Обзор свойств критериев равномерности

П. Ю. Блинов, Б. Ю. Лемешко
Новосибирский государственный технический университет

***Аннотация* – Рассматривается широкий набор критериев, используемых для проверки гипотезы о равномерности распределения вероятностей. Методами статистического моделирования исследуются распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы. Проводится сравнительный анализ мощности критериев. Делаются выводы о предпочтительности использования тех или иных критериев в зависимости от наличия определенных конкурирующих гипотез.**

***Ключевые слова* – критерий согласия, критерий равномерности, равномерное распределение, мощность критерия, вариационный ряд.**

I. Введение

Проверке гипотез о принадлежности выборки равномерному закону распределения посвящено множество работ, в которых авторами предложено множество статистических критериев. Обилие критериев обусловлено широким использованием модели равномерного закона в приложениях. А частота использования не в последнюю очередь определяется тем, что применение такой простой модели во многих ситуациях позволяет найти решение задачи с опорой только на аналитические методы.

Проверка равномерности по существу представляет собой проверку согласия наблюдаемой выборки $x_1, ..., x_n$ с равномерным законом. Заметим, что если $x_1, ..., x_n$ принадлежит некоторому закону с функцией распределения вероятностей $F(x)$, то случайная величина $y_i = F(x_i)$ распределена равномерно на интервале $[0,1]$.

Равномерный закон зачастую используется для описания ошибок измерений некоторых приборов или измерительных систем. Моделирование псевдослучайных величин в соответствии с различными параметрическими законами, что является крайне необходимым в системах статистического моделирования, опирается на датчики равномерных псевдослучайных величин. Всё это объясняет повышенный интерес к выбору простых в вычислительном отношении и эффективных критериев проверки гипотез о принадлежности анализируемых выборок равномерному закону.

Наличие множества критериев ставит перед практиками непростую задачу выбора, так как имеющаяся в публикациях информация не позволяет однозначно отдать предпочтение некоторому определенному критерию.

В настоящей работе множество рассматриваемых критериев исследовалось методами статистического моделирования. При исследовании распределений статистик критериев количество экспериментов, осуществляемых при статистическом моделировании, как правило, принималось равным 1 660 000. Такое число экспериментов позволяет, с одной стороны, проследить качественную картину, отражающую изменение распределений статистик в зависимости от различных факторов, с другой – обеспечить приемлемую точность получаемых оценок мощности и искомых вероятностей. Компьютерные методы анализа дают возможность выявить достоинства и недостатки отдельных критериев, оценить при каких объемах выборок отличием действительных распределений статистик (при справедливости проверяемой гипотезы) от асимптотических (предельных) распределений статистик можно практически пренебречь, позволяют провести сравнительный анализ мощности критериев относительно различных конкурирующих гипотез, выделить наиболее предпочтительные критерии.

II. Постановка задачи

Пусть $Rav(0,1)$ — равномерное распределение на интервале [0,1], $x_1, ..., x_n$ – заданные независимые наблюдения случайной величины. Проверяемая гипотеза имеет вид H_0: $X \in Rav(0,1)$. Гипотеза будет сложной, если по выборке определяется область определения равномерной случайной величины.

Во всех критериях используется порядковые статистики величины X (элементы $x_{(i)}$ вариационного ряда $x_{(1)} < x_{(2)} < ... < x_{(n)}$), которые в дальнейшем будем обозначать как U_i. Большинство рассмотренных критериев можно разбить на две группы. Статистики критериев первой группы предусматривают использование разностей последовательных значений вариационного ряда

$$D_i = U_i - U_{i-1},$$

где $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$, n – объем выборки.

В критериях второй группы используются разности порядковых статистик, соответствующих анализируемой выборке, и математического ожидания этой порядковой статистики (или их модификации).

III. ТЕОРИЯ

2.1. *Критерий Шермана*

Критерий Шермана [1,6,7] относится к первой группе критериев, использующей разности элементов вариационного ряда. Статистика критерия имеет вид

$$\omega_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\left|D_i - \frac{1}{n+1}\right|.$$

Гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики ω_n. При справедливости H_0 и больших n статистика ω_n приближенно подчиняется нормальному распределению. При $n \ge 20$ в критерии можно использовать нормализованную статистику

$$\omega_n^* = \frac{\omega_n - E[\omega_n]}{\sqrt{D[\omega_n]}},$$

где

$$E[\omega_n] = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$D[\omega_n] = \frac{2n^2 + n(n-1)^{n+2}}{(n+2)(n+1)^{n+2}} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+2},$$

которая при $n \to \infty$ сходится к стандартному нормальному закону [1,6,7]. В тех же источниках приводится ещё одна модификация статистики, задаваемая выражением

$$\tilde{\omega}_n = V - \frac{0{,}0955}{\sqrt{n}}\left(V^2 - 1\right),$$

где $$V = \frac{\omega_n - 0{,}3679\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}{\frac{0{,}2431}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{0{,}605}{n}\right)}.$$

Распределение модифицированной статистики ещё быстрее сходится к стандартному нормальному закону.

2.2. *Критерий Кимбелла*

Статистика критерия Кимбелла [8] похожа на статистику критерия Шермана и имеет вид

$$A = \sum_{i=1}^{n+1}\left(D_i - \frac{1}{n+1}\right)^2.$$

Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики A. Этот критерий по мощности примерно эквивалентен критерию Шермана. Распределения статистики критерия Кимбелла при различных объемах n представлены на Рис. 1.

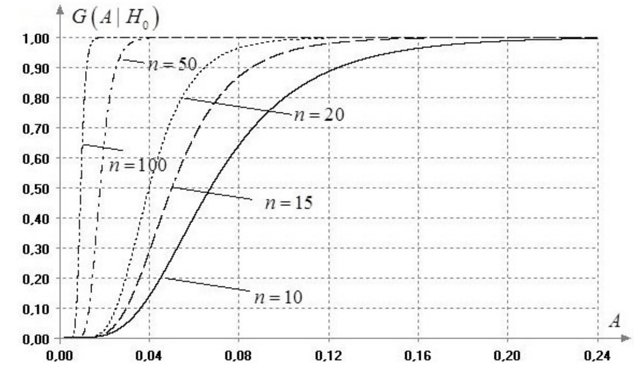


Рис. 1. Распределения статистики Кимбелла.

2.3. *Критерий Ченга-Спиринга*

Статистика критерия равномерности Ченга-Спиринга [9] вычисляется в соответствии с соотношением:

$$W_p = \frac{\left[\left(U_n - U_1\right)\frac{n+1}{n-1}\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \bar{U}\right)},$$

где разность $U_n - U_1$ представляет собой выборочный размах.

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 всегда выполняется [1,9]:

$$\frac{2(n+1)^2}{(n-1)^2} \ge W_p \ge \frac{4(n+1)^2}{n(n-1)^2} \quad \text{(для четных } n\text{)};$$

$$\frac{2(n+1)^2}{(n-1)^2} \ge W_p \ge \frac{4n(n+1)}{(n-1)^3} \quad \text{(для нечетных } n\text{)}.$$

Этот двусторонний критерий, как правило, не отличается большими мощностями, однако относительно конкурирующих законов близких к равномерному распределению и при достаточно больших объемах выборок показывает наибольшую мощность.

2.4. *Критерии Хегази-Грина*

Вид используемых в этих критериях статистик совпадает с используемыми в одноименных критериях нормальности [10]:

$$T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|U_i - \eta_i\right| \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \eta_i\right)^2.$$

В статистиках критериев используются разности порядковых статистик U_i и их математических ожиданий $\eta_i = E[U_i]$.

Критерии можно применять для случайных величин, распределенных на любом интервале $[a,b]$, но в этом случае необходимо в выражениях для статистик U_i заменить на $\dfrac{U_i - U_1}{U_n - U_1}$, а n – на $n-2$.

В итоге статистики принимают следующий вид:

$$T_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|y_i - \frac{i}{m+1}\right| \text{ и } T_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \frac{i}{m+1}\right)^2,$$

где $m = \begin{cases} n, & в случае\ \ y_i = U_i \in [0,1]; \\ n-2, & в случае\ \ y_i = \dfrac{U_i - U_1}{U_n - U_1}. \end{cases}$

В [10] предложены модификации статистик, в которых вместо математических ожиданий i-х порядковых статистик $\eta_i = \dfrac{i}{m+1}$ используются их модальные значения $\xi_i = \dfrac{i-1}{m+1}$, что связано с несимметричностью распределений порядковых статистик. Модифицированные статистики имеют вид:

$$T_1^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|y_i - \frac{i-1}{m+1}\right|; \ T_2^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \frac{i-1}{m+1}\right)^2.$$

Проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется по соответствующему критерию на уровне значимости α, если соответственно выполняются неравенства $T_1 < T_1(\alpha)$, $T_1^* < T_1^*(\alpha)$ или $T_2 < T_2(\alpha)$, $T_2^* < T_2^*(\alpha)$.

Для построения критических значений статистик существуют аппроксимации вида

$$T(\alpha) = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + \frac{c}{n},$$

коэффициенты a, b и c которых для соответствующих статистик при $\alpha = 0{,}95$ и $\alpha = 0{,}99$ приведены в Табл. I. Вычисляемые по этим выражениям критические значения совпадают со значениями, полученными методами статистического моделирования, с точностью до 2-3-х знаков после запятой.

ТАБЛИЦА I

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦЕНТОВ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ

Стат.	Уровень значимости α					
	0,95			0,99		
	a	b	c	a	b	c
T_1	0,0003	0,5876	-0,0425	-0,0070	0,8373	-0,2500
T_1^*	0,0064	0,5066	0,2364	-0,0090	0,7949	-0,0782
T_2	-0,0068	0,0783	0,2419	-0,0148	0,1701	0,2745
T_2^*	0,0214	0,0214	0,8212	0,0047	-0,0607	0,9330

Эти критерии демонстрируют неплохие мощности.

2.5. Критерий Янга

Критерий предназначен для проверки гипотезы о принадлежности выборок равномерному закону на отрезке длиной l. Статистика критерия Янга [11] в общем виде описывается формулой

$$M = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\min(D_i, D_{i+1}).$$

При $l = 1$ $M = \sum_{i=1}^{n}\min(D_i, D_{i+1})$. Так как значение l бывает известным далеко не всегда, принято использовать статистику вида

$$M^* = \frac{1}{U_n - U_1}\sum_{i=2}^{n-1}\min(D_i, D_{i+1}).$$

Распределение этой статистики, использующей выборочный размах, совпадает с распределением статистики M при замене n на $n-2$.

Критерий двусторонний, гипотеза H_0 отклоняется при больших и малых значениях статистики.

При $n \ge 15$ в критерии может использоваться статистика

$$\tilde{M} = 2(n+1)M\sqrt{\frac{3}{2n-1}} - n\sqrt{\frac{3}{2n-1}},$$

асимптотическим распределением, которой является стандартный нормальный закон [11]. Исследования показали, что это маломощный критерий.

2.6. Критерий Гринвуда-Кэсенберри-Миллера

Статистика критерия Гринвуда, используемого для проверки гипотезы о равномерности, имеет вид

$$G = (n+1)\sum_{i=1}^{n+1}(U_i - U_{i-1})^2.$$

Критические значения статистики данного критерия совпадают с критическими значениями одноименного критерия показательности, но с учетом замены n на $n-1$ [1,13].

Более предпочтительным по мощности [1] считается критерий Гринвуда-Кэсенберри-Миллера [12] со статистикой

$$Q = \sum_{i=1}^{n+1}(U_i - U_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^{n}(U_{i+1} - U_i)(U_i - U_{i-1}).$$

Недостатком критерия является то, что распределения статистики при справедливости проверяемой гипотезы H_0 зависят от объема выборок n.

2.7. Критерий Фроцини

В критерии проверки равномерности Фроцини [14] используется статистика

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left|U_i - \frac{i-0.5}{n}\right|,$$

где U_i – как и выше, элементы вариационного ряда, построенного по выборке $x_1, ..., x_n$. Этот критерий относится ко второй группе. Критические значения

978-4-4799-6019-4/14/$31.00 © 2014 IEEE

статистики, полученные методами статистического моделирования, представлены в Табл. II. При $n \geq 50$ критические значения статистики практически не меняются, что говорит о наличии предельного распределения.

ТАБЛИЦА II
КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ СТАТИСТИКИ КРИТЕРИЯ ФРОЦИНИ

n	Уровень значимости α				
	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99
3	0.3981	0.4345	0.4836	0.5596	0.6872
5	0.4027	0.4397	0.4895	0.5675	0.7161
7	0.4048	0.4423	0.4925	0.5726	0.7261
9	0.4060	0.4433	0.4938	0.5737	0.7330
10	0.4064	0.4439	0.4943	0.5743	0.7326
12	0.4070	0.4442	0.4951	0.5759	0.7373
15	0.4075	0.4451	0.4958	0.5768	0.7398
20	0.4083	0.4456	0.4966	0.5785	0.7428
50	0.4095	0.4472	0.4986	0.5808	0.7485
100	0.4100	0.4477	0.4991	0.5815	0.7506
200	0.4100	0.4477	0.4990	0.5816	0.7509

2.8. *“Сглаженный” Критерий Неймана-Бартона*

Критерий основан на отношении правдоподобия [15]. По элементам U_i вариационного ряда, построенного по выборке $x_1, ..., x_n$, вычисляют величины

$$V_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \pi_j \left(U_i - 0.5\right),$$

где $\pi_j(y)$ – полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке $[0,1]$. Как правило, ограничиваются использованием первых 4-х полиномов:

$$\pi_1(y) = 2\sqrt{3}y; \quad \pi_2(y) = \sqrt{5}\left(6y^2 - 0,5\right);$$

$$\pi_3(y) = \sqrt{7}\left(20y^3 - 3y\right);$$

$$\pi_4(y) = 3\left(70y^4 - 15y^2 + 0,375\right).$$

Статистики критерия имеет вид

$$N_K = \sum_{j=1}^{K} V_j^2 .$$

Проверяемая гипотеза H_0 о равномерности отклоняется при больших значениях статистик. Распределения статистик при $n = 200$ иллюстрирует Рис. 2.

В [16] показано, что при $n > 20$ распределения статистик хорошо аппроксимируются χ^2 – распределениями с K степенями свободы.

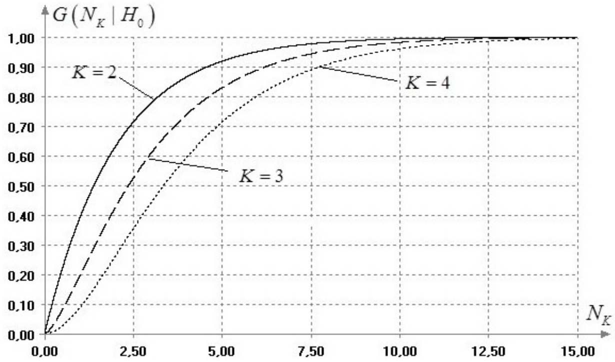


Рис. 2. Распределения статистики Неймана-Бартона N_K

2.9. *Критерии типа Колмогорова-Смирнова*

Для проверки равномерности используются критерии Колмогорова-Смирнова со статистиками D^+, D^-, D и критерий Купера V .

Статистики этих критериев имеют вид:

$$D^+ = \max_i \left(U_i - \frac{i}{n+1}\right), \quad D^- = \max_i \left(\frac{i}{n+1} - U_i\right),$$

$$D = \max\left(D^+, D^-\right), \quad V = D^+ + D^-.$$

Распределения статистик быстро сходятся к предельным, если их использовать в следующих модификациях:

$$\tilde{D}^+ = \left(D^+ + \frac{0,4}{n}\right)\left(\sqrt{n} + 0,2 + \frac{0,68}{\sqrt{n}}\right);$$

$$\tilde{D}^- = \left(D^- + \frac{0,4}{n}\right)\left(\sqrt{n} + 0,2 + \frac{0,68}{\sqrt{n}}\right);$$

$$\tilde{D} = \left(D + \frac{0,4}{n}\right)\left(\sqrt{n} + 0,2 + \frac{0,68}{\sqrt{n}}\right);$$

$$\tilde{V} = \left(V + \frac{1}{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1} + 0,1555 + \frac{0,24}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Распределения модифицированных статистик при $n = 200$ представлены на Рис. 3.

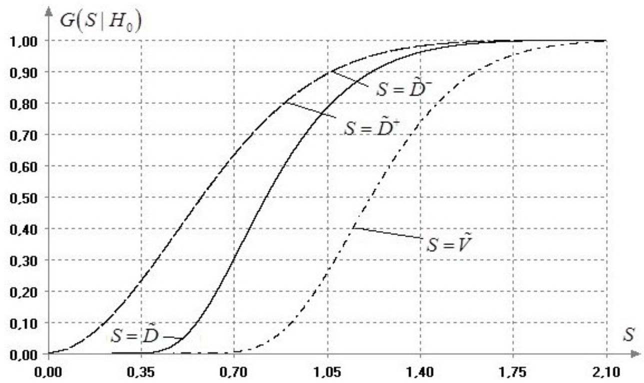


Рис. 3. Распределения статистик Колмогорова-Смирнова и Купера.

IV. Результаты экспериментов

Часть авторов приводит различные нормализующие преобразования статистик. При проверке гипотезы H_0 по критериям с нормализованной статистикой для вычисления достигаемых уровней значимости используется стандартный нормальный закон.

Использование асимптотических результатов на практике может оказаться неприемлемым при конечных объемах выборок n. Отличие действительного распределения статистики от асимптотического может быть существенным и привести к формированию некорректного статистического вывода.

Для проверки того, насколько хорошо действительные распределения статистик согласуются с асимптотическими, с использованием компьютерных технологий [5] были исследованы распределения 3-х нормализованных статистик: двух статистик критерия Шермана и статистики Янга. Кроме того, на согласие с χ^2-распределениями были исследованы распределения статистик критерия Неймана-Бартона. Количество испытаний в каждом случае составило 16 600. Полученные выборки статистик критериев проверялись на согласие с соответствующими предельными законами несколькими критериями согласия. Гипотеза о согласии не отвергалась при объемах выборок $n \geq 20$. Для нормализованной статистики критерия Шермана $\tilde{\omega}_n$ гипотеза о согласии не отвергалась при объеме выборок $n \geq 10$.

V. Обсуждение результатов

Оценки мощности критериев сравнивались при объемах выборок n=50, 100, 200. Эмпирические распределения статистик критериев, по которым находились оценки мощности, соответствующие проверяемой и конкурирующим гипотезам, для получения приемлемой точности строились по 1 660 000 испытаниям. В качестве проверяемой гипотезы H_0 рассматривался равномерный закон. В качестве конкурирующей гипотезы H_1 рассматривались бета-распределения I рода с функцией плотности

$$f(x) = \mathrm{B}(\theta_0, \theta_1)^{-1} x^{\theta_0 - 1} (1-x)^{\theta_1 - 1}$$

при значениях параметров θ_0 и θ_1 близких к 1, частным случаем которого при θ_0=1 и θ_1=1 является равномерный закон на интервале [0,1].

В таблицах III-V, где приведены оценки мощности критериев, можно заметить, что мощности либо $\tilde{D}^+$, либо $\tilde{D}^-$ принимают малые значения. Это связано с тем, что функции распределения, соответствующие конкурирующей гипотезе, лежат либо снизу равномерного распределения, либо сверху (см. Рис. 4), что не улавливают соответствующие статистики.

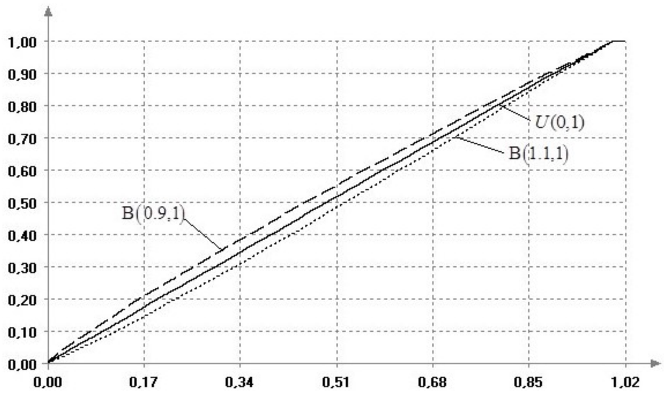


Рис. 4 – Функции распределения, соответствующие H_0 и H_1

Там же показаны мощности относительно конкурирующих законов $\mathrm{B}(1,2)$ и $\mathrm{B}(2,1)$, “симметрично” отклоняющихся от равномерного распределения. Эти Законы достаточно далеки от равномерного распределения, поэтому более заметны маломощные критерии и проблемы со статистиками $\tilde{D}^+$ и $\tilde{D}^-$.

В Табл. VI представлены оценки мощности критериев относительно конкурирующих гипотез, которым соответствуют распределения, лежащие выше или ниже равномерного закона (см. Рис. 5).

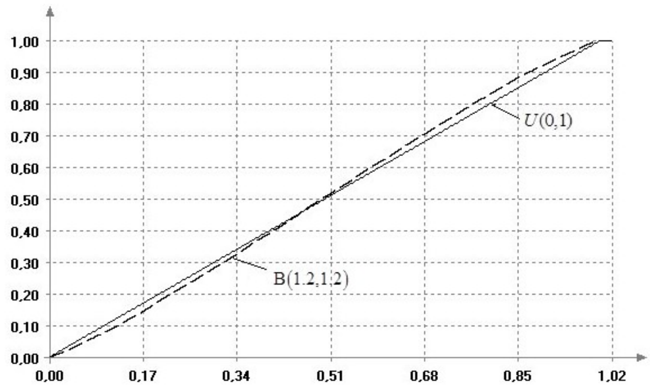


Рис. 5 – Функции распределения, соответствующие H_0 и H_1

Функции распределения $\mathrm{B}(1.05,1.05)$ и $\mathrm{B}(1.1,1.1)$ являются близкими к функции распределения равномерного и пересекают последнюю, поэтому критерии плохо распознают отличие. Приведенные оценки мощности получены уже при меньшем объеме моделирования 16 600, но для больших объемов выборок n=200 и n=1000. В данном случае большую мощность относительно других показали критерий Ченга-Спиринга и критерии Неймана-Бартона. Для критерия Ченга-Спиринга с целью уточнения и подтверждения результатов те же исследования выполнены при 1 660 000 испытаний. Полученные оценки мощности критерия отличались от оценок при 16 600 испытаний только в 3-4 знаке после запятой.

VI. Выводы и заключение

В ходе исследований были определены сильные и слабые стороны рассмотренных критериев. Показано, что не существует критерия, являющегося наиболее мощным относительно всех рассмотренных конкурирующих гипотез. В то же время, можно выделить группы критериев, перспективных для применения в случае альтернатив определенного вида.

Для конкурирующих гипотез, соответствующих законам далеких от равномерного, можно выделить критерии Хегази-Грина и критерии Неймана-Бартона. Среди критериев Неймана-Бартона большую мощность чаще демонстрировал критерий со статистикой, использующей два первых полинома Лагранжа. Среди критериев Хегази-Грина в одних случаях большую мощность показали модифицированные критерии, в других случаях – не модифицированные. В ситуациях, когда распределение, соответствующее конкурирующей гипотезе, однозначно лежит выше или ниже равномерного закона, большую мощность показывают критерии со статистиками T_1 и T_1^*, иначе – T_2 и T_2^*.

Хорошую мощность, сопоставимую с критериями Хегази-Грина и Неймана-Бартона, демонстрирует критерий Фроцини.

Из критериев типа Колмогорова-Смирнова предпочтительнее являются критерий со статистикой $\tilde{D}$ и критерий Купера $\tilde{V}$. Критерии со статистиками $\tilde{D}^+$ и $\tilde{D}^-$ имеет смысл применять только в случае альтернатив определенного вида.

Критерии Шермана, Кимбелла и Гринвуда-Кэсенберри-Миллера демонстрируют мощность меньшую, чем критерии $\tilde{D}$ и $\tilde{V}$.

Критерий Янга является маломощным практически относительно любых конкурирующих гипотез.

Критерий Ченга-Спиринга, как правило, демонстрирует малые мощности. Однако при близких к равномерному закону конкурирующих гипотезах и больших объемах выборок показывает наибольшую мощность. В подобной ситуации неплохие мощности так же у критериев Купера и Неймана-Бартона.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания (проект № 2.541.2014К).

Список литературы

[1] Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А.И. Кобзарь. – М : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

[2] Лемешко Б.Ю. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход : монография / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с.

[3] Лемешко Б.Ю. Лемешко С.Б., Постовалов С.Н. Мощность критериев согласия при близких альтернативах / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Измерительная техника. 2007. № 2. – С.22-27.

[4] Лемешко, Б.Ю. Распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке гипотез относительно бета-распределений / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // ДАН ВШ России. 2007. № 2(9). – С. 6-16.

[5] Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 120 с.

[6] Sherman B. A random variable related to the spacing of sample values / B. Sherman // The Annals of Mathematical Statistics. – 1950. – V.21, №3. – P. 339-361.

[7] Sherman B. Percentlles of the w_n statistic // The Annals of Mathematical Statistics. – 1957. – V.28, №1. – P. 257-261.

[8] Kimball B.F. Some basic theorems for developing tests of fit for the case of the non-parametric probability distribution function./ B.F. Kimball // The Annals of Mathematical Statistics. – 1947. – V.18, №1. – P. 540-548.

[9] Cheng S.W, A test to Identify the uniform distribution with applications / S.W. Cheng, F.A. Spiring // IEEE Trans. Reliability. – 1987. – V. R-36. – P. 98-105.

[10] Hegazy Y.A.S. Some new goodness-of-fit tests using order statistics / Y.A.S. Hegazy, J.R. Green // Applied Statistics. – 1975. – V.24, №3. – P. 299-308.

[11] Young D.L. The linear nearest neighbour statistic / D.L. Young // Biometrika. – 1982. – V.69, №2. – P. 477-480.

[12] Quesenberry C.P. Power studies of some tests for uniformity. / C.P. Quesenberry, F.L. Miller // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 1977. – V.5. – P. 169-191.

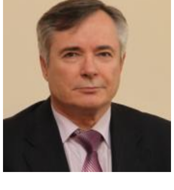
[13] Greenwood V. The statistical study of Infection disease / V. Greenwood // Journal of the Royal Statistical Society. – 1946. – TV.109. – P. 257-261

[14] Frozini B.V. On the distribution and power of goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric applications, “Goodness-of-fit” / B.V. Frozini, P. Revesz, K. Sarkadi //Amsterdam-Oxford-New York: North-Holland Publ. Comp. – 1987. – P. 133-154..

[15] Neyman J. “Smooth” tests for goodness-of-fit / J. Neyman // Scandinavisk Aktuarietidskrift. – 1937. – V.20. – P. 149-199.

[16] David F.N. On Neyman's „smooth” test for goodness-of-fit / F.N. David // Biometrika. – 1939. – V.31. – P. 191-199.

Павел Юрьевич Блинов
Магистрант кафедры прикладной математики НГТУ



Борис Юрьевич Лемешко
Профессор кафедры прикладной математики НГТУ, д.т.н.

ТАБЛИЦА III
МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЕВ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНКУРИРУЮЩИХ ГИПОТЕЗ (n=50, α=0.05)

	$B(0.9,1)$	$B(0.95,1)$	$B(0.99,1)$	$B(1.05,1)$	$B(1.1,1)$	$B(1,2)$	$B(2,1)$
ω_n	0.0607	0.0539	0.0506	0.0483	0.0485	0.2652	0.2656
A	0.0602	0.0538	0.0506	0.0484	0.0487	0.3530	0.3533
W_p	0.0530	0.0511	0.0502	0.0497	0.0501	0.1112	0.1114
T_1	0.0738	0.0566	0.0506	0.0516	0.0606	0.7698	0.7704
T_1^*	0.0706	0.0553	0.0503	0.0527	0.0628	0.7864	0.7870
T_2	0.0727	0.0563	0.0507	0.0516	0.0601	0.7569	0.7572
T_2^*	0.0694	0.0551	0.0503	0.0526	0.0622	0.7790	0.7795
M	0.0520	0.0509	0.0502	0.0495	0.0494	0.0879	0.0875
$\tilde{D}^+$	0.0249	0.0358	0.0469	0.0677	0.0892	0	0.7988
$\tilde{D}^-$	0.1041	0.0727	0.0539	0.0339	0.0228	0.7992	0
$\tilde{D}$	0.0694	0.0555	0.0505	0.0511	0.0582	0.6802	0.6803
$\tilde{V}$	0.0642	0.0552	0.0507	0.0479	0.0482	0.3458	0.3465
B_n	0.0722	0.0559	0.0504	0.0521	0.0616	0.7801	0.7807
Q	0.0645	0.0555	0.0508	0.0473	0.0470	0.3831	0.3835
N_2	0.0748	0.0579	0.0509	0.0496	0.0547	0.6686	0.6683
N_3	0.0742	0.0577	0.0510	0.0485	0.0516	0.5595	0.5593
N_4	0.0740	0.0579	0.0511	0.0476	0.0495	0.4890	0.4888

ТАБЛИЦА IV
МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЕВ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНКУРИРУЮЩИХ ГИПОТЕЗ (n=100, α=0.05)

	$B(0.9,1)$	$B(0.95,1)$	$B(0.99,1)$	$B(1.05,1)$	$B(1.1,1)$	$B(1,2)$	$B(2,1)$
ω_n	0.0622	0.0539	0.0505	0.0493	0.0513	0.5292	0.5291
A	0.0628	0.0543	0.0505	0.0495	0.0523	0.7288	0.7288
W_p	0.0569	0.0522	0.0502	0.0506	0.0536	0.3586	0.3589
T_1	0.1032	0.0634	0.0508	0.0578	0.0842	0.9943	0.9942
T_1^*	0.0994	0.0620	0.0507	0.0591	0.0867	0.9952	0.9951
T_2	0.1010	0.0629	0.0509	0.0576	0.0827	0.9937	0.9936
T_2^*	0.0972	0.0615	0.0506	0.0588	0.0852	0.9949	0.9948
M	0.0517	0.0506	0.0501	0.0498	0.0500	0.1156	0.1157
$\tilde{D}^+$	0.0155	0.0289	0.0450	0.0814	0.1246	0	0.9941
$\tilde{D}^-$	0.1466	0.0875	0.0560	0.0275	0.0146	0.9943	0
$\tilde{D}$	0.0925	0.0608	0.0507	0.0560	0.0767	0.9833	0.9833
$\tilde{V}$	0.0754	0.0577	0.0509	0.0500	0.0564	0.8798	0.8799
B_n	0.1014	0.0628	0.0507	0.0584	0.0855	0.9948	0.9947
Q	0.0680	0.0560	0.0508	0.0487	0.0518	0.8154	0.8151
N_2	0.0998	0.0632	0.0511	0.0542	0.0728	0.9904	0.9904
N_3	0.0964	0.0625	0.0511	0.0521	0.0655	0.9790	0.9792
N_4	0.0948	0.0627	0.0514	0.0506	0.0609	0.9622	0.9623

978-4-4799-6019-4/14/$31.00 © 2014 IEEE

Таблица V

МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЕВ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНКУРИРУЮЩИХ ГИПОТЕЗ (n=200, α=0.05)

	$\mathrm{B}(0.9,1)$	$\mathrm{B}(0.95,1)$	$\mathrm{B}(0.99,1)$	$\mathrm{B}(1.05,1)$	$\mathrm{B}(1.1,1)$	$\mathrm{B}(1,2)$	$\mathrm{B}(2,1)$
ω_n	0.0680	0.0546	0.0504	0.0514	0.0580	0.9708	0.9709
A	0.0701	0.0553	0.0504	0.0522	0.0628	0.9992	0.9992
W_p	0.0776	0.0577	0.0506	0.0557	0.0759	0.9708	0.9709
T_1	0.2552	0.0980	0.0523	0.0884	0.2072	1	1
T_1^*	0.2501	0.0964	0.0520	0.0899	0.2112	1	1
T_2	0.2474	0.0959	0.0520	0.0868	0.2006	1	1
T_2^*	0.2416	0.0942	0.0519	0.0883	0.2049	1	1
M	0.0514	0.0504	0.0501	0.0502	0.0507	0.1574	0.1577
$\tilde{D}^+$	0.0038	0.0155	0.0403	0.1293	0.2678	0	1
$\tilde{D}^-$	0.3191	0.1409	0.0626	0.0149	0.0039	1	0
$\tilde{D}$	0.2152	0.0881	0.0517	0.0804	0.1743	1	1
$\tilde{V}$	0.1392	0.0704	0.0512	0.0512	0.0608	1	1
B_n	0.2528	0.0973	0.0521	0.0892	0.2093	1	1
Q	0.0787	0.0578	0.0506	0.0523	0.0655	1	1
N_2	0.2384	0.0917	0.0520	0.0785	0.1758	1	1
N_3	0.2214	0.0872	0.0520	0.0720	0.1504	1	1
N_4	0.2081	0.0843	0.0521	0.0671	0.1328	1	1

ТАБЛИЦА VI

МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЕВ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНКУРИРУЮЩИХ ГИПОТЕЗ (n=200; 1000, α=0.05)

$n=200$	$\mathrm{B}(1.05,1.05)$	$\mathrm{B}(1.1,1.1)$	$n=1000$	$\mathrm{B}(1.05,1.05)$	$\mathrm{B}(1.1,1.1)$
ω_n	0.049	0.052	ω_n	0.052	0.064
A	0.049	0.053	A	0.054	0.072
W_p	0,072	0,138	W_p	0.191	0.568
T_1	0.047	0.048	T_1	0.056	0.103
T_1^*	0.048	0.050	T_1^*	0.060	0.115
T_2	0.050	0.054	T_2	0.060	0.106
T_2^*	0.050	0.056	T_2^*	0.062	0.115
M	0.050	0.056	M	0.051	0.052
$\tilde{D}^+$	0.050	0.056	$\tilde{D}^+$	0.063	0.116
$\tilde{D}^-$	0.050	0.055	$\tilde{D}^-$	0.063	0.113
$\tilde{D}$	0.057	0.090	$\tilde{D}$	0.062	0.117
$\tilde{V}$	0,050	0,050	$\tilde{V}$	0.110	0.347
B_n	0.048	0.051	B_n	0.057	0.109
Q	0.048	0.051	Q	0.056	0.084
N_2	0.063	0.116	N_2	0.148	0.480
N_3	0.057	0.095	N_3	0.123	0.413
N_4	0.052	0.087	N_4	0.120	0.415