Методы принятия оптимальных решений. Занятие 9

Лексикографическая модификация метода последовательного уточнения оценок

Здесь вместо исходной задачи (1) решается её лексикографический вариант. Требуется найти лексикографический максимум расширенного плана

$$\tilde{x} = (x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j,\, x_1,\, \dots,\, x_n\right)$$

при

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,, \quad i = \overline{1,m}\,,$$

$$x_j \ge 0\,, \quad j = \overline{1,n}\,.$$

Система ограничений определяет допустимый многогранник L. Исходную задачу (1) будем обозначать как (L, C), где C – вектор целевой функции (не скалярное умножение). А задачу лексикографической максимизации или l-задачу – $(\overline{L, C})$. Соответствующая модификация метода последовательного уточнения оценок – l-метод.

Общая итерация l-метода описывается следующим образом.

Пусть имеется l-псевдоплан $\bar{x}^r$.

Ему соответствуют:

B_r – множество индексов базисных переменных;

N_r – множество индексов небазисных переменных;

T_r – симплексная таблица.

	1	$-x_{j_1}$	$\dots$	$-x_l$	$\dots$	$-x_{j_k}$
x_0	x_{00}	x_{0j_1}	$\dots$	x_{0l}	$\dots$	x_{0j_k}
x_1	x_{10}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_2	x_{20}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	x_{k0}	$\dots$	$\dots$	x_{kl}	$\dots$	x_{kj_k}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	x_{n0}	$\dots$	$\dots$	x_{nl}	$\dots$	x_{nj_k}

$\{j_1,...,l,...,j_k\} = N_r$, все $x_{0j} \ge 0$, $j \in N_r$.

Столбцы таблицы T_r обозначим через R_j^r, $j \in N_r^0$, $N_r^0 = \{0\} \cup N_r$.

Проверяем, является ли таблица T_r допустимой, т.е. выполнено ли условие

$$x_{i0}^r \ge 0, \; i = \overline{1,n}.$$

Если является, то $\bar{x}^r$ – l-оптимальный план.

Если нет, то ищем переменную x_k, выводимую из базиса (**направляющую строку**), по правилу

$$k = \min\{i \mid i = \overline{1,n}; \; x_{i0} < 0\}.$$

Затем отыскивается переменная x_l, вводимая в базис (**направляющий столбец**), по правилу

$$\frac{R_l}{|x_{kl}|} = lex\min\left\{\frac{R_j}{|x_{kj}|}\middle| j \in N_r; \quad x_{kj} < 0\right\}.$$

Если среди чисел x_{kj} $(j \in N_r)$ нет отрицательных, то задача неразрешима.

Если такие числа есть, то переходим к новому l-псевдоплану $\bar{x}^{r+1}$, которому соответствует

$$B_{r+1} = (B_r \cup \{l\}) \setminus \{k\},$$
$$N_{r+1} = (N_r \cup \{k\}) \setminus \{l\}.$$

Элементы новой таблицы T_{r+1} получаются по следующим формулам:

$$x_{ik}^{r+1} = -\frac{x_{il}^r}{x_{kl}^r}, \quad i = \overline{0,n}, \quad \text{(столбец делится)}$$

$$x_{ij}^{r+1} = x_{ij}^r - \frac{x_{il}^r}{x_{kl}^r} x_{kj}^r, \quad \forall j \in (N_r \setminus \{l\}) \cup \{0\}, \; i = \overline{0,n}.$$

Другими словами, столбец, в котором находится направляющий элемент x_{kl}^r, делится на этот элемент и умножается на (–1). Чтобы получить любой другой столбец новой таблицы, надо к соответствующему старому столбцу прибавить вновь полученный (преобразованный направляющий), умноженный на элемент, стоящий на пересечении направляющей строки и искомого столбца.

Затем повторяется общая итерация.

Способ получения l-нормальной таблицы

Ищется такое число

$$\sum_{j\in N} x_j \le M$$

вводят переменную $x_{n+1} \ge 0$ такую, что

$$x_{n+1} = M + \sum_{j\in N} 1(-x_j)$$

и добавляют соответствующую строчку к таблице.

Из базиса выводят x_{n+1}, и вводят x_l из условия

$$R_l = lex\min\left\{R_j \,\middle|\, j\in N\right\},$$

производят пересчёт и получают l-нормальную таблицу.

Первый алгоритм Гомори

В первую очередь находится l–нормальная таблица.

<u>Начальная итерация.</u>

Решаем l-задачу $\overline{(L,C)} \equiv \overline{(L_0,C)}$. Если она неразрешима, то неразрешима и задача $(L_0^{ц},C)$. Если $\overline{(L_0,C)}$ разрешима и l-оптимальный план $x\overline{(L_0,C)}$ удовлетворяет условию целочисленности, то $x\overline{(L_0,C)}$ является оптимальным планом задачи $(L_0^{ц},C)$. Если $x\overline{(L_0,C)}$ не удовлетворяет условию целочисленности, то переходим к общей итерации.

<u>r-я общая итерация ($r\ge 0$).</u>

Пусть $x(L_r,C)$ не удовлетворяет условию целочисленности. Мы ищем нормальную и допустимую симплексную таблицу $T_r = \|x_{ij}\|$, $i\in Q^n$, $j\in N_r^0$, в которой

$$x_i = x_{i0}^r + \sum_{j\in N} x_{ij}^r(-x_j), \quad i=\overline{0,n}.$$

Выберем наименьшую (по номеру) строку, которой соответствует нецелочисленная компонента

$$k = \min\{i \mid i=\overline{1,n};\quad x_{i0}^r - \text{не целое}\}$$

(если целочисленность целевой функции гарантирована, то $i=\overline{0,n}$) и строится соответствующее правильное отсечение

$$x_{n+r+1} = -\{x_{k_0}^r\} + \sum_{j \in N_r} (-\{x_{kj}^r\})(-x_j) \qquad (*)$$

$$x_{n+r+1} \geq 0$$

$$x_{n+r+1} \text{ – целое.}$$

Пример. Решить следующую задачу целочисленного линейного программирования, используя первый алгоритм Гомори:

$$x_0 = x_1 + x_2 \to \max$$

при

$$2x_1 + 11x_2 \leq 38,$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$4x_1 - 5x_2 \leq 5,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1{,}2.$$

Решение:

Правильные отсечения в этом алгоритме строятся по правилу:

$$k = \min\{i \mid i \in \overline{1,n};\quad x_{i0} \text{ – не целое}\}$$

$$x_{n+r+1} = -\{x_{k_0}^r\} + \sum_{j \in N_r} (-\{x_{kj}^r\})(-x_j).$$

0.

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_0 =$	0	–1	–1
$x_1 =$	0	–1	0
$x_2 =$	0	0	–1
$x_3 =$	38	2	11
$x_4 =$	7	1	1
$x_5 =$	5	4	–5

1.

	1	$-x_4$	$-x_2$
$x_0 =$	7	1	0
$x_1 =$	7	1	1
$x_2 =$	0	0	–1
$x_3 =$	24	–2	9
$x_4 =$	0	–1	0
$x_5 =$	–23	–4	–9

l-нормальная таблица

2.

	1	$-x_4$	$-x_5$
$x_0 =$	7	1	0
$x_1 =$	40/9	5/9	1/9
$x_2 =$	23/9	4/9	–1/9
$x_3 =$	1	–6	1
$x_4 =$	0	–1	0
$x_5 =$	0	0	–1
$x_6 =$	–4/9	–5/9	–1/9

Отсечение строилось по строке x_1.

3.

	1	$-x_4$	$-x_6$
$x_0 =$	7	1	0
$x_1 =$	4	0	1
$x_2 =$	3	1	–1
$x_3 =$	–3	–11	9
$x_4 =$	0	–1	0
$x_5 =$	4	5	–9

4.

	1	$-x_3$	$-x_6$
$x_0 =$	74/11	1/11	9/11
$x_1 =$	4	0	1
$x_2 =$	30/11	1/11	–2/11
$x_3 =$	0	–1	0
$x_4 =$	3/11	–1/11	–9/11
$x_5 =$	29/11	5/11	–51/11
$x_7 =$	–8/11	–1/11	–9/11

Отсечение строилось по строке x_0.

5.

	1	$-x_7$	$-x_6$
$x_0 =$	6	1	0
$x_1 =$	4	0	1
$x_2 =$	2	1	–1
$x_3 =$	8	–11	9
$x_4 =$	1	–1	0
$x_5 =$	–1	5	–9

6.

	1	$-x_7$	$-x_5$
$x_0 =$	6	1	0
$x_1 =$	35/9	5/9	1/9
$x_2 =$	19/9	4/9	–1/9
$x_3 =$	7	–6	1
$x_4 =$	1	–1	0
$x_5 =$	0	0	–1
$x_8 =$	–8/9	–5/9	–1/9

Отсечение строилось по строке x_1.

7.

	1	$-x_7$	$-x_8$
$x_0 =$	6	1	0
$x_1 =$	3	0	1
$x_2 =$	3	1	–1
$x_3 =$	–1	–11	9
$x_4 =$	1	–1	0
$x_5 =$	8	5	–9

8.

	1	$-x_3$	$-x_8$
$x_0 =$	65/11	1/11	9/11
$x_1 =$	3	0	1
$x_2 =$	32/11	1/11	–2/11
$x_3 =$	0	–1	0
$x_4 =$	12/11	–1/11	0
$x_5 =$	83/11	5/11	–54/11
$x_9 =$	–10/11	–1/11	–9/11

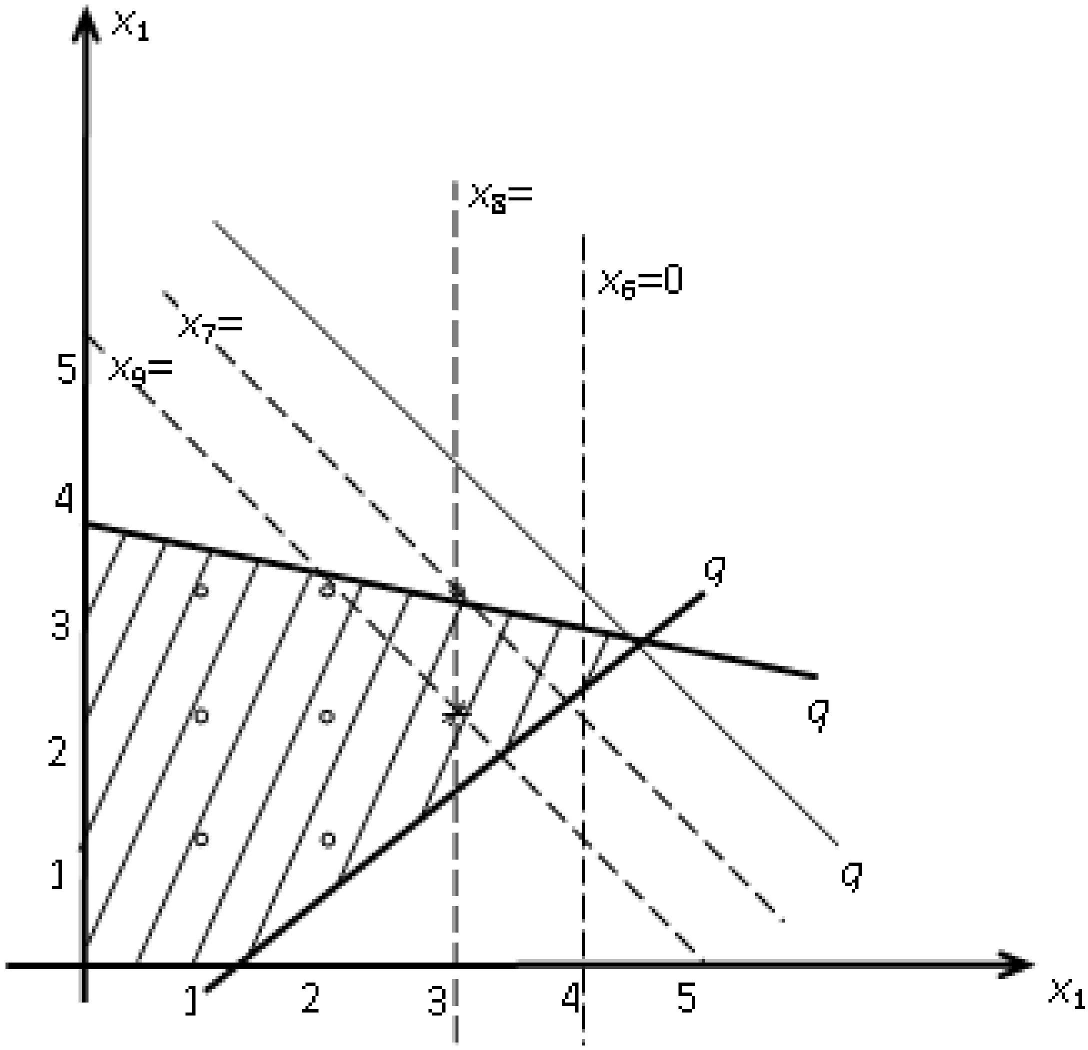
Отсечение строилось по строке x_0.

9.

	1	$-x_9$	$-x_8$
$x_0 =$	5	1	0
$x_1 =$	3	0	1
$x_2 =$	2	1	–1
$x_3 =$	10	–11	9
$x_4 =$	2	–1	0
$x_5 =$	3	5	–9

l-нормальная симплексная таблица с целочисленным планом.

Ответ: $L_{\min} = 5$; $x = (3, 2)^{\text{т}}$.



Отсечения, последовательно отсекающие от допустимой области полученные нецелочисленные планы.

Второй алгоритм Гомори

Теорема: Пусть $x(L_r, C) = x^r$ – оптимальный опорный план задачи (L_r, C) и

$$T_r = \left\| x_{ij}^r \right\|, \quad i \in Q^n, \qquad j \in N_r,$$

(где $Q^n = \{0, 1, \ldots, n\}$, $N_r = \{$индексы небазисных переменных$\}$) – соответствующая симплексная таблица, $1 \le i \le n_1$, x_{i0}^r – не целое.

Тогда неравенство

$$\sum_{j \in N_r} \gamma_j x_j \ge \gamma_0, \tag{1}$$

или, что то же самое,

$$z = -\gamma_0 + \sum_{j \in N_r} \gamma_j x_j, \tag{2}$$

$$z \ge 0 \tag{3}$$

является правильным отсечением.

Здесь

$$\gamma_0 = \{x_{i0}^r\}, \tag{4}$$

$$\gamma_j = \begin{cases} \left\{x_{ij}^r\right\}, & j \le n_1, \quad \left\{x_{ij}^r\right\} \le \left\{x_{i0}^r\right\}, \\ \dfrac{\left\{x_{i0}^r\right\}}{1 - \left\{x_{i0}^r\right\}}\left(1 - \left\{x_{ij}^r\right\}\right), & j \le n_1, \quad \left\{x_{ij}^r\right\} > \left\{x_{i0}^r\right\}, \\ x_{ij}^r, & j \ge n_1 + 1, \quad x_{ij}^r > 0, \\ \dfrac{\left\{x_{i0}^r\right\}}{1 - \left\{x_{i0}^r\right\}}\left(-\left\{x_{ij}^r\right\}\right), & j \ge n_1 + 1, \quad x_{ij}^r < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Пример. Тот же пример (при всех целых)

$$x_0 = x_1 + x_2 \to \max$$

при

$$2x_1 + 11x_2 \le 38,$$

$$x_1 + x_2 \le 7$$

$$4x_1 - 5x_2 \le 54,$$

$$x_i \ge 0,\ i = 1{,}2.$$

x_i – целые.

$$\gamma_0 = \{x_{i0}^r\},$$

$$\gamma_j = \begin{cases} \{x_{ij}^r\}, & j \le n_1,\quad \{x_{ij}^r\} \le \{x_{i0}^r\}, \\ \dfrac{\{x_{i0}^r\}}{1-\{x_{i0}^r\}}\left(1-\{x_{ij}^r\}\right), & j \le n_1,\quad \{x_{ij}^r\} > \{x_{i0}^r\}, \\ x_{ij}^r, & j \ge n_1+1,\quad x_{ij}^r > 0, \\ \dfrac{\{x_{i0}^r\}}{1-\{x_{i0}^r\}}\left(-\{x_{ij}^r\}\right), & j \ge n_1+1,\quad x_{ij}^r < 0. \end{cases}$$

Третья таблица, соответствующая оптимальному, но нецелочисленному плану:

	1	$-x_4$	$-x_5$
$x_0 =$	7	1	0
$x_1 =$	40/9	5/9	1/9
$x_2 =$	23/9	4/9	–1/9
$x_3 =$	1	–6	1
$x_4 =$	0	–1	0
$x_5 =$	0	0	–1
$x_6 =$	–20/45	–16/45	–5/45

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – целые, на x_6 и последующие переменные, связанные с отсечениями, требование целочисленности не накладывается.

Отсечение строится по строке для переменной x_1:

$$\gamma_0 = \{x_{10}^3\} = \frac{4}{9} = \frac{20}{45}; \qquad \{x_{14}^3\} > \{x_{10}^3\} \ \sim\ \frac{5}{9} > \frac{4}{9};$$

$$\gamma_4 = \frac{\{x_{10}^3\}}{1-\{x_{10}^3\}}\left(1-\{x_{14}^3\}\right) = \frac{4/9}{1-4/9}\left(1-5/9\right) = \frac{16}{45};$$

$$\gamma_5 \Rightarrow \{x_{15}^3\} = 1/9 \le 4/9 = \{x_{10}^3\} \Rightarrow \gamma_5 = x_{15}^3 = \frac{1}{9} = \frac{5}{45}.$$

Таблица 4

	1	$-x_4$	$-x_6$
$x_0 =$	7	1	0
$x_1 =$	4	1/5	1
$x_2 =$	3	4/5	–1
$x_3 =$	–3	–46/5	9
$x_4 =$	0	–1	0
$x_5 =$	4	16/5	–9

План не является опорным!

Таблица 5

	1	$-x_3$	$-x_6$
$x_0 =$	307/46	5/46	45/46
$x_1 =$	184/46	1/46	55/46
$x_2 =$	63/23	2/23	–5/23
$x_3 =$	0	–1	0
$x_4 =$	15/46	–5/46	–45/46
$x_5 =$	68/23	8/23	–135/23
$x_7 =$	–31/46	–5/46	–45/46

$$\gamma_0 = \{x_{i0}^r\},$$

$$\gamma_j = \begin{cases} \{x_{ij}^r\}, & j \le n_1, \quad \{x_{ij}^r\} \le \{x_{i0}^r\}, \\ \dfrac{\{x_{i0}^r\}}{1-\{x_{i0}^r\}}\left(1-\{x_{ij}^r\}\right), & j \le n_1, \quad \{x_{ij}^r\} > \{x_{i0}^r\}, \\ x_{ij}^r, & j \ge n_1+1, \quad x_{ij}^r > 0, \\ \dfrac{\{x_{i0}^r\}}{1-\{x_{i0}^r\}}\left(-\{x_{ij}^r\}\right), & j \ge n_1+1, \quad x_{ij}^r < 0. \end{cases}$$

Отсечение строится по строке x_0:

$$\gamma_0 = \{x_{00}\} = \left\{\frac{307}{46}\right\} = \frac{31}{46}.$$

Так как $5/46 < 31/46$, то $\gamma_3 = \{x_{03}\} = \dfrac{5}{46}$.

На x_6 не наложено требование целочисленности, поэтому $\gamma_6 = x_{06} = \dfrac{45}{46}$.

Таблица 6

	1	$-x_7$	$-x_6$
$x_0 =$	6	1	0
$x_1 =$	19/5	1/5	1
$x_2 =$	11/5	4/5	–1
$x_3 =$	31/5	–46/45	9
$x_4 =$	1	–1	0
$x_5 =$	4/5	16/5	–9
$x_8 =$	–4/5	–1/5	–1

Отсечение строится по строке x_1. На x_6 и x_7 не наложено требование целочисленности.

Таблица 7

	–1	$-x_7$	$-x_8$
$x_0 =$	6	1	0
$x_1 =$	3	0	1
$x_2 =$	3	1	–1
$x_3 =$	–1	–11	9
$x_4 =$	1	–1	0
$x_5 =$	8	5	–9

Таблица недопустима.

Таблица 8

	1	$-x_3$	$-x_8$
$x_0 =$	65/11	1/11	9/11
$x_1 =$	3	0	1
$x_2 =$	32/11	1/11	–2/11
$x_3 =$	0	–1	0
$x_4 =$	12/11	–1/11	–9/11
$x_5 =$	83/11	5/11	–54/11
$x_9 =$	–10/11	–1/11	–9/11

По строке x_0. Так как 1/11 < 10/11, $\gamma_3 = \{x_{03}\} = \frac{1}{11}$. На x_8 не наложено требование целочисленности: 9/11 > 0.

Таблица 9

	1	$-x_9$	$-x_8$
$x_0 =$	5	1	0
$x_1 =$	3	0	1
$x_2 =$	2	1	–1
$x_3 =$	10	–11	9
$x_4 =$	2	–1	0
$x_5 =$	3	5	–3

Найден оптимальный план.

Решить следующую задачу первым и вторым алгоритмами Гомори:

$$x_0 = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

при

$$x_1 + 2x_2 \le 6,$$

$$5x_1 + 3x_2 \le 15,$$

$$-x_1 + x_2 \le 2,$$

$$x_1 - x_2 \le 2,$$

$$x_i \ge 0,\ i = 1,2.$$

x_i – целые.