# Аналитический обзор критериев проверки случайности и отсутствия тренда

И. В. Веретельникова, Б. Ю. Лемешко
*Новосибирский государственный технический университет*

***Аннотация* – Для множества параметрических и непараметрических критериев, предназначенных для проверки гипотез о случайности или об отсутствии тренда, методами статистического моделирования исследованы распределения статистик, соответствующие справедливости проверяемой гипотезы, в зависимости от объемов выборок. Предложена и реализована процедура интерактивного моделирования распределений статистик критериев, что позволило корректно применять соответствующие критерии в условиях нарушения стандартных предположений. Приводятся результаты сравнительного анализа мощности критериев по отношению к конкурирующим гипотезам с различными моделями линейного тренда, делаются выводы о предпочтительности использования тех или иных критериев.**

***Ключевые слова* – гипотеза о случайности, тренд, статистическое моделирование, статистический критерий, параметрический критерий, непараметрический критерий, мощность критерия.**

## I. ВВЕДЕНИЕ

ПРИЗНАКОМ НАЛИЧИЯ в наблюдаемой случайной последовательности измерений некоторой неслучайной закономерности может являться отклонение проверяемой гипотезы о случайности или об отсутствии тренда. Для проверки такого рода гипотез в разное время предложено множество параметрических и непараметрических критериев. Однако имеющиеся источники не позволяют судить о преимуществах тех или иных критериев. Существующие работы не содержат четких рекомендаций, очерчивающих область применения и предпосылки, выполнение которых обеспечивает корректность статистических выводов при использовании рассматриваемых критериев.

Достаточно полный перечень критериев, ориентированных на проверку гипотезы о случайности и об отсутствии тренда, представлен в работе [1]. Ее можно рассматривать как справочное пособие, охватывающее достаточно широкое множество критериев проверки статистических гипотез. Однако книга [1] не дает ответа на сформулированные выше вопросы. Более того, пользоваться ею надо осторожно из-за большого числа погрешностей, допущенных в описаниях критериев и в примерах их применения.

Предположение о нормальном законе распределения шума является предпосылкой корректного применения параметрических критериев. Данное предположение далеко не всегда выполняется на практике. Использование непараметрических критериев опирается на асимптотические распределения статистик этих критериев. При ограниченных объемах выборок распределения статистик параметрических и непараметрических критериев могут существенно отличаться от соответствующих предельных и асимптотических распределений статистик. В случае непараметрических критериев проблемы применения зачастую усугубляется ярко выраженной дискретностью распределений статистик.

Целью данной работы, с одной стороны, явилось желание исследовать действительные свойства и особенности применения различных критериев случайности и отсутствия тренда. В этом плане работа представляет собой продолжение исследований, результаты которых приведены в [2,3]. С другой стороны, работа посвящена реализации возможности использования множества критериев проверки случайности и отсутствия тренда и обеспечению корректности статистических выводов при применении указанных критериев в условиях нарушения стандартных предположений. Последнее подразумевает исследование распределения статистики применяемого критерия в соответствующих нестандартных условиях в интерактивном режиме проведения статистического анализа и последующее использование полученного распределения статистики при принятии решения о результатах проверки гипотезы (для вычисления *p-value*).

## II. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ

При проверке отсутствия тренда в математическом ожидании задача формулируется следующим образом. Предполагается, что наблюдается временной ряд значений $x_1, x_2, ..., x_n$ взаимно независимых случайных величин с математическими ожиданиями $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ и одинаковыми (но неизвестными) дисперсиями. Проверяется гипотеза $H_0:\ \mu_i = \mu,\ i = 1, 2, \ldots, n$, о том, что все выборочные значения принадлежат к одной генеральной совокупности со средним $\mu$, против конкурирующей гипотезы о наличии тренда $H_1$: $|\mu_{i+1} - \mu_i| > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Аналогично формулируется задача об отсутствии тренда в характеристиках рассеяния.

*1. Критерий автокорреляции*

Если выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайна, то значение каждого ее элемента не должно зависеть от величины предшествующего и последующего членов. Для проверки этой независимости используется статистика [4]

$$r_{1,n} = \frac{n\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + n x_1 x_n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} .$$

При справедливости проверяемой гипотезы статистика $r_{1,n}$ распределена асимптотически нормально с математическим ожиданием и дисперсией

$$E[r_{1,n}] = -\frac{1}{n-1}, \; D[r_{1,n}] = \frac{n(n-3)}{(n+1)(n-1)^2} .$$

Применяя критерий, обычно используют нормализованную статистику

$$r_{1,n}^* = \frac{r_{1,n} - E[r_{1,n}]}{\sqrt{D[r_{1,n}]}} . \qquad (1)$$

Гипотеза о случайности (об отсутствии тренда) отклоняется при больших по модулю значениях статистики (1). Критерий автокорреляции относится к параметрическим критериям.

Нормализующими преобразованиями статистики этого критерия являются статистики Морана (2), Люнга-Бокса (3) и Дюффа-Роя (4) [1]:

$$r_{1,n}^M = (n-1)^{1/2} \frac{n\, r_{1,n} + 1}{n-2} ; \qquad (2)$$

$$r_{1,n}^{LB} = \left[\frac{n(n+2)}{n-1}\right]^{1/2} r_{1,n} ; \qquad (3)$$

$$r_{1,n}^{DR} = \left[\frac{n-1}{n(n-2)}\right]^{1/2} (n\, r_{1,n} + 1) . \qquad (4)$$

Проверяемая гипотеза отклоняется при больших и малых значениях статистик критериев.

*2. Модификация критерия автокорреляции*

В [5[5]] рассматривается модификация критерия, статистика которого представляет собой сумму оценок коэффициентов корреляции первого и второго порядков:

$$r_{1,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \bar{x})(x_{i+1} - \bar{x}) + \sum_{i=1}^{n-2}(x_i - \bar{x})(x_{i+2} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} .$$

При справедливости $H_0$ распределение статистики $r_{1,2}$ асимптотически нормально с математическим ожиданием и дисперсией:

$$E[r_{1,2}] = -\frac{2n-3}{n(n-1)} ,$$

$$D[r_{1,2}] = \frac{2n^4 - 13n^3 + 15n^2 + 28n - 34}{n^2(n+1)(n-1)^2} .$$

Нормализованная статистика имеет вид

$$r_{1,2}^* = \frac{r_{1,2} - E[r_{1,2}]}{\sqrt{D[r_{1,2}]}} . \qquad (5)$$

Гипотеза $H_0$ отклоняется при больших по модулю значениях статистики.

*3. Критерий Вальда-Вольфовитца*

Статистика критерия Вальда-Вольфовитца [6] базируется на коэффициенте сериальной корреляции и имеет вид

$$R_1 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + x_n x_1 .$$

Величина $R_1$ распределена асимптотически нормально с математическим ожиданием

$$E[R_1] = (S_1^2 - S_2)/(n-1)$$

и дисперсией

$$D[R_1] = \frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + \frac{(S_1^2 - S_2)^2}{(n-1)^2} - \\ - \frac{S_1^4 - 4S_1^2 S_2 + 4S_1 S_3 + S_2^2 - 2S_4}{(n-1)(n-2)} ,$$

где $S_r = x_1^r + \ldots + x_n^r$.

Нормализованная статистика

$$R_1^* = \frac{R_1 - E[R_1]}{\sqrt{D[R_1]}} \qquad (6)$$

асимптотически распределена по стандартному нормальному закону $N(0,1)$.

Критерий Вальда-Вольфовитца – параметрический критерий. Гипотеза $H_0$ отклоняется при больших по модулю значениях статистики.

*4. Ранговый критерий Вальда-Вольфовитца*

Пусть $R_i$ – ранг измерения $x_i$ в упорядоченном по возрастанию ряду значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Статистика рангового критерия сериальной корреляции Вальда-Вольфовитца имеет вид [6[6]]:

$$R = \sum_{i=1}^{n-1}\left(R_i - \frac{n+1}{2}\right)\left(R_{i+1} - \frac{n+1}{2}\right).$$

Распределение статистики $R$ асимптотически нормально с параметрами

$$E[R] = 0 , \; D[R] = \frac{n^2(n+1)(n-3)(5n+6)}{720} .$$

Гипотеза $H_0$ отклоняется при больших по модулю значениях статистики

$$R^* = \frac{R}{\sqrt{D[R]}}. \qquad (7)$$

*5. Критерий инверсий*

Инверсия имеет место, если в выборке значений $x_1, x_2, ..., x_n$, записанных в порядке их появления, за некоторым значением $x_i$ следует меньшее по величине, т.е. $x_i > x_j$, где $i < j \le n$. Статистикой критерия случайности является общее число инверсий $I$ в выборке $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ [7].

Гипотеза о случайности не отклоняется, если $I_{\alpha/2} < I < I_{1-\alpha/2}$. Возможное количество инверсий зависит от объема выборки. Математическое ожидание и дисперсия статистики $I$ имеют вид $E[I] = n(n-1)/4$, $D[I] = (2n^3 + 3n^2 - 5n)/72$ [7]. Нормализованная статистика

$$I^* = \frac{I - E[I]}{\sqrt{D[I]}} \qquad (8)$$

приближенно описывается стандартным нормальным законом. Гипотеза $H_0$ отклоняется при больших по модулю значениях статистики $\left|I^*\right| \ge U_{1-\alpha/2}$.

Критерий инверсий непараметрический, и закон распределения случайных составляющих $x_i$ не влияет на распределение его статистики.

Иногда рассматривают критерий со статистикой $T$, которая определяет число *обратных инверсий* ($x_i < x_j$, $i < j$), или критерий со статистикой $K = T - I$.

*6. Критерий Кокса-Стюарта*

Непараметрический критерий Кокса-Стюарта [8[8]] может использоваться для проверки последовательности измерений на предмет наличия тренда и в среднем, и в дисперсии.

Для проверки гипотезы об отсутствии тренда в средних значениях по выборке объема $n$ используется критерий со статистикой

$$S_1 = \sum_{i=1}^{[n/2]} (n - 2i + 1) h_{i,n-i+1},$$

где $h_{i,j} = 1$, если $x_i > x_j$, и $h_{i,j} = 0$, если $x_i \le x_j$ ($i < j$).

Нормализованная статистика

$$S_1^* = \frac{S_1 - E[S_1]}{\sqrt{D[S_1]}}, \qquad (9)$$

где $E[S_1] = \frac{n^2}{8}$, $D[S_1] = \frac{n(n^2-1)}{24}$, при справедливости проверяемой гипотезы $H_0$ приближенно описывается стандартным нормальным законом.

*7. Критерии Фостера-Стюарта*

Данный непараметрический критерий может применяться для проверки гипотез об отсутствии тренда как в средних значениях, так и в дисперсиях. Для проверки гипотезы об отсутствии тренда в средних значениях используется критерий со статистикой [9] $d = \sum_{i=2}^{n} d_i$, где $d_i = u_i - l_i$; $u_i = 1$, если $x_i > x_{i-1},\ x_{i-2},\ ...,\ x_1$, иначе $u_i = 0$; $l_i = 1$, если $x_i < x_{i-1},\ x_{i-2},\ ...,\ x_1$, иначе $l_i = 0$; область значений $-(n-1) \le d \le n-1$.

При отсутствии тренда нормализованная статистика

$$t = \frac{d}{\hat{\sigma}_d}, \qquad (10)$$

$$\hat{\sigma}_d = \sqrt{\mu} \approx \sqrt{2\ln n - 0{,}8456},$$

приближенно описываются распределением Стьюдента с $\nu = n$ степенями свободы. Проверяемая гипотеза $H_0$ отклоняется при большом по модулю значению статистки (10).

*8. Критерий Бартелса*

Пусть в последовательности $n$ измерений $R_i$ – ранг $i$-го наблюдения $x_i$. Бартелсом [10] был предложен ранговый критерий случайности ряда, основанный на статистике

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(R_i - R_{i+1})^2}{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2}.$$

Проверяемая гипотеза $H_0$ отклоняется при больших по модулю значениях статистики

$$B^* = \frac{B - E[B]}{\sqrt{D[B]}} = \frac{B - 2}{2\sqrt{5/(5n+7)}}, \qquad (11)$$

которая при отсутствии тренда приближенно подчиняется стандартному нормальному закону.

*9. Критерий Холлина*

Предложенный Холлином знаково-ранговый критерий основан на статистике [11]

$$r = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=2}^{n} \delta\left[(x_i - \tilde{x})(x_{i-1} - \tilde{x})\right] R_i R_{i-1}, \qquad (12)$$

где $k$ – коэффициент, зависящий от объема выборки (рекомендуемые значения $k$ приведены в Табл. I); $\tilde{x}$ – медиана вариационного ряда

$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$; $R_i$ – ранг величины $z_i = |x_i - \tilde{x}|$ в упорядоченном по возрастанию ряду значений $z_1 \le z_2 \le \ldots \le z_n$;

$$\delta(y) = \begin{cases} 1, & y > 0; \\ -1, & y < 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

ТАБЛИЦА I

ЗНАЧЕНИЯ $k$ ДЛЯ РАНГОВО-ЗНАКОВОГО КРИТЕРИЯ ХОЛЛИНА

| $n$ | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 | 200 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 10.11 | 36.95 | 140.62 | 851.62 | 3370 | 13407 | 53480 |

Ряд значений $x_i$ признается случайным, если $|r| < r_\alpha$. Критические значения $r_\alpha$ можно найти, например, в [1].

*10. Критерий Рамачандрана-Ранганатана*

Данный непараметрический критерий учитывает не только количество, но и длины серий (число элементов в сериях). Статистика критерия [1] имеет вид

$$RR = \sum_j j^2 n_j ,$$

где $j$ – длина серии, $n$ – объем выборки, $n_j$ – количество серий длины $j$.

Гипотеза о случайности отвергается при больших значениях статистики $RR$.

## III. Результаты экспериментов

Распределение статистики критерия автокорреляции $r^*_{1,n}$ быстро сходится к асимптотическому закону. На практике отличием распределения статистики (1) от стандартного нормального закона можно пренебречь $n > 30$ (см. Рис. 1).

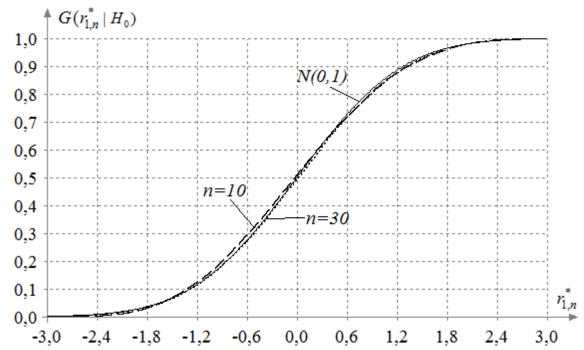


Рис. 1. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики (1) критерия автокорреляции

При сильной асимметричности закона распределения случайных величин (например, в случае показательного закона) распределение статистики становится отличным от "классического" (см. Рис. 2). В то же время, асимметричность закона влияет на распределение статистики менее значимо, чем "тяжесть" хвостов. В случае принадлежности выборок $x_1$, ..., $x_n$ асимметричным законам экстремальных значений (минимального или максимального) распределения статистики практически не отличаются от "классического".

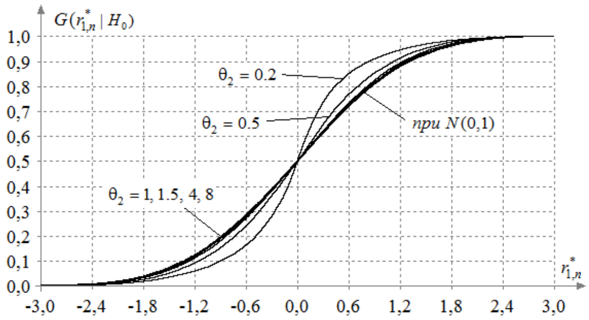


Рис. 2. Функции распределения статистики (1) в зависимости от параметра формы обобщенно нормального закона (13) при $n = 25$

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left( -\left( \frac{|x-\theta_0|}{\theta_1} \right)^{\theta_2} \right) \quad (13)$$

Исследование распределения статистики Льюнга-Бокса показало, что оно очень медленно сходится к стандартному нормальному закону. Использование нормального закона для определения достигаемого уровня значимости при ограниченных объёмах выборок приводит к большим ошибкам, а значит к неверным выводам.

Распределения статистик Морана и Дюффа-Роя достаточно хорошо согласуются со стандартным нормальным законом при $n > 40$ и при $n > 17$, соответственно. При использовании истинных распределений статистик результат проверки гипотезы по всем критериям приведет к одному и тому же достигаемому уровню значимости $P\{S > S^*\}$; относительно заданной конкурирующей гипотезы мощность критериев будет одинакова.

Сходимость распределения статистики модифицированного критерия автокорреляции (5) к стандартному нормальному закону $\mathrm{N}(0,1)$ при выполнении стандартного предположения иллюстрирует Рис. 3. Исследования показали, что отличием распределения статистики (5) от стандартного нормального закона можно пренебречь лишь при $n > 200$. Отклонения распределения статистики от стандартного нормального закона являются существенными при асимметричности наблюдаемых законов и "тяжелых хвостах".

Исследование распределений статистики критерия Вальда-Вольфовитца (6) в зависимости от объема выборки для случая выполнения предположения о нормальности анализируемых выборок показало согласие распределения статистики $R_1^*$ со стандартным нормальным законом при $n > 20$. При нарушении основного предположения о нормальности входных данных можно сделать вывод об относительной устойчивости распределения статистики, что иллюстрирует Рис. 4. Отклонения распределения статистики от стандартного нормального закона становятся существенными при асимметричности наблюдаемых законов и “тяжелых хвостах”.

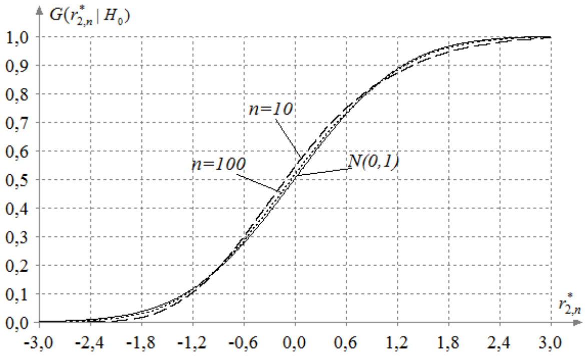


Рис. 3. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики (5)

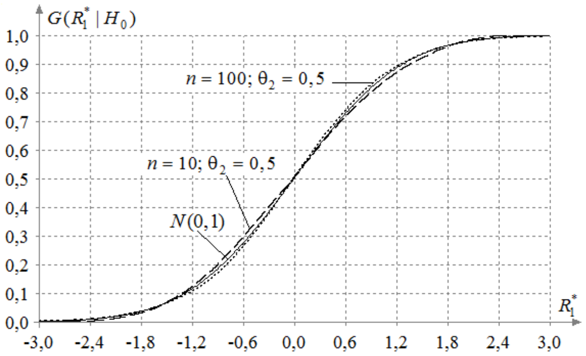


Рис. 4. Функции распределения статистики (6) в зависимости от параметра формы обобщенно нормального закона (13) при $n = 25$

Распределение статистики (7) рангового критерия Вальда-Вольфовитца смещено по отношению к асимптотическому и очень медленно сходится к стандартному нормальному закону (см. Рис. 5). Даже при $n$=700 согласие с N(0,1) не достигается. Дискретностью же распределения статистики можно практически пренебречь.

Использование стандартного нормального закона в качестве предельного распределения может привести к существенной ошибке при принятии решения. Для предотвращения ошибочных суждений целесообразно использовать действительное распределение статистики, которое может быть получено в результате моделирования при заданном объеме выборки и при конкретном законе распределения наблюдаемой случайной величины. Такое моделирование для всех рассмотренных в работе критериев реализовано в развиваемой программной системе «Интервальная статистика для Windows».

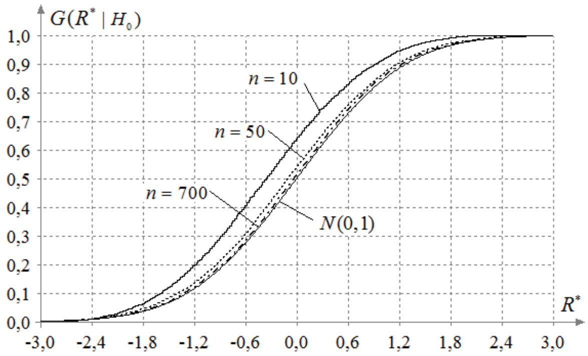


Рис. 5. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики (7)

В результате исследования распределений статистики $R^*$ при различных объемах выборок $n$ нами предложена модификация. Распределение модифицированной статистики

$$R^{**} = R^* + 1.1216 n^{-0.523}$$

хорошо согласуется со стандартным нормальным законом уже при $n > 10$.

При объемах выборок $n \geq 30$ дискретностью распределения статистики нормированного критерия инверсий $I^*$ можно практически пренебречь и опираться на стандартный нормальный закон как на распределение статистики.

При малых объемах выборок $n$ распределение статистики Кокса-Стюарта (9) является дискретным и сильно отличается от стандартного нормального закона (см. Рис. 6). При $n > 40$ отличием распределения статистики (9) от стандартного нормального закона можно практически пренебречь.

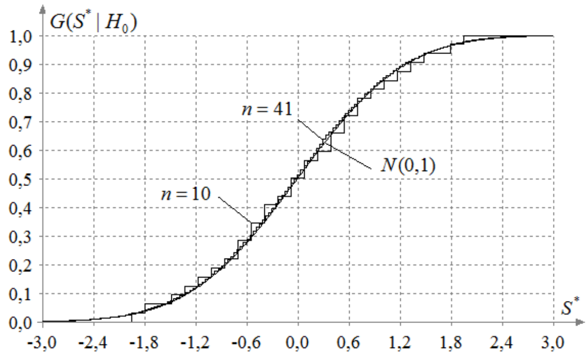


Рис. 6. Сходимость к стандартному нормальному закону функции распределения статистики (9) критерия Кокса-Стюарта для обнаружения тренда в средних

Если реальные объемы выборок меньше 40, для вычисления достигнутого уровня значимости, соответствующего полученному значению статистики $S_1^*$, целесообразно использовать истинное распределение статистики. которое при данном объеме выборки $n$ может находиться в результате моделирования.

Как показали исследования, даже при достаточно больших объемах выборок ( $n = 100,\ 200$ ) дискретные распределения статистик $t$ Фостера-Стюарта существенно отличаются от распределения Стьюдента с $n$ степенями свободы. Например, Рис. 7 иллюстрирует функции распределения статистики (10).

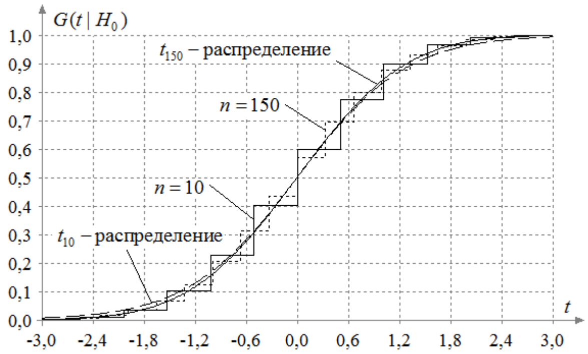


Рис. 7. Функции распределения статистики (10) при различных объемах выборок

Показано, что распределение статистики (11) непараметрического критерия Бартелса достаточно быстро сходится к стандартному нормальному закону, и при $n > 10$ отличием его от стандартного нормального закона практически можно пренебречь.

Распределения статистики (12) критерия в зависимости от объема выборки показаны на Рис. 8. Распределения статистики критерия не являются симметричными относительно 0. Поэтому при использовании критерия необходимо иметь в виду, что вследствие асимметричности распределения статистики использование представленных в [1] процентных точек может приводить к ошибочным отклонениям справедливой гипотезы о случайности.

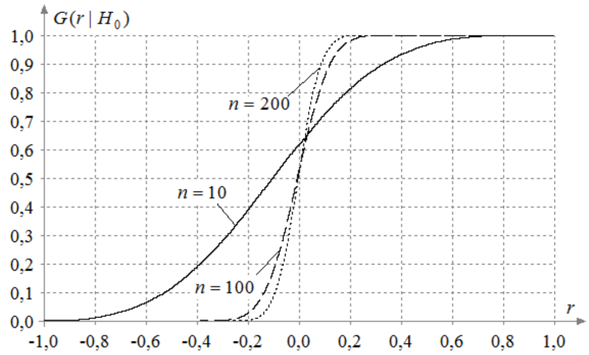


Рис. 8.Функции распределения статистики критерия Холлина (12) при различных объемах выборок

В случае симметричности существенные отклонения наблюдаемого закона от нормального практически не влияют на распределения статистики критерия. Однако асимметричность закона распределения ошибок сильно сказывается на распределении статистики критерия (свойство непараметричности теряется!).

Дискретные распределения статистики критерия Рамачандрана-Ранганатана существенно зависят от объема выборки.

## IV. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мощность критериев сравнивалась на небольших объемах выборок $n$=10, 25, 50, 100. Эмпирические распределения статистик критериев, соответствующие проверяемой и конкурирующим гипотезам, по которым находились оценки мощности, для получения приемлемой точности строились по 1 000 000 испытаниям.

Анализ мощности критериев проводился для ситуации принадлежности наблюдаемых случайных величин нормальному закону. Проверяемой гипотезе $H_0$ соответствует выполнение предположения о независимости наблюдаемых случайных величин (отсутствие тренда). В качестве конкурирующих гипотез рассматривались различные ситуации при наличии тренда в средних.

Наличие линейного тренда в наблюдаемых величинах моделировалось в соответствии с соотношением

$$x_i = a \cdot t + \xi_i$$

где $\xi_i$ представляют собой независимые случайные величины, распределённые по заданному закону, $t \in [0,1]$. Справедливой проверяемой гипотезе $H_0$ соответствует значение параметра $a = 0$.

Величины $x_i$ вычислялись в соответствии с выражением $x_i = a \cdot (i-1)\Delta t + \xi_i$, где шаг $\Delta t$ определялся как $\Delta t = 1/n$ в зависимости от объема выборки $n$. Псевдослучайные величины $\xi_i$ генерировались в соответствии со стандартным нормальным законом. Исследовалась мощность критериев относительно конкурирующих гипотез с линейным трендом, задаваемым параметром $a$ = 0.5; 4. Соответствующие конкурирующие гипотезы обозначены в дальнейшем как $H_1$, $H_2$. Примеры временных рядов при тренде с параметром $a = 0.5$ и $a = 4$ при объеме выборки $n = 100$ приведены на Рис. 9.

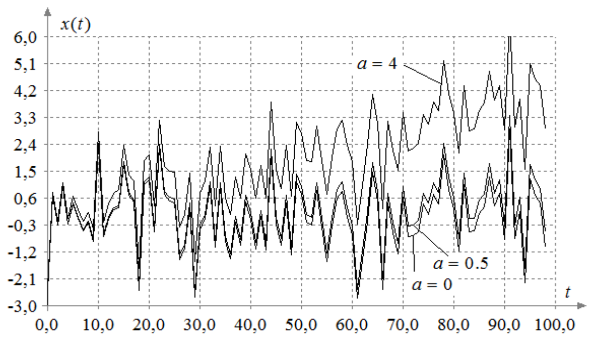


Рис. 9. Линейный тренд при $a = 0,\ 0.5,\ 4$

Полученные оценки мощности критериев относительно конкурирующих гипотез $H_1$, $H_2$, для ряда объемов выборок приведены в Табл. II − VII.

При линейном тренде критерий автокорреляции значительно проигрывает по мощности своей модификации, представляющей собой сумму коэффициентов корреляции первого и второго порядка (см. Табл. II).

Мощность критерия Вальда-Вольфовитца также несколько ниже мощности его непараметрического аналога (см. Табл. III).

ТАБЛИЦА II
МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЯ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ И ЕГО МОДИФИКАЦИИ

| $n$ | α | Кр. автокорреляции | | Модифицированный кр. автокорреляции | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $H_1$ | $H_2$ | $H_1$ | $H_2$ |
| 10 | 0.1 | 0.103 | 0.295 | 0.109 | 0.708 |
| | 0.05 | 0.051 | 0.175 | 0.056 | 0.570 |
| | 0.025 | 0.026 | 0.097 | 0.029 | 0.435 |
| | 0.01 | 0.011 | 0.043 | 0.012 | 0.273 |
| 25 | 0.1 | 0.105 | 0.837 | 0.113 | 0.980 |
| | 0.05 | 0.053 | 0.739 | 0.059 | 0.958 |
| | 0.025 | 0.027 | 0.631 | 0.031 | 0.921 |
| | 0.01 | 0.011 | 0.483 | 0.013 | 0.851 |
| 50 | 0.1 | 0.108 | 0.993 | 0.117 | 1.000 |
| | 0.05 | 0.056 | 0.985 | 0.062 | 1.000 |
| | 0.025 | 0.029 | 0.969 | 0.033 | 0.999 |
| | 0.01 | 0.012 | 0.935 | 0.014 | 0.997 |
| 100 | 0.1 | 0.113 | 1.000 | 0.125 | 1.000 |
| | 0.05 | 0.058 | 1.000 | 0.067 | 1.000 |
| | 0.025 | 0.030 | 1.000 | 0.036 | 1.000 |
| | 0.01 | 0.013 | 1.000 | 0.016 | 1.000 |

ТАБЛИЦА III
МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЯ ВАЛЬДА-ВОЛЬФОВИТЦА И РАНГОВОГО КРИТЕРИЯ ВАЛЬДА-ВОЛЬФОВИТЦА

| $n$ | α | Кр. Вальда-Вольфовитца | | Ранговый кр. Вальда-Вольфовитца | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $H_1$ | $H_2$ | $H_1$ | $H_2$ |
| 10 | 0.1 | 0.102 | 0.276 | 0.105 | 0.547 |
| | 0.05 | 0.051 | 0.156 | 0.052 | 0.400 |
| | 0.025 | 0.026 | 0.083 | 0.028 | 0.276 |
| | 0.01 | 0.010 | 0.035 | 0.011 | 0.143 |
| 25 | 0.1 | 0.105 | 0.835 | 0.107 | 0.921 |
| | 0.05 | 0.053 | 0.735 | 0.055 | 0.862 |
| | 0.025 | 0.027 | 0.624 | 0.028 | 0.787 |
| | 0.01 | 0.011 | 0.475 | 0.012 | 0.673 |
| 50 | 0.1 | 0.108 | 0.993 | 0.109 | 0.997 |
| | 0.05 | 0.056 | 0.984 | 0.056 | 0.993 |
| | 0.025 | 0.029 | 0.969 | 0.029 | 0.986 |
| | 0.01 | 0.012 | 0.935 | 0.012 | 0.968 |
| 100 | 0.1 | 0.113 | 1.000 | 0.112 | 1.000 |
| | 0.05 | 0.058 | 1.000 | 0.059 | 1.000 |
| | 0.025 | 0.030 | 1.000 | 0.030 | 1.000 |
| | 0.01 | 0.013 | 1.000 | 0.013 | 1.000 |

Критерии инверсий со статистиками $I, I^*$ немного уступают по мощности критерию инверсий со статистиками $K, T$ (см. Табл. IV). Мощность критерия весьма высока даже при небольшом объеме выборки и быстро стремится к единице.

ТАБЛИЦА IV
МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЯ ИНВЕРСИЙ

| $n$ | α | Кр. инверсий *I, I** | | Кр. инверсий *K, T* | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $H_1$ | $H_2$ | $H_1$ | $H_2$ |
| 10 | 0.1 | 0.102 | 0.883 | 0.128 | 0.926 |
| | 0.05 | 0.068 | 0.822 | 0.089 | 0.883 |
| | 0.025 | 0.026 | 0.637 | 0.037 | 0.740 |
| | 0.01 | 0.015 | 0.517 | 0.022 | 0.637 |
| 25 | 0.1 | 0.173 | 1.000 | 0.185 | 1.000 |
| | 0.05 | 0.097 | 0.999 | 0.104 | 1.000 |
| | 0.025 | 0.054 | 0.998 | 0.059 | 0.998 |
| | 0.01 | 0.027 | 0.994 | 0.031 | 0.995 |
| 50 | 0.1 | 0.253 | 1.000 | 0.258 | 1.000 |
| | 0.05 | 0.163 | 1.000 | 0.167 | 1.000 |
| | 0.025 | 0.100 | 1.000 | 0.103 | 1.000 |
| | 0.01 | 0.053 | 1.000 | 0.055 | 1.000 |
| 100 | 0.1 | 0.401 | 1.000 | 0.403 | 1.000 |
| | 0.05 | 0.283 | 1.000 | 0.285 | 1.000 |
| | 0.025 | 0.195 | 1.000 | 0.196 | 1.000 |
| | 0.01 | 0.116 | 1.000 | 0.117 | 1.000 |

ТАБЛИЦА V
МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЕВ ФОСТЕРА-СТЮАРТА, КОКСА-СТЮАРТА

| $n$ | α | Кр. Кокса-Стюарта | | Кр. Фостера-Стюарта | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $H_1$ | $H_2$ | $H_1$ | $H_2$ |
| 10 | 0.1 | 0.114 | 0.515 | 0.100 | 0.491 |
| | 0.05 | 0.057 | 0.190 | 0.050 | 0.301 |
| | 0.025 | 0.028 | 0.041 | 0.025 | 0.176 |
| | 0.01 | 0.012 | 0.003 | 0.010 | 0.063 |
| 25 | 0.1 | 0.154 | 0.984 | 0.104 | 0.679 |
| | 0.05 | 0.084 | 0.953 | 0.050 | 0.530 |
| | 0.025 | 0.049 | 0.906 | 0.025 | 0.418 |
| | 0.01 | 0.020 | 0.812 | 0.010 | 0.270 |
| 50 | 0.1 | 0.206 | 1.000 | 0.112 | 0.756 |
| | 0.05 | 0.123 | 1.000 | 0.055 | 0.636 |
| | 0.025 | 0.075 | 0.999 | 0.029 | 0.537 |
| | 0.01 | 0.039 | 0.997 | 0.011 | 0.401 |
| 100 | 0.1 | 0.308 | 1.000 | 0.117 | 0.798 |
| | 0.05 | 0.210 | 1.000 | 0.059 | 0.699 |
| | 0.025 | 0.135 | 1.000 | 0.033 | 0.610 |
| | 0.01 | 0.077 | 1.000 | 0.012 | 0.480 |

Отметим, что распределения статистик критериев Фостера-Стюарта, Кокса-Стюарта дискретны, что затрудняет оценивание мощности и анализ результатов. Поэтому в ходе исследований распределения этих критериев аппроксимировались нормальным законом, т.е. была получена “асимптотическая мощность”.

Обобщая результаты для обнаружения линейного тренда в среднем можно рекомендовать следующие критерии (критерии расположены в порядке предпочтения):

Инверсий ( $K, T, I^*, I$ ) $\succ$ Кокса-Стюарта ( $S_1^*$ ) $\succ$ модификация критерия автокорреляции ( $r_{1,2}^*$ )

$\succ$ Бартелса ($B^*$) $\succ$ ранговой сериальной корреляции Вальда-Вольфовитца ($R^*$), Холлина ($r$) $\succ$ Рамачандрана-Ранганатана ($RR$) $\succ$ сериальной корреляции Вальда-Вольфовитца ($R_1^*$), автокорреляции ($r_{1,n}^*$) $\succ$ Фостера-Стюарта ($t$).

ТАБЛИЦА VI
МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЯ БАРТЕЛСА

| $n$ | $\alpha$ | Кр. Бартелса | |
|---|---|---|---|
| | | $H_1$ | $H_2$ |
| 10 | 0.1 | 0.105 | 0.626 |
| | 0.05 | 0.053 | 0.493 |
| | 0.025 | 0.028 | 0.381 |
| | 0.01 | 0.012 | 0.250 |
| 25 | 0.1 | 0.107 | 0.937 |
| | 0.05 | 0.055 | 0.890 |
| | 0.025 | 0.028 | 0.827 |
| | 0.01 | 0.012 | 0.728 |
| 50 | 0.1 | 0.109 | 0.998 |
| | 0.05 | 0.056 | 0.995 |
| | 0.025 | 0.029 | 0.989 |
| | 0.01 | 0.012 | 0.975 |
| 100 | 0.1 | 0.112 | 1.000 |
| | 0.05 | 0.059 | 1.000 |
| | 0.025 | 0.031 | 1.000 |
| | 0.01 | 0.013 | 1.000 |

ТАБЛИЦА VII
МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЕВ ХОЛЛИНА, РАМАЧАНДРАНА-РАНГАНАТАНА

| $n$ | $\alpha$ | Кр. Холлина | | Кр. Рамачандрана-Ранганатана | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $H_1$ | $H_2$ | $H_1$ | $H_2$ |
| 10 | 0.1 | 0.105 | 0.540 | 0.109 | 0.510 |
| | 0.05 | 0.053 | 0.414 | 0.056 | 0.422 |
| | 0.025 | 0.027 | 0.289 | 0.029 | 0.359 |
| | 0.01 | 0.011 | 0.148 | 0.011 | 0.282 |
| 25 | 0.1 | 0.111 | 0.887 | 0.130 | 0.846 |
| | 0.05 | 0.059 | 0.806 | 0.070 | 0.808 |
| | 0.025 | 0.029 | 0.714 | 0.039 | 0.779 |
| | 0.01 | 0.011 | 0.593 | 0.017 | 0.737 |
| 50 | 0.1 | 0.113 | 0.997 | 0.133 | 0.948 |
| | 0.05 | 0.057 | 0.993 | 0.072 | 0.936 |
| | 0.025 | 0.028 | 0.984 | 0.042 | 0.928 |
| | 0.01 | 0.011 | 0.972 | 0.019 | 0.914 |
| 100 | 0.1 | 0.116 | 1.000 | 0.139 | 0.984 |
| | 0.05 | 0.058 | 1.000 | 0.076 | 0.980 |
| | 0.025 | 0.030 | 1.000 | 0.047 | 0.977 |
| | 0.01 | 0.012 | 1.000 | 0.020 | 0.974 |

## V. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для того, чтобы обеспечить корректность статистических выводов при использовании рассмотренных критериев в ситуациях, когда либо нарушаются стандартные предположения, обеспечивающие правомерность применения классических результатов, либо отсутствуют сведения об “истинном” распределении статистики используемого критериев (в конкретных условиях и при конкретном объеме выборки), реализован интерактивный режим исследования распределений статистик с последующим использованием полученного распределения при принятии решения о результатах проверки гипотезы (для вычисления $p$-value).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию №2014/138, проект №1689.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
[2] Лемешко Б.Ю., Комиссарова А.С., Щеглов А.Е. Применение некоторых критериев проверки гипотез случайности и отсутствия тренда // Метрология. 2010. № 12. – С.3-25.
[3] Лемешко Б.Ю., Комиссарова А.С., Щеглов А.Е. Свойства и мощность некоторых критериев случайности и отсутствия тренда // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 1(46). – С. 53-66.
[4] Knoke J.D. Testing for randomness against autocorrelation: The parametric case // Biometrica. 1975. – V.62. – P.571-575.
[5] Knoke J.D. Testing for randomness against autocorrelation: Alternative tests // Biometrica. 1977. – V. 64, №3. – P.523-529.
[6] Wald A., Wolfowitz J. An exact test for randomness in the non-parametric case based on serial correlation // AMS. 1943. V. 14. P. 378-388.
[7] Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1970.
[8] Cox D.R., Stuart A. Quick sign tests for trend in location and dispersion // Biometrica. 1955. – V.42. – P.80-95.
[9] Foster F.G., Stuart A. Distribution-free tests in time series dated on the breaking of records // JRSS. 1954. – V. B16, №1. – P.1-22.
[10] Bartels R. The rank version of von Neumann’s ratio test for randomness // JASA. 1982. V. 77, №377. P. 40-46.
[11] Hollin M., Laforet A., Merald G. Distribution-free tests against dependence: signed or unsigned ranks? // J. of Stat. Planning and Inference. 1990. V. 24. – P. 151-165.

**Веретельникова**
**Ирина Викторовна**
Магистрант кафедры прикладной математики НГТУ

**Борис Юрьевич Лемешко**
Профессор кафедры прикладной математики НГТУ, д.т.н.