложения, выраженные в куб. м. При полной загрузке лесовоз вмещает 16 куб. м. Транспортные расходы составляют 30 рублей за один км пути, пройденного лесовозом.

Лесозагот. предприятия	Деревообрабатывающие заводы					Предложения
	1	2	3	4	5	
1	160	300	170	100	160	700
2	300	270	260	90	230	650
3	130	40	220	30	100	700
4	30	100	50	40	240	520
Спрос	400	500	350	900	420	2570

Найти оптимальную схему транспортировки леса, решая многокритериальную задачу.
Критерий 1. Максимизация общей загрузки лесовозов.
Критерий 2. Минимизация суммарной стоимости транспортировки леса.

10. 4 фермерских хозяйства осуществляют поставки зерна пяти мелькомбинатам. Зерно от фермерских хозяйств к мелькомбинатам перевозится на грузовых машинах вместимостью 2,5 тонны. Стоимость перевозки пропорциональна расстоянию между пунктами отправления и назначения и не зависит от степени загрузки машины. В таблице приведены расстояния в км между фермерскими хозяйствами и мелькомбинатами, а также соответствующие величины спроса и предложения, выраженные в тоннах. Транспортные расходы составляют 23 рубля за один км пути, пройденного одной грузовой машиной.

Фермерские хозяйства	Мелькомбинаты					Предложения
	1	2	3	4	5	
1	80	170	290	280	80	22
2	130	210	170	160	290	13
3	200	250	240	70	240	17
4	110	190	300	60	20	18
Спрос	3	13	7	7	40	70

Найти оптимальную схему транспортировки зерна, решая многокритериальную задачу.
Критерий 1. Максимизация общей загрузки грузовиков.
Критерий 2. Минимизация суммарной стоимости транспортировки зерна.

11. Сотовая компания собирается строить новую базовую станцию в области, где имеется 10 населенных пунктов с координатами X и Y. Уровень сигнала от базовой станции уменьшается пропорционально квадрату расстояния до населенного пункта.

Населенный пункт	X	Y	Число жителей
1	10	15	52
2	3	6	104
3	5	25	30000
4	17	4	110
5	9	10	26
6	15	7	315
7	6	18	754
8	1	3	1267
9	12	8	1999
10	18	4	516

Расходы на установку базовой станции внутри населенных пунктов приведены в следующей таблице. Стоимость установки одной базовой станции вне населенных пунктов составляет 63 тыс. у.е.

Населенный пункт	Расходы на установку одной базовой станции, тыс. у.е.
1	10
2	7
3	14
4	17
5	9
6	15
7	6
8	10
9	12
10	18

Необходимо решить многокритериальную задачу.
Критерий 1. Минимизация взвешенной суммы квадратов расстояний до населенных пунктов с учетом числа жителей в каждом населенном пункте.
Критерий 2. Минимизация стоимости установки базовой станции.

Содержание отчета

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; задание; математическую постановку задачи, результаты численных экспериментов; графическую иллюстрацию анализа; траектории изменения целевых функций многокритериальной задачи в зависимости от весовых коэффициентов; график допустимых значений критериев и Парето-оптимальное множество решений; выводы.

Контрольные вопросы

1. Примеры многокритериальных задач.
2. Решение многокритериальных задач, когда критерии измеряются в одной шкале.
3. Решение многокритериальных задач, когда критерии измеряются в различных шкалах.
4. Определение Парето-оптимального множества решений.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Сложность задания (максимальное количество баллов)	12	10	10	12	12	11	11	11	11	11	12

Лабораторная работа № 3

Решение матричных игр

Цель работы

Ознакомиться с методами решения задач матричных игр методами линейного программирования.

Методические указания

Матричная игра представляет собой антагонистическую игру двух лиц с платежной матрицей $A_{m\times n}$, с m возможными стратегиями первого игрока и n стратегиями второго игрока. Первый игрок стремится максимизировать выигрыш, второй – минимизировать проигрыш. Если матрица игры имеет седловую точку, т.е. существует элемент, являющийся максимальным в столбце и минимальным в строке, то игра имеет решение в чистых стратегиях. В противном случае игра имеет решение в смешанных стратегиях, которые представляют собой вероятностные распределения на множестве чистых стратегий: $\bar{x} = (x_1,...,x_m)^T$ – смешанная стратегия первого игрока, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$; $\bar{y} = (y_1,...,y_n)^T$,– смешанная стратегия второго игрока, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$.

Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш, не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии; второму игроку – проигрыш не больший, чем при использовании им любой другой стратегии.

С точки зрения 1-го игрока игру можно записать как задачу линейного программирования

$$V \to \max;$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \ge V,\ j = 1,...,n;$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0;\ i = 1,...,m;$$

где значение игры V рассматривается как $m+1$-я переменная, неограниченная по знаку (свободная).

С точки зрения 2-го игрока игру задача имеет вид

$$V \to \min;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le V,\ i = 1,...,m;$$
$$\sum_{i=j}^{n} y_j = 1,\ y_j \ge 0;\ j = 1,...,n.$$

Причем обе эти задачи представляют собой пару двойственных задач линейного программирования: решив одну из них, можем найти смешанные стратегии обоих игроков.

Порядок выполнения работы

1. Сделать формальную постановку задачи.
2. Определить множество возможных стратегий игроков, при этом по возможности исключить эквивалентные стратегии.
3. Выписать матрицу игры.
4. Найти оптимальные стратегии игроков, используя симплекс-метод.

Задачи для решения

1. Морра

Игроки одновременно показывают один или два пальца, и в тот же момент каждый из игроков называет число. Если число, названное одним из игроков, совпадает с общим числом пальцев, показываемых обоими игроками, то игрок получает со своего противника выигрыш, равный этому числу.

2. Игра A,B,C

Тасуется колода, состоящая из трех карт: A,B,C, и каждому из двух игроков дается по одной карте. Посмотрев свою карту, I-й игрок делает предположение относительно того, какая карта у II-го игрока.. Посмотрев на свою карту и услышав предположение I-го игрока, II-й игрок также пытается угадать карту I-го. Если какой-либо из игроков угадывает правильно, другой платит ему 1$.

3. Упрощенный покер

Первый игрок получает одну из карт Ст и Мл с равными вероятностями, а затем может или "сделать ставку" или "спасовать". Если первый делает ставку, то второй может "спасовать" и потерять α или "уравнять игру", и выиграть или потерять β в зависимости от того, имеется ли на руках у первого игрока карта Мл или Ст. Если первый игрок пасует, то второй может также пасовать, что дает выигрыш 0, или сделать ставку, выигрывая α, если у первого игрока карта Мл, и теряя β, если у первого игрока Ст.

4. О шарах

Известно, что в урне находятся два шара, каждый из которых либо белый, либо черный. Игрок должен определить, сколько там черных шаров. Если его предположение правильно, ему должно быть уплачено α; если его ответ отличается от правильного на 1 (например, он указывает 1, когда в действительности 2 черных шара, или указывает 2, когда в действительности один шар, и т.д.), то ему должно быть уплачено β; если ответ отличается от правильного на 2, то ему должно быть уплачено γ, причем $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Стоимость исследования одного шара равна δ.

Рассмотреть не менее 3 разных вариантов α, β, γ

5. Задача о рекламе

   Две конкурирующие компании осуществляют пассажирские авиаперевозки из Москвы в Магадан. Для увеличения доли пассажиров у них есть 4 варианта рекламы: в газете, на радио, на телевидении и в интернете. Доля охвата целевой аудитории для каждого вида рекламы составляет, соответственно, 0.2, 0.4, 0.7 и 0.25. Количество потенциальных пассажиров составляет около 10000 человек в год. Вероятность того, что человек, услышав рекламу конкретной компании, воспользуется ее услугами равна 0.01. Требуется определить оптимальные рекламные стратегии компаний.
6. Игральные кости

   2 игрока бросают игральные кости. Каждый игрок может бросить одну, две или три кости. Если игрок бросает одну кость, то его сумма равна числу очков, которые выпали на кости, умноженному на 3. Если игрок бросает 2 кости, то его сумма равна числу очков на обеих костях, умноженной на 1.5. Если игрок бросает 3 кости, то его сумма равна числу очков на трех костях. Выигрывает тот, у кого сумма больше.

7. Война между синими и красными.

   Генерал синих хочет занять город красных, имея 3 роты. К городу можно подойти по одной из трех дорог. Генерал синих каждую свою роту может послать по любой из дорог. Генерал красных располагает 6 ротами и может приказать любой роте оборонять любую дорогу. Синие займут город в том случае, если на одной из дорог у них будет больше рот, чем у красных. При этом синие получат 1, а красные — -1. Если синие не займут город, то выигрыши составят -1 и 1 соответственно.
8. Упрощенная игра в «21»

   Колода карт состоит из 30 карт: 10 «шестерок», 10 «пятерок» и 10 «четверок». Два игрока вытаскивают по 3 карты. После этого каждый игрок может взять дополнительно одну или две карты. После этого они открывают карты, и выигрывает тот, у кого сумма очков больше, но не более 21. Результат игры рассчитывается как разность между количеством очков выигравшего и проигравшего игроков по модулю.

9. Государство и налогоплательщик

   Рассмотрим игру, в которой участвуют государство и налогоплательщик. Доход налогоплательщика равен 4 единицам.

Государство выбирает уровень подоходного налога: высокий (В=50%) средний (С=35%) либо низкий (Н=25%). Налогоплательщик может честно заплатить налог, а может уклониться от его уплаты. Если он решает не платить налоги, то с некоторой вероятностью налоговые органы обнаруживают это и заставляют его заплатить весь налог и дополнительно внести в казну штраф в размере 1 единица. Выигрыш государства – это ожидаемый объем налоговых поступлений минус затраты на содержание налоговых органов, а выигрыш налогоплательщика – его ожидаемый доход (после уплаты всех налогов и штрафов). Определите оптимальные стратегии государства и налогоплательщиков. На содержание налоговых органов выделяется сумма 1 единица, чтобы обеспечить вероятность обнаружения неплательщика 75%, 0.5 единицы, чтобы обеспечить вероятность обнаружения неплательщика 50% и 0.2 единицы, чтобы обеспечить вероятность обнаружения неплательщика 25%.

10. Упрощенный «Морской бой»

Первый игрок располагает один двухпалубный корабль на поле 3x3. Второй игрок совершает выстрелы по полю противника, пытаясь потопить вражеский корабль. За каждый выстрел второй игрок уплачивает первому 1$. После первого попадания (ранения корабля) первый игрок уплачивает первому 2$, после второго попадания (окончательного поражения) – 3$.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сложность задания (максимальное количество баллов)	9	11	11	9	9	10	11	12	10	12

Лабораторная работа № 4

Методы целочисленного линейного программирования

Цель работы

Ознакомиться с методами целочисленного линейного программирования.

Методические указания

Для решения полностью целочисленных задач использовать первый алгоритм Гомори. Для решения частично целочисленных задач используется второй алгоритм Гомори.

Порядок выполнения работы

1. В соответствии с вариантом задания решить задачу целочисленного линейного программирования. Для задач с двумя переменными проиллюстрировать полученные отсечения графически.
2. Сгенерировать задачу линейного программирования небольшой размерности и выполнить ручной просчет одним из методов Гомори (по указанию преподавателя). Проиллюстрировать полученные отсечения графически.

Варианты заданий

1. Три вида деталей можно производить на станках двух разных типов. Производительность станков и себестоимость одной детали каждого вида указаны в следующей таблице:

Вид деталей	Производительность станков (деталей в час)	
	1 тип	2 тип
1	20	45
2	30	20
3	50	60

Станки могут работать не более 12 и 8 часов соответственно. На рынок имеет смысл поставлять не отдельные детали, а комплекты. Комплект состоит из 16 деталей первого вида, 12 деталей второго вида и 24 детали третьего вида. Требуется максимизировать количество комплектов, поступающих на рынок.

2. В цехе предприятия решено установить дополнительное оборудование, для размещения которого выделено 19/3 $м^2$ площади. На приобретение оборудования предприятие может израсходовать 10 тыс. руб., при этом оно может купить оборудование двух видов. Комплект оборудования I вида стоит 1000 руб., а II вида — 3000 руб. Приобретение одного комплекта оборудования I вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 ед., а одного комплекта оборудования II вида — на 4 ед. Зная, что для установки одного комплекта оборудования I вида требуется 2 $м^2$ площади, а оборудования II вида — 1 $м^2$ площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции.

3. Министерству необходимо составить план развития каждого из 4 предприятий, выпускающих однородную продукцию. Число возможных вариантов развития i-го предприятия равно 4. Реализация j-ого варианта развития i-го предприятия обеспечивает выпуск продукции в объеме b_{ij} млн. единиц. При этом экономический эффект развития i-ого предприятия по j-ому варианту равен c_{ij}. Составить такой план развития предприятий, при котором экономический эффект от реализации выбранных вариантов развития предприятий является максимальным.

B	C
8 5 6 8	9/8 6/5 7/6 9/8
6 7 8 7	7/6 8/7 9/8 8/7
7 5 7 8	8/7 6/5 8/7 9/8
7 6 8 6	8/7 7/6 9/8 7/6

4. Для выполнения четырех видов землеройных работ могут быть использованы экскаваторы четырех типов. Производительность экскаватора **i**-го типа при выполнении j-й работы задается матрицей

$$\begin{matrix} 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}7 \end{matrix}$$

Учитывая, что на каждой из работ может быть занят только лишь один экскаватор и что все экскаваторы должны быть задействованы, найти такое распределение экскаваторов между работами, которое обеспечивает максимальную производительность.

5. Пароход может быть использован для перевозки 11 наименований груза, масса, объем и цена единицы каждого из которых приведены в следующей таблице:

Параметры единицы груза	Номер груза										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Масса (т)	80	62	92	82	90	60	81	83	86	65	83
Объем (м^2)	100	90	96	110	120	80	114	60	106	114	86
Цена (тыс. руб)	4,4	2,7	3,2	2,8	2,7	2,8	3,3	3,5	4,7	3,9	4,0

На пароход может быть погружено не более 800 т груза общим объемом, не превышающим 600 м^2. Определить, сколько единиц каждого груза следует поместить на пароход так, чтобы общая стоимость размещенного груза была максимальной.

6. Плановое задание по изготовлению 2 видов костюмов необходимо распределить между 3 швейными фабриками. Производственные мощности i-й фабрики ($i=1,2,3$) позволяют за рассматриваемый период времени выпустить r_{ij} костюмов j-й модели ($j=1,2$). При этом, если все производственные мощности фабрики идут на производство костюмов одного типа, то костюмы других видов производиться не могут. Заданы величины себестоимости s_{ij} изготовления j-й модели на i-й фабрике.

$$R := \begin{bmatrix} 29 & 200 \\ 290 & 300 \\ 160 & 240 \end{bmatrix}$$

$$S := \begin{bmatrix} 400 & 400 \\ 250 & 300 \\ 400 & 500 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 281 & 129 \end{bmatrix}$$ - плановое задание

Требуется найти оптимальный план производства при условии минимизации себестоимости при допустимости перевыполнения планового задания.

7. Полуфабрикаты поступают на предприятие в виде листов фанеры. Всего имеется две партии материала, причем первая партия содержит 400 листов, а вторая 250 листов фанеры. Из поступающих листов фанеры необходимо изготовить комплекты двух видов. Комплект первого вида включает 4 детали 1-го типа, 3 детали 2-го типа и 2 детали 3-го типа. Комплект второго вида включает 2 детали 1-го типа, 4 детали 2-го типа и

3 детали 3-го типа. Лист фанеры каждой партии может раскраиваться различными способами.

Количество деталей каждого типа, которое получается при раскрое одного листа соответствующей партии по тому или иному способу раскроя, представлено в следующей таблице.

Стоимость одного листа первой партии составляет 100 руб., а стоимость одного листа второй партии – 120 руб. Цена комплекта первого вида составляет 160 руб., цена комплекта второго вида – 200 руб.

Детали	Способ раскроя (1 п)			Детали	Способ раскроя (2 п)	
	1	2	3		1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Требуется раскроить материал так, чтобы обеспечить максимальную прибыль от продажи всех комплектов деталей.

8. Для народного ополчения необходимо оружие – топоры, вилы и деревянные дубинки. Для производства одного топора, необходимо 4 кг железа и 3 кг – берёзы. Для производства одних вил, необходимо 2 кг железа и 4 кг ясеня. Для деревянной дубинки требуется 5 кг ясеня и 3 кг берёзы. Ресурсы ополченцев ограничены: 40 кг железа, 100 кг ясеня и 45 кг берёзы.
Задача: вооружить любым оружием максимальное число ополченцев.

Содержание отчета

Отчет по работе должен содержать титульный лист, цель работы, вариант задания, графическую иллюстрацию решения с полученными отсечениями, выводы.

Контрольные вопросы

1. Первый алгоритм Гомори.
2. Второй алгоритм Гомори.
3. Третий алгоритм Гомори.
4. Понятие лексикографического отсечения

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
Сложность задания (максимальное количество баллов)	10	11	11	9	11	12	11	10

Литература

1. Васильев В.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980. - 518 с.
2. Волков И.К., Загоруйко И.К. Исследование операций 306 с.
3. Гейл Д. . Теория линейных экономических моделей. М.: Изд-во иностранной литературы, 1968.
4. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. - М.: Наука, 1969. - 384 с.
5. Зайченко Ю.П. Исследование операций. - Киев: Вища школа, 1975. - 320 с.
6. Закарян И.О. Филатов И.В. Интернет как инструмент для финансовых инвестиций. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 2000. – 256 с.
7. Карманов В.П. Математическое программирование. - М.: Наука, 1975. - 272 с.
8. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.:Мир, 1969.
9. Кюнци Г.П., Крелле В., Нелинейное программирование, Изд - во "Советское радио", М., 1965.
10. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. - М.: Наука, 1978. - 352 с.
11. Петросян Л.А. Зенкевич Н.А. Семина Е.А. Теория игр : Учеб. пособие - М.: ВЫСШ. ШК.; : УНИВЕРСИТЕТ, 1998. - 300 с.
12. Растригин Л.А. Статистические методы поиска. - М.: Наука, 1968. - с. 82-121.
13. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.:Мир, 1975. – 534 с.