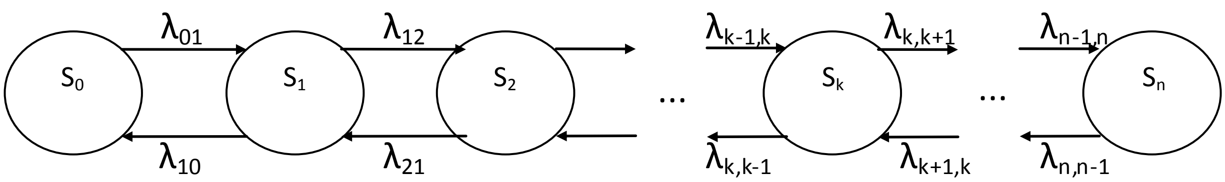
III. Процессы гибели и размножения

В ТМО широко распространен специаьный класс случайных процессов – так называемые процессы гибели и размножения. Название это связано с рядом биологических задач, где этот процесс служит математической моделью изменения численности биологических популяций.

Граф состояний такого процесса имеет вид:



Особенность такой системы заключается в том, что переходы могут осуществляться из любого состояния только в соседние состояния, т.е. из состояния S_k возможен переход только в сотояния S_{k-1} или S_{k+1}.

Составим и решим СЛАУ для предельных вероятностей состояний (а их существование вытекает из возможности перехода из каждого состояния в каждое другое за конечное число шагов).

Для S_0: $\lambda_{01}P_0 = \lambda_{10}P_1$.

Для S_1: $(\lambda_{10} + \lambda_{12})P_1 = \lambda_{21}P_2 + \lambda_{01}P_0$.

С учетом этого: $\lambda_{12}P_1 = \lambda_{21}P_2$.

Аналогично, записывая уравнения для предельных вероятностей других состояний, можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_{01}P_0 = \lambda_{10}P_1, \\ \lambda_{12}P_1 = \lambda_{21}P_2, \\ \dots \\ \lambda_{k-1,k}P_{k-1} = \lambda_{k,k-1}P_k, \\ \dots \\ \lambda_{n-1,n}P_{n-1} = \lambda_{n,n-1}P_n. \end{cases}$$

к которой добавляется нормировочное уравнение: $P_0 + P_1 + \cdots + P_n = 1$.

Решим эту систему:

$$P_1 = \frac{\lambda_{01}P_0}{\lambda_{10}},$$

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}P_1}{\lambda_{21}} = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}P_0,$$

$$P_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}}P_0,$$

$$\dots$$

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1,k}\dots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{k,k-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}}P_0.$$

Обратим внимание на формулы для P_i: числители представляют собой произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо (от начала до данного состояния S_i); знаменатели – произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево (из состояния S_i до начала).

Таким образом, все вероятности состояний P_i выражены через одну из них (через вероятноять P_0). Подставим эти выражения в нормировочное условие и получим:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1,n}\dots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}.$$

IV. СМО с отказом

Рассмотрим простейшую СМО, математеческая модель которой применима и успешно используется в практических расчетах.

В качестве показателей эффективности СМО с отказами будем рассматривать:

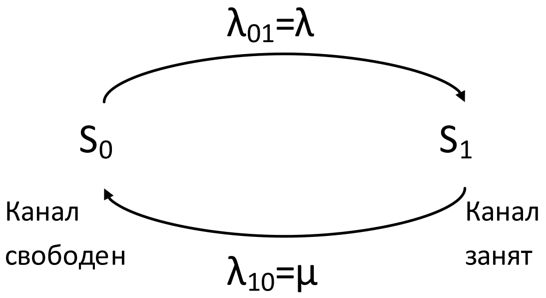
A – абсолютная пропускная способность СМО, т.е. среднее количество заявок, обслуживаемых в единицу времени.

Q – относительная пропускная способность СМО, т.е. средняя доля пришедших заявок, обслуживаемых системой (или это вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена).

$P_{отк}$ – вероятность отказа (или это вероятность того, что пришедшая заявка будет необслужена).

$\overline{K}$ – среднее число занятых каналов (для многоканальной системы).

IV.1 Одноканальная СМО с отказами



Система имеет один канал обслуживания, на который поступает простейший поток (т.е. с экспоненциальным законом времени обслуживания) заявок с интенсивностью λ.

Поток обслуживания имеет интенсивность μ. Заявка, заставшая систему занятой, покидает ее. Переход из состояния S_0 в состояние S_1, связан с появлением заявки и немедленным началом ее обслуживания. Переход из состояния S_1 в состояние S_0 – как только очередное обслуживание завершится.

Запишем систему уравнений Колмогорова (т.е. математическую модель процесса) при условии, что в начальный момент времени t = 0 система находится в состоянии S_0:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ P_1'(t) = -\mu P_1(t) + \lambda P_0(t) \\ P_0(0) = 1 \\ P_1(0) = 0 \end{cases}$$

С учетом условия нормировки $P_1(t) + P_2(t) = 1$ упрощаем модель процесса:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -(\lambda + \mu)P_0(t) \\ \qquad P_0(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Решением этой задачи (1) является вектор $P(t) = (P_0(t), P_1(t))$, определяемый соотношением:

$$\left.\begin{aligned} P_0(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \\ P_1(t) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \end{aligned}\right\} t \geq 0$$

Величина $\lim_{t\to\infty} P_0(t) = P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = Q$ – это относительная пропускная способность системы (т.е. средняя доля заявок, обслуживаемых системой). Заметим, что предел $\lim_{t\to\infty} P_0(t) = P_0$ означает предельную (финальную) вероятность. P_0 – это вероятность того, что канал свободен, т.е. вероятность того, что новая пришедшая заявка будет обслужена.

Вероятность отказа: $P_{\text{отк}} = 1 - Q = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Абсолютная пропускная способность в установившемся режиме равна: $A = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$. Заметим, что $A = \lambda Q$.

Вероятность $P_0(t)$ является пропускной способностью системы в любой момент времени $t \geq 0$. Эта вероятность означает, что в любой момент времени канал свободен, а значит заявка, поступившая в момент времени t, будет обслужена значит вероянтость $P_0(t)$ – это отношение числа обслуженных заявок к их общему числу.

- Пример

Одноканальная система обслуживания представляет собой телефонную линию. Заявка-вызов, поступившая в систему, получает отказ если канал занят. Интенсивность потока заявок: $\lambda = 0{,}8$ (т.е. число вызовов в единицу времени). Средняя продолжительность разговора: 1,5 мин. Считая входящий поток заявок простейшим, а время обслуживания распределенным по экспоненциальному закону с параметром μ, определить в установившемся режиме: A, Q, $P_{\text{отк}}$.

<u>Решение</u>

$\lambda = 0{,}8$

$\mu = 1/1{,}5 = 0{,}(6)$

$A \approx 0{,}36$ (т.е. в среднем обслужено 0,36 заявок в минуту, т.е. 21,6 заявок в час)

$Q \approx 0{,}45$ (т.е. только 45% в среднем заявок осуществляет разговоры по телефону)

$P_{отк} \approx 0{,}55$

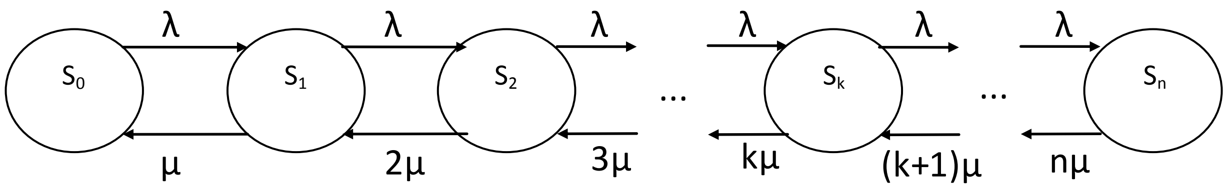
Заметим, что λ – номинальная пропускная способность канала связи почти в 2 раза больше его пропускной способности А. Это объясняется случайным характером потока заявок и временем их обслуживания.

IV.2 Многоканальная система с отказом

Пусть имеется *n* каналов (линий связи) обслуживания, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний каждого канала имеет интенсивность μ. Надо найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности. (Это так называемая Задача Эрланга)

Система СМО имеет следующие состояния (их нумеруют по числу заявок, находящихся в системе): S_0, S_1, ..., S_n, где S_k – состояния системы, когда в ней находится k заявок, т.е. занято k каналов.

Граф состояний СМО соответствует процессу гибели и размножения:



Поток заявок последовательно переводит систему из любого левого состояния в соседнее правое состояние с одной и той же интенсивностью λ. Интенсивность же потока обслуживаний, переводящих СМО из любого правого состояния в любое левое, постоянно меняется в зависимости от состояния. Действительно, если СМО находится в состоянии S_2 (2 канала заняты), то она может перейти в состояние S_1 (1 канал занят), когда закончит обслуживание либо первый, либо второй канал, т.е. суммарная интенсивность их потока равна 2μ. Аналогично суммарный поток обслуживаний, переводящий СМО из состояния S_3 (3 канала заняты) в состояние S_2, имеет интенсивность 3μ и т.д.

По формуле предельной вероятности для P_0 процесса гибели и размножения получаем:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} + \cdots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1}.$$

Обозначим $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – это называется приведенной интенсивностью потока заявок или интенсивностью нагрузки канала. Она выражает среднее число заявок, приходящих за среднее время обслуживания одной заявки. Следовательно:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \\ P_1 &= \rho P_0, \\ P_2 &= \frac{\rho^2}{2!} P_0, \\ &\dots \\ P_n &= \frac{\rho^n}{n!} P_0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Это так называемая Формула Эрланга.

Вероятность отказа такой СМО: $P_{\text{отк}} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$.

Значит относительная пропускная способность (т.е. вероятность того, что заявка будет обслужена): $Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0$.

Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda Q = \lambda(1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0)$.

Найдем среднее число занятых каналов $\overline{K}$. Эта величина – математическое ожидание дискретной случайной величины, ее возможные значения 0, 1, ..., n и вероятности этих значений P_0, P_1, ..., P_n: $m(x) = \int x f(x) dx$. Тогда среднее число занятых каналов:

$$\overline{K} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + \cdots + n \cdot P_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P_k.$$

Подставляя в это выражение формулы из (2), можно найти $\overline{K}$.

Однако среднее число занятых каналов можно найти проще, если учесть, что абсолютная пропускная способность A системы есть не что иное, как интенсивность потока обслуженных системой заявок (в единицу времени), т.к. каждый канал обслуживает в среднем μ заявок, то среднее число занятых каналов: $\overline{K} = \frac{A}{\mu} = \rho(1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0)$.

- **Пример**

Определить оптимальное количество телефонных номеров в фирме, если условием оптимальности считать удовлетворение из каждых 100 заявок на переговоры в среднем не менее 90 заявок. При этом в фирму поступает поток заявок на телефонные переговоры с интенсивностью λ = 90 вызовов в час, средняя продолжительность разговора по телефону: $\overline{\mathrm{T}}_{\text{об}} = 2\text{ мин} = \frac{1}{30}$ часа.

<u>Решение</u>

$$\mu = \frac{1}{\overline{T}_{\text{об}}} = \frac{1}{2\text{ мин}} = 30\text{ед/час}$$

Интенсивность нагрузки канала: ρ = 90/30 = 3, т.е. за время среднего (по продолжительности) телефонного разговора $\overline{\mathrm{T}}_{\text{об}} = 2$ мин поступает в среднем 3 заявки на переговоры.

Будем постепенно увеличивать число каналов (т.е. телефонных номеров по условию задачи): n = 2, 3, 4, ...

Определим для получаемой n-канальной СМО характеристики обслуживания.

Значения характеристик СМО представим в таблице:

Показатель эффективности	Число каналов					
	1	2	3	4	5	6
Относительная пропускная способность Q	0,25	0,47	0,65	0,79	0,9	0,95
Абсолютная пропускная способность A	22,5	42,3	58,8	71,5	80,1	85,3

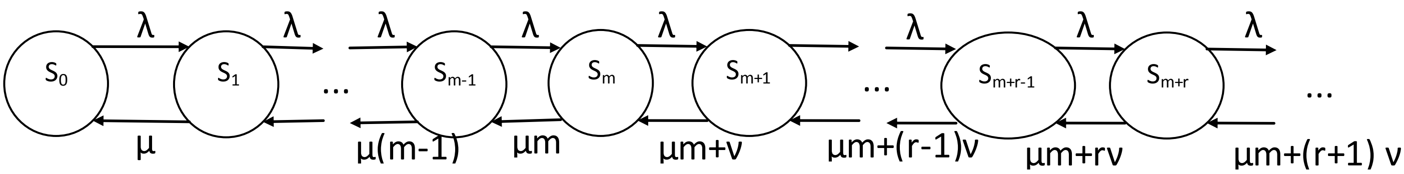
По условию оптимальности Q ≥ 0,9 => в фирме необходимо установить 5 телефонных номеров. При этом в час будет обслуживаться в среднем 80 заявок (A = 80,1). А среднее число занятых каналов: $\overline{K} = \frac{A}{\mu} \approx 2{,}67$.

Здесь можно заметить некоторый вариант оптимизации. В самом деле, содержание каждого канала в единицу времени обходится в какую-то сумму. Вместе с тем, каждая обслуженная заявка приносит какой-то доход (если речь идет о СМО, для которых этот доход можно оценить). Умножая этот доход на среднее число заявок A, обслуживаемых в единицу времени, мы получим средний доход от СМО в единицу времени. Естественно, при увеличении числа каналов этот доход растет, но растут и расходы, связанные с содержанием каналов. Что перевесит — увеличение доходов или расходов? Это зависит от условий операции, т.е. от «платы за обслуживание заявки» и от стоимости содержания канала. Зная эти величины, можно найти оптимальное число каналов, наиболее экономически эффективное.

V. СМО с ожиданием (очередью)

V.1 Многоканальные СМО

Граф состояний системы с ожиданием выглядит следующим образом (для системы с m каналами и неограниченной очередью):



где μ – интенсивность обслуживания, ν – интенсивность ухода заявки из очереди.

Состояние S_0 – все m каналов свободны,

S_1 – 1 канал занят, (m-1) каналов свободны,

S_m – m каналов заняты,

S_{m+1} – m каналов заняты, 1 заявка в очереди,

…

S_{m+r} – m каналов заняты; r заявок в очереди.

Переход из состояния S_k в S_{k-1} может быть вызван тем, что:

1. обслуженная заявка покидает систему;
2. заявка из очереди покидает систему, если время ожидания в очереди ограниченное.

Закон распределения времени ожидания определяется интенсивностью ухода ν при наличии в ней одной заявки. В силу того, что заявки поступают независимо друг от друга, интенсивность, с которой заявки оказываются от обслуживания, равна $r * \nu$ (где r– количество заявок, отказывающихся от обслуживания).

Запишем по графу систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ \dots \\ P_k'(t) = -(\lambda + k\mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), k = \overline{1, m-1}, \\ \dots \\ P_{m+r}'(t) = -(\lambda + m\mu + r\nu)P_{m+r}(t) + \lambda P_{m+r-1}(t) + \\ +\big(m\mu + (r+1)\nu P_{m+r+1}(t)\big),\ r \geq 0, \\ \dots \end{cases}, \quad (3)$$

где r – это для очереди, $r \in [1; +\infty)$ (если r = 0, то это уже многоканальная система с отказами)

Если в начальный момент времени система находится в одном из своих S_i состояний, то начальные условия для него имеют вид:

$$P_k(0) = \begin{cases} 1, \text{ если } k = i \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Рассмотрим стационарный режим функционирования такой СМО, то есть при $t \longrightarrow \infty$. Здесь $P_i = \lim_{t \to \infty} P_i(t), i = 1,2, \dots$ А ($P' = 0$).

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0, \\ \dots \\ -(\lambda + k\mu)P_k + \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} = 0, k = \overline{1, m-1}, \\ \dots \\ -(\lambda + m\mu + r\nu)P_{m+r} + \lambda P_{m+r-1} + \\ +(m\mu + (r+1)\nu P_{m+r+1}) = 0,\ r \geq 0, \\ \dots \end{cases} \quad (4)$$

При этом выполняется условие нормировки $\sum P_i = 1$.

Обозначим через α среднее число заявок, поступающих в систему обслуживания за среднее время обслуживания одной заявки. Т.к. среднее число заявок, поступающих в систему обслуживания в единицу времени равно λ, а среднее время обслуживания одной заявки равно $\frac{1}{\mu}$, то $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$. Таким образом α – это приведенная плотность потока заявок.

Последовательно решив систему (4) (без последнего уравнения в ней), получим:

$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0, k = \overline{1,m},$

$$P_{m+r} = \frac{\alpha^r}{\prod_{k=1}^{r}(m+k\beta)} P_m = \frac{\alpha^m}{m!} \cdot \frac{\alpha^r}{\prod_{k=1}^{r}(m+k\beta)} P_0, r \geq 1 \quad , \tag{5}$$

где $\beta = \frac{\nu}{\mu}$ – приведенная плотность ухода заявок из очереди.

С использованием условия нормировки $\sum P_i = 1$ получаем, что:

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha^r}{(m+\beta k)}\right)^{-1}.$$

Средняя длина очереди $\bar{r}$ равна математическому ожиданию (т.е. числу заявок в очереди). Из формулы (5) следует, что:

$$\bar{r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot P_{m+r} = \frac{\alpha^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r\alpha^r}{\prod_{k=1}^{r}(m+k\beta)} P_0 \ . \tag{6}$$

Среднюю длину очереди $\bar{r}$ можно вычислить проще. Пусть $\overline{m}$ – среднее число занятых каналов обслуживания:

$$\overline{m} = \frac{\lambda - \nu\bar{r}}{\mu} = \alpha - \beta r,$$

где λ – среднее число заявок, поступивших в единицу времени, ν – интенсивность ухода из очереди, $\bar{r} * \nu$ – сколько заявок покидает СМО в среднем в единицу времени.

Относительная пропускная способность системы:

$$Q = \frac{\lambda - \nu\bar{r}}{\lambda} = 1 - \frac{\nu}{\lambda}\bar{r}$$

характеризует вероятность того, что заявка, поступившая в систему, будет обслужена.

При отсутствии очереди r = 0, q = 1 (если в такой СМО нет очереди, то $P_{обсл}$ = 1).

Т.к. $\sum P_k = 1$ и в состояниях S_{m+r}, r ≥ 0 все каналы заняты, то найдем:

$$\overline{m} = \sum_{i=0}^{m-1} i\,P_i + \sum_{r=0}^{\infty} m\,P_{m+r} = \sum_{i=0}^{m-1} i\,P_i + m\left(1 - \sum_{i=0}^{m-1} i\,P_i\right),$$

$$\bar{m} = m - mP_0 - \sum_{k=0}^{m-1}(m-k)P_k.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \bar{r} = \dfrac{\alpha - \bar{m}}{\beta} = \dfrac{\lambda - \mu\bar{m}}{\nu} \\ Q = 1 - \dfrac{\nu}{\lambda} \cdot \dfrac{\lambda - \mu\bar{m}}{\nu} = \dfrac{\mu}{\lambda}\bar{m} = \dfrac{\bar{m}}{\alpha} \end{cases}$$

V.1.1 Многоканальные СМО с ожиданиями, в которых заявки не покидают очередь (неограниченная длина очереди)

Это чистые системы обслуживания с ожиданием.

В этом случае ν = 0 => β = 0. Тогда

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{m}\frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^m}{m!}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\alpha^r}{m^r}\right)^{-1}$$

Если α ≥ m, то ряд $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\alpha^r}{m^r}$ расходится. Т.е. стационарного режима работы нет, длина очереди неограниченно возрастает, система не справляется с обслуживанием заявок.

Если α < m, то $\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{m}\right)^r = \frac{\frac{\alpha}{m}}{\left(1-\frac{\alpha}{m}\right)} = \frac{\alpha}{m-\alpha}$. Значит:

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{m}\frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{m+1}}{m!\,(m-\alpha)}\right)^{-1}$$

Средняя длина очереди (из (6)):

$$\bar{r} = \frac{\alpha^m}{m!}\sum_{r=1}^{\infty} r\left(\frac{\alpha}{m}\right)^r P_0 = \frac{\alpha^m}{m!}\left(\frac{\alpha}{m}\sum_{r=1}^{\infty} r\left(\frac{\alpha}{m}\right)^{r-1}\right)P_0 == \frac{\alpha^m}{m!}\left(\frac{\alpha}{m}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{m}\right)^r\right)'\right)P_0$$

$$= \frac{\alpha^m}{m!}\cdot\frac{\alpha}{m}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha}{m}}\right)' P_0 = \frac{\alpha^{m+1}}{m!\,m\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha}{m}}\right)^2}P_0.$$

V.1.2 Многоканальные СМО с ожиданиями с ограниченной длиной очереди (заявки очередь не покидают)

В системе из m каналов и ограниченной длиной очереди $N < \infty$ интенсивность ухода заявок из системы зависит от ее состояния S_k

$$\nu = \begin{cases} 0, \text{если } 0 \le k \le m+N \text{ (т.е. что} - \text{то свободно)} \\ \infty, \text{если } k > m+N \text{ (все занято)} \end{cases} \begin{cases} \text{или канал} + \text{очередь} \\ \text{или очередь} \end{cases}$$

Значит $\beta = 0$.

Тогда:

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^m}{m!} \sum_{r=1}^{N} \left(\frac{\alpha}{m}\right)^r\right)^{-1},$$

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0, k = \overline{1,m},$$

$$P_{m+r} = \frac{\alpha^m}{m!} \left(\frac{\alpha}{m}\right)^{\alpha} P_0, r = \overline{1,N},$$

$$P_{\text{отказ}} = P_{m+N}.$$

Относительная пропускная способность системы: $Q = 1 - P_{\text{отказ}} = 1 - P_{m+N}$

- **Пример**

Бригада из 2 рабочих обслуживает 6 однотипных станков. Остановка работающего станка происходит в среднем через каждый ½ часа, процесс наладки в среднем занимает 10 мин = 1/6 часа. Найти среднюю занятость рабочих; среднее количество неисправных станков; абсолютную пропускную способность рабочей бригады.

<u>Решение:</u>

В задаче дано, что среднее число заявок, поступающих в систему обслуживания в единицу времени: $\lambda = \frac{1}{1/2} = 2$;

интенсивность обслуживания: $\mu = \frac{1}{1/6} = 6$;

каналы обслуживания (рабочие): m = 2;

длина очереди максимальная (количество станков): N = 6 – 2 = 4.

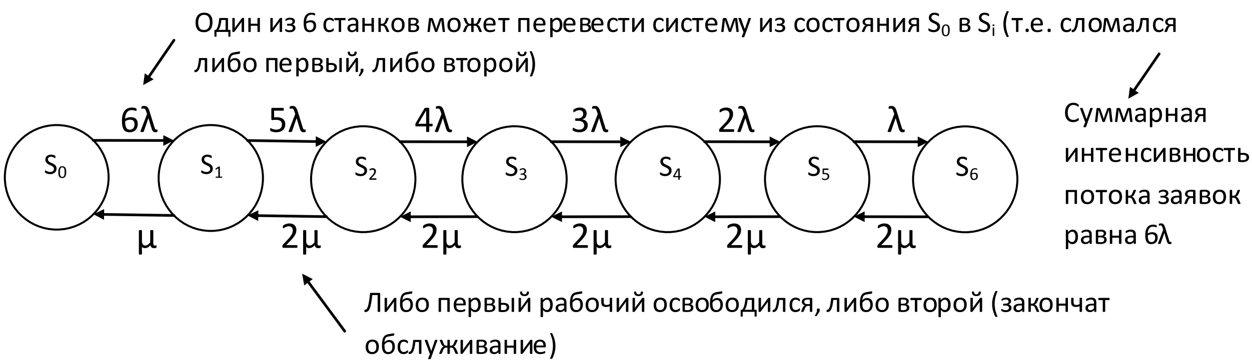
Состояния:

S_0 – станки работают, рабочие свободны,

S_1 – один станок остановился; занят один рабочий, второй свободен,

S_2 – два станка остановились; заняты оба рабочих,

S_{2+r} – два станка остановились; заняты оба рабочих, r станков в очереди $(r = \overline{1,4})$



Составим систему уравнений Колмогорова для стационарного случая:

$$\begin{cases} -6\lambda P_0 + \mu P_1 = 0, \\ 6\lambda P_0 - (5\lambda + \mu)P_1 + 2\mu P_2 = 0, \\ \cdots \\ \sum P_k = 1. \end{cases}$$

Значит:

$P_1 = 2P_0,$

$P_2 = \frac{5}{3}P_0,$

$P_3 = \frac{10}{9}P_0,$

$P_4 = \frac{5}{9}P_0,$

$P_5 = \frac{5}{27}P_0,$

$P_0 = \frac{162}{1061}$ (из условия нормировки и значений $P_1, \dots, P_5$)

$\overline{m}_{\text{неиспр}} = \sum_{k=0}^{6} kP_k = 12P_0 \approx 1{,}8$ – среднее количество (математическое ожидание) неисправных станков.

Средняя занятость рабочих = математическое ожидание числа налаживаемых станков: $\rho = 1P_1 + 2P_2 + 2P_3 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6 = 2(1 - 2P_0) \approx 1{,}4$

Пропускная способность бригады: $\mathrm{A} = \rho\mu = 8{,}4$