

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ – ЭФФЕКТИВНЫЙ ИНСТРУМЕНТ В МЕТРОЛОГИИ И В СТАТИСТИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ КАЧЕСТВОМ ПРОДУКЦИИ<sup>1</sup>**

Б.Ю. Лемешко

Новосибирский государственный технический университет  
Тел. сл. (383-2) 46-37-54. E-mail: headrd@fpm.ami.nstu.ru

**Аннотация.** Показываются возможности методов компьютерного моделирования при исследовании вероятностных закономерностей и развитии аппарата математической и прикладной статистики, используемого в задачах статистического управления качеством и обработки результатов измерений.

### **Введение**

Классический аппарат математической статистики включает в себя достаточно ограниченный перечень задач статистического анализа, опирающийся на необходимость выполнения предположений, в рамках которых применение соответствующих методов оказывается корректным. Разнообразие задач и статистических гипотез, выдвигаемых в процессе статистического анализа в различных приложениях, оказывается существенно шире предлагаемого классическим аппаратом. Предположения, при которых корректно применение классических методов, в реальных условиях приложений часто не выполняются. Например, ошибки одномерных или многомерных измерений не подчиняются нормальному закону, наблюдения случайных величин в связи с условиями их регистрации представляют собой цензурированные, группированные, частично группированные или интервальные измерения, свойства оценок и статистик при ограниченных объемах выборок могут очень сильно отличаться от асимптотических.

Использование классических процедур статистического анализа в случае нарушения предположений, при которых правомерно применение соответствующих методов, как правило, приводит к ошибкам и, как следствие, некорректным статистическим выводам.

Можно говорить о наличии в математической и прикладной статистике множества "белых пятен". И в большинстве таких случаев отсутствие требуемых теоретических результатов объясняется сложностью и трудоемкостью получения решений аналитическими методами. Можно констатировать, что количество и уровень сложности задач, выдвигаемых практикой, возрастают настолько быстро, что ресурсы человеческого интеллекта, его производительность просто не в состоянии обеспечить решение такого множества задач без создания и использования соответствующих вычислительных технологий.

Чаще всего проблемы возникают в связи с проверкой статистических гипотез. В реальных условиях, отличающихся от классических предположений, распределение статистики классического (или построенного) критерия может существенно отличаться от его предельного распределения (при классических предположениях). В этом случае возможность применения данного критерия упирается в необходимость нахождения (предельного) распределения статистики в условиях изменившихся предположений.

За редким исключением, нахождение предельного закона для статистики критерия проверки конкретной гипотезы аналитическими методами оказывается чрезвычайно сложной задачей, а задач, требующих разрешения, – слишком много. Поэтому для исследования закономерностей все чаще начинают пользоваться методами статистического моделирования. Методы компьютерного моделирования и компьютерного анализа являются эффективным средством исследования вероятностных закономерностей, возникающих в технике, эконо-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ (проект № ТО2-3.3-3356)

мике, естествознании, позволяют с меньшими интеллектуальными затратами получать фундаментальные знания в области математической статистики.

В течение последних лет нами успешно развивается методика компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей, позволившая получить ряд очень полезных результатов, расширяющих аппарат математической статистики. Применение этих результатов обеспечивает корректность статистических выводов в тех ситуациях, когда использование классических процедур и методов неправомерно. Данная методика ни в коем случае не противопоставляется аналитическим методам, а дополняет их, обеспечивая нахождение приближенного решения в тех случаях, когда этого не удастся сделать аналитическими методами. Численное моделирование дает наиболее реальный, надежный и относительно простой аппарат для построения законов распределений различных статистик и оценок, для исследования их изменчивости в зависимости от различных факторов. На основании результатов моделирования можно делать не только асимптотические выводы, но и проследивать изменения закономерностей с ростом объемов выборок.

В самой методике компьютерного моделирования при исследовании конкретной закономерности условно можно выделить 2 основных этапа. Первый этап представляет собой статистическое моделирование соответствующей статистики (на базе соответствующего вычислительного аппарата математической статистики и программного обеспечения), в результате которого получаем эмпирическое распределение моделируемой статистики. В настоящее время машинные ресурсы позволяют добиваться любой точности приближения истинного распределения эмпирическим (получать и эффективно анализировать выборки объемом в несколько сот тысяч наблюдений).

На втором этапе на основании полученных в результате моделирования эмпирических распределений статистик (статистик корреляционного анализа, дисперсионного анализа, регрессионного анализа, статистик критериев согласия при различных сложных гипотезах и т.п.) можно строить и уточнять математические модели распределений исследуемых статистик (на базе соответствующего программного обеспечения, позволяющего подбирать наиболее подходящие модели, оценивать параметры моделей и проверять их адекватность на основании статистических критериев), строить при необходимости таблицы процентных точек.

Такая методика находится в процессе постоянной эволюции: найденные фундаментальные закономерности (модели, их описывающие), расширяющие аппарат математической статистики, встраиваются в программное обеспечение, расширяя, в свою очередь, его возможности для исследования вероятностных закономерностей. Таким образом, результаты моделирования позволяют для любой исследуемой статистики в каждом конкретном случае (законе, к которому предполагается принадлежность выборки; объеме выборки; количестве и типе оцениваемых параметров; методе оценивания; используемом критерии) построить закон распределения статистики (его модель). В дальнейшем это расширение аппарата математической статистики дает возможность осуществлять корректные статистические выводы с использованием данной статистики.

### **Исследование вопросов применения критериев типа $\chi^2$**

При использовании критериев согласия типа  $\chi^2$  неоднозначность при построении и вычислении статистик бывает связана с выбором числа интервалов и тем, каким образом область определения случайной величины разбивается на интервалы. Естественно, что такой произвол отражается на статистических свойствах применяемых критериев, в частности, на их мощности при различении близких конкурирующих гипотез. Очевидно, что выбор числа интервалов и способа разбиения на интервалы следует осуществлять с позиций обеспечения максимальной мощности критерия.

**Зависимость мощности от способа группирования.** Способ группирования оказывает особенно сильное влияние на мощность критериев типа  $\chi^2$ . В работах [1-4] показано,

что критерии согласия  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия при проверке как простых, так и сложных гипотез имеют максимальную мощность против близких альтернатив, если использовать такое разбиение области определения случайной величины на интервалы, при котором потери в информации Фишера о параметрах закона, соответствующего проверяемой гипотезе  $H_0$ , минимальны (асимптотически оптимальное группирование). Для конкретных законов распределения получен широкий состав построенных таблиц асимптотически оптимального группирования (АОГ-группирования), минимизирующего потери в информации Фишера. Использование АОГ-группирования при заданном числе интервалов обеспечивает максимальную мощность при близких гипотезах.

**Зависимость мощности от числа интервалов  $k$ .** За всю историю применения критериев типа  $\chi^2$  была предложена не одна формула для выбора числа интервалов<sup>2</sup>, но ни одна из представленных в различных рекомендациях не выводилась с позиций максимальной мощности применяемого критерия, а, в основном, исходя из близости плотности к ее непараметрической оценке, гистограмме. Зная предельные распределения  $G(S|H_0)$  и  $G(S|H_1)$  статистики  $S$ , для любого заданного уровня значимости  $\alpha$  можно оценить мощность соответствующего критерия, рассматривая её как функцию от числа интервалов  $k$  при заданном объеме выборки  $n$ . Исследование мощности критериев типа  $\chi^2$  как функции от  $n$  и  $k$  проводилось методами статистического моделирования и аналитически [5-8]. Исследования показали, во-первых, что действительно с ростом  $k$  происходит падение мощности, что согласуется с результатами Чибисова<sup>3</sup> и Боровкова<sup>4</sup>. Во-вторых, для любой пары альтернатив и объема выборки существует оптимальное  $k$ , при котором мощность максимальна. Оптимальное число интервалов  $k$  зависит от объема выборки  $n$  и от конкретной пары конкурирующих гипотез  $H_0$  и  $H_1$ . Чаще всего оптимальное  $k$  оказывается существенно меньше значений, рекомендуемых различными регламентирующими документами и задаваемых множеством эмпирических формул.

Результаты исследований мощности критериев типа  $\chi^2$  от способа группирования и числа интервалов, таблицы асимптотически оптимального группирования составили основу рекомендаций по стандартизации Р 50.1.033-2001 [9].

### **Исследование вопросов применения непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез**

К наиболее используемым критериям согласия относятся непараметрические критерии типа Колмогорова, типа  $\omega^2$  (Крамера-Мизеса-Смирнова) и  $\Omega^2$  (Андерсона-Дарлингa) Мизеса.

В случае простых гипотез предельные распределения статистик непараметрических критериев типа Колмогорова,  $\omega^2$  и  $\Omega^2$  Мизеса известны давно и не зависят от вида наблюдаемого закона распределения и значений его параметров. Говорят, что эти критерии являются “свободными от распределения”. Это достоинство предопределило широкое использование данных критериев в приложениях.

При проверке сложных гипотез, когда по той же самой выборке оцениваются параметры наблюдаемого закона  $F(x, \theta)$ , непараметрические критерии согласия теряют свойство “свободы от распределения”. Различия в предельных распределениях тех же самых статистик при проверке простых и сложных гипотез очень существенны. Поэтому предостережения против неаккуратного применения критериев согласия при проверке сложных гипотез неоднократно поднимались на страницах печати<sup>5</sup>. При проверке сложных гипотез на

<sup>2</sup> Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. - Л.: Энергоатомизд., 1991. - 303 с.

<sup>3</sup> Чибисов Д.М., Гванцеладзе Л.Г. // III сов.-яп. симп. по теор. Вер.. Ташкент: изд-во “Фан”, 1975. - С. 183-185.

<sup>4</sup> Боровков А.А. // Теория вероятностей и ее применение. 1977. Т. XXII. № 2. - С.375-378.

<sup>5</sup> Орлов А.И. // Заводская лаборатория. - 1985. - Т. 51. - №1. - С. 60-62.

условный закон распределения статистики  $G(S|H_0)$  влияет целый ряд факторов, определяющих “сложность” гипотезы: вид наблюдаемого закона  $F(x, \theta)$ , соответствующего истинной гипотезе  $H_0$ ; тип оцениваемого параметра и количество оцениваемых параметров; в некоторых ситуациях конкретное значение параметра (например, в случае гамма-распределения); используемый метод оценивания параметров и точность вычисления оценок.

Исходной точкой для исследований предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при сложных гипотезах послужила работа Каса-Кифера-Вольфовица<sup>6</sup>. В литературных источниках изложен ряд подходов к использованию непараметрических критериев согласия в случае проверки сложных гипотез. При достаточно большом объеме выборки ее можно разбить на две части и по одной из них оценивать параметры, а по другой проверять согласие<sup>7</sup>. В некоторых частных случаях предельные распределения статистик исследовались аналитическими методами<sup>8</sup>, процентные точки распределений строились методами статистического моделирования<sup>9</sup>. Для приближенного вычисления вероятностей “согласия” вида  $P\{S > S^*\}$  (достигаемого уровня значимости) строились формулы, дающие достаточно хорошие приближения при малых значениях соответствующих вероятностей<sup>10</sup>. В наших работах [10-16] исследование распределений статистик непараметрических критериев согласия и построение моделей этих распределений осуществлялось с использованием методики компьютерного анализа статистических закономерностей. В работах [10-15] были построены модели распределений статистик при проверке согласия с параметрическими моделями. В [16] исследовалась возможность применения непараметрических критериев согласия для проверки адекватности непараметрических моделей. В [17] проведено исследование влияния точности оценивания параметров на распределения статистик критериев согласия.

Построенные в результате применения методики модели предельных распределений статистик рассматриваемых критериев при проверке различных сложных гипотез и таблицы процентных точек послужили основой рекомендаций по стандартизации Р 50.1.037-2002 [18]. Работа [19] дополняет рекомендации Р 50.1.037-2002 для случая проверки сложных гипотез о согласии с распределениями экспоненциального семейства.

Результаты исследований свойств непараметрических критериев согласия и критериев типа  $\chi^2$  позволяют более надежно решать задачи идентификации закона распределения случайной составляющей погрешности измерений [20].

### **Исследование вопросов оценивания параметров и проверки гипотез по сильно цензурированным выборкам**

С задачей обработки цензурированных выборок, когда наблюдению оказывается доступной только часть области определения случайной величины, а для выборочных значений, попавших левее и/или правее этой области, фиксируется лишь сам факт этого попадания, приходится сталкиваться в различных приложениях. Особенно часто с цензурированными выборками встречаются в задачах надежности при оценивании продолжительности жизни. В такой неполной (цензурированной) выборке содержится меньше информации, чем в полной. Потеря части информации отражается на точности оценивания параметров аппроксимирующего закона распределения. При цензурировании наблюдений снижается способность крите-

<sup>6</sup> Кас М., Kiefer J., Wolfowitz J. // Ann. Math. Stat. – 1955. – V.26. – P.189-211.

<sup>7</sup> Durbin J. // Lect. Notes Math. – 1976. – V. 566. – P. 33–44.

<sup>8</sup> Мартынов Г.В. Критерии омега-квадрат. – М.: Наука, 1978. – 80 с.

<sup>9</sup> Pearson E.S., Hartley H.O. Biometrika tables for Statistics. V.2. – Cambridge: University Press, 1972. – 634 p.  
Stephens M.A. // J. R. Stat. Soc. – 1970. – B. 32. – P. 115-122.

Stephens M.A. // J. Am. Statist. Assoc. – 1974. – V.69. – P. 730-737.

Chandra M., Singpurwalla N.D., Stephens M.A. // J. Am. Statist. Assoc. – 1981. – V.76. – P. 375.

<sup>10</sup> Тюрин Ю.Н. // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1984. – Т. 48. – № 6. – С. 1314-1343.

Тюрин Ю.Н., Саввушкина Н.Е. // Изв. АН СССР. Сер. Техн. Кибернетика. – 1984. – № 3. – С. 109-112.

Саввушкина Н.Е. // Сб. тр. ВНИИ систем. исслед. – 1990, № 8.

риев согласия различать близкие законы распределения. В среде специалистов по надежности, которым наиболее часто приходится сталкиваться с проблемами обработки сильно цензурированных выборок, сложилось даже мнение о бесперспективности различения моделей законов распределений, используемых в задачах надежности и контроля качества, с помощью критериев согласия<sup>11</sup>.

В работах [21, 22] и в дальнейшем нами были исследованы потери в информации Фишера в зависимости от степени цензурирования для различных законов распределения. Было показано, что в некоторых случаях, когда доступной наблюдению оказывается лишь незначительная область определения случайной величины, в цензурированной выборке сохраняется достаточно много информации. Например, в случае экспоненциального закона распределения при цензурировании слева, когда доступной наблюдению оказывается область справа, вероятность попадания в которую равна всего 0.05, сохраняется более 52% (!) от информации, имеющейся в полной выборке.

Оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметров распределений по цензурированным наблюдениям являются асимптотически эффективными. Однако при ограниченных объемах выборок и значительной степени цензурирования законы распределения ОМП весьма далеки от асимптотически нормального и, более того, оказываются *асимметричными*, а сами оценки *смещенными*.

С использованием методики компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей были исследованы величины смещения ОМП параметров некоторых законов в зависимости от объема всей выборки  $n$  и величины наблюдаемой её части. В результате исследования были получены оценки математических ожиданий смещений ОМП как эмпирические функции от объема выборки и степени цензурирования.

Для проверки согласия при цензурированных наблюдениях и простых гипотезах могут использоваться критерии типа Реньи<sup>12</sup>, которые в этой ситуации являются “свободными от распределения”. Но даже при проверке простых гипотез отмечена сильная зависимость распределений статистик типа Реньи от объема выборки  $n$ , что резко ограничивает возможность применения критерия при конечных объемах выборок. Оказалось, что распределения статистик критериев хорошо сходятся к предельным (см. Большев Л.Н., Смирнов Н.В.) при степени цензурирования в 50% и очень плохо при других значениях.

При проверке сложных гипотез критерии типа Реньи теряют свойство “свободы от распределения”. Поэтому необходимы исследования распределений данных статистик при проверке различных сложных гипотез с целью построения моделей предельных распределений.

### **Исследование распределений статистик корреляционного анализа при отклонении многомерного закона от нормального**

В основе существующего аппарата корреляционного анализа лежит предположение о принадлежности наблюдаемого случайного вектора многомерному нормальному закону. Базируясь на этом, получены предельные распределения статистик, используемых в классическом корреляционном анализе<sup>13</sup>.

Проведенные нами в [23] исследования распределений ряда статистик корреляционного анализа в случае многомерных законов, отличающихся от нормального в достаточно широких пределах (более островершинных или более плосковершинных, но симметричных), показали, что значимого изменения предельных распределений статистик не происходит. Эмпирические распределения данных статистик по-прежнему хорошо описываются предельными законами, полученными в классическом корреляционном анализе в предположении о

<sup>11</sup> Демидович О.Н. // Методы менеджмента качества. – 1999. – № 11. – С. 29-33

<sup>12</sup> Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с.

Goro Ishii. On the exact probabilities of Renyi's tests // Ann.Inst. Statist. Math., 1959. № 2. – P. 17-24.

Смирнов Н.В. Вероятности больших значений непараметрических односторонних критериев согласия // Труды Матем. Ин-та АН СССР, 1961. 64. – С. 185-210.

<sup>13</sup> Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. – М.: Физматгиз, 1963. – 500 с.

Кендалл М., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. – М.: Наука, 1976. – 736 с.

нормальности наблюдаемого вектора. Это существенно расширяет сферу корректного применения методов классического корреляционного анализа в приложениях. Данные выводы не касаются задач проверки гипотез о ковариационных матрицах многомерного закона. Предельные распределения статистик, используемых при проверке таких гипотез, существенно зависят от наблюдаемого многомерного закона. Распределения таких статистик в настоящее время исследуются при некоторых многомерных законах. Моделирование распределений аналогичных статистик в одномерном случае показало, что предельные распределения этих статистик сильно зависят от наблюдаемого закона. Для некоторых конкретных законов построены таблицы процентных точек соответствующих критериев [24].

### **Исследование распределений статистик регрессионного и дисперсионного анализов при нарушении предположений о нормальности ошибок**

В классических регрессионном и дисперсионном анализах аппарат проверки статистических гипотез базируется на предположении нормальности закона ошибок наблюдений. Нарушение данного предположения по-разному отражается на распределениях статистик используемых критериев проверки гипотез. Предельные распределения статистик критериев могут зависеть от закона распределения ошибок и применяемого метода оценивания параметров.

Проведенные исследования распределений статистик, используемых при проверке гипотез об адекватности линейных регрессионных моделей, в случае ошибок наблюдений отклика, подчиняющихся законам распределения, не совпадающим с нормальным, и при применении для оценивания параметров регрессии метода максимального правдоподобия показали, что в этом случае распределения статистик уже не подчиняются  $F$ -распределению Фишера. В то же время эмпирические распределения статистик хорошо описываются бета-распределениями II рода, частным случаем которого является  $F$ -распределение Фишера.

Аналогичные исследования распределений статистик в дисперсионном анализе показали их существенную зависимость от закона распределения ошибок и перспективность применения развиваемой методики.

### **Исследование робастных свойств оценок**

С использованием методов компьютерного моделирования показано, что высокой устойчивостью к различным отклонениям от предположений и к наличию аномальных наблюдений обладают ОМП по группированным данным. Группирование при оценивании позволяет получать устойчивые оценки. Повышению качества таких оценок способствует применение асимптотически оптимального группирования, минимизирующего потери в информации Фишера [25, 26]. Предложены [27] и исследованы [28] оптимальные  $L$ -оценки параметров сдвига и масштаба, построенные на оценках квантилей, соответствующих асимптотически оптимальному группированию. Применение ОМП по группированным данным и оптимальных  $L$ -оценок параметров сдвига и масштаба делает эффективными параметрические процедуры отбраковки аномальных измерений.

### **Исследование свойств критериев статистического управления качеством**

С применением методов компьютерного моделирования исследованы распределения статистик различных критериев, используемых в задачах метрологии и статистического управления качеством.

В частности исследованы распределения классических статистик, используемых при проверке гипотез о математических ожиданиях и дисперсиях, в том числе по серии выборок. Показано, что при проверке гипотез о математических ожиданиях применение классических результатов оказывается корректным при существенных отклонениях наблюдаемого закона от нормального. Для статистик, используемых в критериях проверки гипотез о дисперсиях, в том числе в критериях Бартлетта и Кохрена, распределения которых существенно зависят от наблюдаемого закона, получены таблицы процентных точек, применение которых правомерно при наблюдаемых законах, описываемых экспоненциальным семейством распределе-

ний [29]. Получены результаты, расширяющие возможности критериев типа Граббса [30], применяемых для отбраковки аномальных наблюдений в случае нормального закона. Использование всех упомянутых критериев предполагает ГОСТ Р ИСО 5725–1÷6–2002.

Исследованы распределения статистик и мощность ряда критериев нормальности, в том числе, не вошедших в ГОСТ Р ИСО 5479-2002. Показаны недостатки и преимущества различных критериев. Проведено сравнение мощности рассмотренных критериев с критериями согласия при проверке нормальности. Показано, что наиболее предпочтительным критерием проверки нормальности является критерий, предложенный D'Agostino, не включенный ни в международный, ни в отечественный стандарты.

Полученные результаты расширяют возможности практического применения исследованных критериев в задачах метрологии и статистического управления качеством.

Более подробные результаты исследований с применением методики компьютерного моделирования доступны по адресу <http://www.ami.nstu.ru/~headrd/seminar/start.htm>.

### Литература

1. Лемешко Б.Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений - это обеспечение максимальной мощности критериев // Надежность и контроль качества. - 1997. - № 8. - С. 3-14.
2. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Прикладные аспекты использования критериев согласия в случае проверки сложных гипотез // Надежность и контроль качества. - 1997. - № 11. - С. 3-17.
3. Лемешко Б.Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия // Заводская лаборатория, 1998. Т. 64. - №1. - С.56-64.
4. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. О зависимости предельных распределений статистик  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия от способа группирования данных // Заводская лаборатория. 1998. Т. 64. - № 5. - С.56-63.
5. Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В. Максимизация мощности критериев типа  $\chi^2$  // Доклады Сибирского отделения Академии наук высшей школы. Новосибирск, 2000. - № 2. - С. 53-61.
6. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В. О распределениях статистики и мощности критерия типа  $\chi^2$  Никулина // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. - № 3. - С. 52-58.
7. Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В. О выборе числа интервалов в критериях согласия типа  $\chi^2$  // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2003. - Т.69. - № 1. - С.61-67.
8. Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В. Об ошибках и неверных действиях, совершаемых при использовании критериев согласия типа  $\chi^2$  // Измерительная техника. 2002. - № 6. - С. 5-11.
9. Р 50.1.033-2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа хи-квадрат. - М.: Изд-во стандартов. 2002. - 87 с.
10. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. О распределениях статистик непараметрических критериев согласия при оценивании по выборкам параметров наблюдаемых законов // Заводская лаборатория. 1998. Т. 64. - № 3. - С. 61-72.
11. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. О правилах проверки согласия опытного распределения с теоретическим // Методы менеджмента качества. Надежность и контроль качества. - 1999. № 11. - С. 34-43.
12. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез // Автометрия. 2001. - № 2. - С. 88-102.

13. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. - № 7. - С. 62-71.
14. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями Джонсона // Доклады СО АН ВШ. 2002. - № 1(5). - С.65-74.
15. Лемешко Б.Ю. Об ошибках, совершаемых при использовании непараметрических критериев согласия // Измерительная техника. 2004. - №2. - С.15-20.
16. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н., Французов А.В. К применению непараметрических критериев согласия для проверки адекватности непараметрических моделей // Автометрия. 2002. - № 2. - С.3-14.
17. Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В. Численное сравнение оценок максимального правдоподобия с одношаговыми и влияние точности оценивания на распределения статистик критериев согласия // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2003. - Т.69. - № 5. - С.62-68.
18. Р 50.1.037-2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии. - М.: Изд-во стандартов. 2002. - 64 с.
19. Лемешко Б.Ю., Маклаков А.А. Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями экспоненциального семейства // Автометрия. 2004. - №3. - С. 3-20.
20. Лемешко Б.Ю. О задаче идентификации закона распределения случайной составляющей погрешности измерений // Метрология. 2004. № 7.- С.8-17.
21. Лемешко Б.Ю., Гильдебрант С.Я., Постовалов С.Н. К оцениванию параметров надежности по цензурированным выборкам // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. - № 1. - С. 52-64.
22. Лемешко Б.Ю. О некоторых вопросах оценивания параметров распределений и проверки гипотез по цензурированным выборкам // Методы менеджмента качества. 2001. - № 4. - С.32-38.
23. Лемешко Б.Ю., Помадин С.С. Корреляционный анализ наблюдений многомерных случайных величин при нарушении предположений о нормальности // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. - Т.5. - № 3. - С.115-130.
24. Лемешко Б.Ю., Помадин С.С. Проверка гипотез о математических ожиданиях и дисперсиях в задачах метрологии и контроля качества при вероятностных законах, отличающихся от нормального // Метрология. 2004. № 4.- С.3-15.
25. Лемешко Б.Ю. Робастные методы оценивания и отбраковка аномальных измерений // Заводская лаборатория. - 1997. - Т.63. - № 5. - С. 43-49.
26. Лемешко Б.Ю. Группирование наблюдений как способ получения робастных оценок // Надежность и контроль качества. - 1997. - № 5. - С. 26-35.
27. Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В. Построение оптимальных  $L$ -оценок параметров сдвига и масштаба распределений по выборочным квантилям // Сибирский журнал индустриальной математики. 2001. - Т.4. - № 2. - С. 166-183.
28. Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В. Оптимальные  $L$ -оценки параметров сдвига и масштаба распределений по выборочным квантилям // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2004. - Т.70. - №1. - С. 54-66.
29. Лемешко Б.Ю., Миркин Е.П. Критерии Бартлетта и Кокрена в измерительных задачах при вероятностных законах, отличающихся от нормального // Измерительная техника. 2004. (в печати)
30. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Расширение области применения критериев типа Граббса, используемых при отбраковке аномальных измерений // Измерительная техника. 2004. (в печати)