Использование парных сравнений при принятии решений

К парным сравнениям (матрицам парных сравнений) часто прибегают при формировании вектора предпочтений при сравнительном анализе множества объектов, целей, действий, стратегий, об оценке которых можно иметь лишь качественные суждения.

Однако, некоторого эксперта (или экспертов) просят сформировать предпочтения в количественной форме. То есть от эксперта требуют сформировать вектор предпочтения, компоненты которого указывали бы на степень предпочтения одних объёктов (стратегий) по отношению к другим.

Допустим, что имеется n видов стратегий (действий или объектов), которые рассматриваются (оцениваются) группой экспертов. Предположим, что цели группы экспертов следующие:

1) высказать суждения об относительной важности этих объектов;

2) гарантировать такой процесс получения суждений, который позволит количественно интерпретировать суждения по всем объектам.

Цель заключается в том, чтобы на основании количественных суждений группы экспертов (т. е. из относительных величин, ассоциируемых с *парами* объектов) сформировать вектор приоритетов (множество весов), определяющих относительную ценность этих объектов (целей, действий и стратегий).

Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – совокупность объектов (возможных действий). Количественные суждения о парах объектов (C_i, C_j) представляются **матрицей парных сравнений размера** $n \times n$

$$A = (a_{ij}),\ (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Элементы a_{ij} определяются по следующим правилам.

Правило 1. Если $a_{ij} = \alpha$, то $a_{ji} = 1/\alpha$, $\alpha \neq 0$.

Правило 2. Если суждения таковы, что C_i имеет одинаковую с C_j относительную важность, то $a_{ij} = 1$, $a_{ji} = 1$; в частности, $a_{ii} = 1$ для всех i.

И таким образом, матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

После представления количественных суждений о парах (C_i, C_j) числовым значением через a_{ij} задача сводится к тому, чтобы n возможным действиям $C_1, C_2, \ldots, C_n$ поставить в соответствие множество числовых весов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ (вектор приоритетов), которые соответствовали бы зафиксированным суждениям.

Пусть имеется 4 объекта (A, B, C, D), относительно которых эксперт высказал определенные суждения, на основании которых сформирована следующая матрица парных сравнений:

	A	B	C	D
A	1	5	6	7
B	1/5	1	4	6
C	1/6	1/4	1	4
D	1/7	1/6	1/4	1

Следующий шаг состоит в вычислении вектора приоритетов по данной матрице. В математических терминах это – вычисление главного собственного вектора матрицы, который после нормализации становится вектором приоритетов. (*Это точное решение, которое достаточно трудоёмко.*)

Но можно получить грубые оценки этого вектора приоритетов следующими четырьмя способами, которые представлены ниже в порядке увеличения точности оценок.

1. Просуммировать элементы каждой строки и нормализовать делением каждой суммы на сумму всех элементов; сумма полученных результатов будет равна единице. Первый элемент результирующего вектора будет приоритетом первого объекта, второй – второго объекта и т. д.

	A	B	C	D		
A	1	5	6	7	19	0.51108
B	0.2	1	4	6	11.2	0.301268
C	0.166667	0.25	1	4	5.416667	0.145703
D	0.142857	0.166667	0.25	1	1.559524	0.04195
					37.17619	1

2. Просуммировать элементы каждого столбца и получить обратные величины этих сумм. Нормализовать их так, чтобы их сумма равнялась единице, разделив каждую обратную величину на сумму всех обратных величин.

	A	B	C	D	
A	1	5	6	7	
B	0.2	1	4	6	
C	0.166667	0.25	1	4	
D	0.142857	0.166667	0.25	1	
	1.509524	6.416667	11.25	18	
	0.662461	0.155844	0.088889	0.055556	0.962749
	0.688093	0.161874	0.092328	0.057705	1

3. Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца (т. е. нормализовать столбец), затем сложить элементы каждой полученной строки и разделить эту сумму на число элементов строки. Это – процесс усреднения по нормализованным столбцам.

	A	B	C	D
A	1	5	6	7
B	0.2	1	4	6
C	0.166667	0.25	1	4
D	0.142857	0.166667	0.25	1

1.509524	6.416667	11.25	18

0.662461	0.779221	0.533333	0.388889	0.590976
0.132492	0.155844	0.355556	0.333333	0.244306
0.11041	0.038961	0.088889	0.222222	0.115121
0.094637	0.025974	0.022222	0.055556	0.049597

1

4. Перемножить *n* элементов каждой строки и извлечь корень *n*-й степени. Нормализовать полученные числа.

	A	B	C	D
A	1	5	6	7
B	0.2	1	4	6
C	0.166667	0.25	1	4
D	0.142857	0.166667	0.25	1

210	3.806754	0.613634
4.8	1.480166	0.238597
0.166667	0.638943	0.102995
0.005952	0.277762	0.044774
	6.203625	1

Отметим, что если матрица парных сравнений **не согласована**, эти 4 метода дают различные результаты.

Точное решение задачи, получается путем возведения матрицы в произвольно большие степени и деления суммы каждой строки на общую сумму элементов матрицы. С точностью до одной сотой это решение имеет вид

(0.61; 0.24; 0.10; 0.05).

Наиболее близко к нему приближенное решение с 4-й нормализацией.

Пример согласованной матрицы парных сравнений:

	A	B	C	D
A	1	4/3	2	4
B	3/4	1	3/2	3
C	1/2	2/3	1	2
D	1/4	1/3	1/2	1

В этом случае все 4 метода дают одно и то же **точное** решение (можно проверить):

(0.4, 0.3, 0.2, 0.1)

Что значит согласованная матрица парных сравнений? Если каждый объект представлен в данных хотя бы один раз, требуется $(n-1)$ суждений (результатов) о парных сравнениях. Из этих суждений просто вывести остальные суждения, используя следующее: если объект A_1 в 3 раза превосходит объект A_2 и в 6 раз превосходит A_3, то $A_1=3A_2$ и $A_1=6A_3$. Следовательно, $3A_2=6A_3$ или $A_2=2A_3$ и $A_3=1/2\,A_2$. Если результат парного сравнения в позиции (2,3) отличается от 2 ($a_{23} \neq 2$), то матрица будет несогласованной!

Построить согласованную матрицу парных сравнений очень не просто. Но сама по себе несогласованность не является большим бедствием.

Известно, что согласованность положительной обратно-симметричной матрицы эквивалентна требованию равенства ее максимального собственного значения $\lambda_{\max} = n$. Заметим, что всегда справедливо неравенство $\lambda_{\max} \geq n$.

Можно оценить отклонение от согласованности величиной $(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$, которую называют *индексом согласованности* (ИС).

Насколько плоха согласованность для определенной задачи, можно оценить путем сравнения полученного нами значения величины $(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$ с ее “критическим значением” для матрицы того же размера.

В таблице (Саати) представлены средние значения случайного индекса (СИ) для различных объёмов матриц.

Отношение ИС к среднему СИ для матрицы того же порядка называется *отношением согласованности* (ОС). Значение ОС, меньшее или равное 0.10, считается приемлемым.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
СИ	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.53	1.56	1.57	1.59

Пусть A – построенная матрица парных сравнений, а $\bar{\Omega}$ – построенный вектор приоритетов. Оценка $\lambda_{\max}$ находится следующим образом. Сначала находим вектор

$$\bar{B} = A\bar{\Omega},$$

затем вектор $\bar{D}$ с элементами $d_i = b_i / \omega_i$,

$$\lambda_{\max} \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i .$$

Для нашего примера (4-й метод):

	A	B	C	D			
A	1	5	6	7	210	3.806754	0.613634
B	0.2	1	4	6	4.8	1.480166	0.238597
C	0.166667	0.25	1	4	0.166667	0.638943	0.102995
D	0.142857	0.166667	0.25	1	0.005952	0.277762	0.044774
						6.203625	1

$B^T =$ (2.738008 1.086723 0.444013 0.197951)

$D^T =$ (4.461957 4.55464 4.311012 4.421103)

$\lambda_{\max} \approx$ 4.437178

$$ИС = (\lambda_{\max} - n) / (n-1) = (4.437178–4)/3 = 0.145726$$

$$ОС = \frac{ИС}{СИ} = \frac{0.145726}{0.90} = 0.161918 > 0.1,$$

Что свидетельствует о ***несогласованности*** матрицы парных сравнений.

При участии в экспертизе нескольких экспертов вектор приоритетов может усредняться.

Может усредняться с весами.