Система Имитационного Моделирования и Исследования Функций от Случайных Величин

Павел Ю. Блинов, Борис Ю. Лемешко
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

***Аннотация* – Рассматриваются вопросы исследования законов распределения одномерных функций от систем независимых случайных величин. Реализована подсистема, позволяющая осуществлять имитационное моделирование различных функций от систем независимых случайных величин и исследовать эти законы. Возможности системы демонстрируются на ряде примеров, иллюстрирующих эффективность предлагаемого подхода.**

***Ключевые слова* – функция от случайных величин, закон распределений функции случайных величин, имитационного моделирование, программная система.**

I. Введение

В практике статистического анализа возникает существенно больше постановок задач, чем предлагается решений в классической математической статистике.

Одной из широко востребованных на практике является задача определения закона распределения вероятностей функции от случайных величин и систем случайных величин. Решение этой задачи с применением классического аппарата представляет собой трудоёмкий процесс, а найти решение в аналитическом виде удается в исключительных случаях. Осложняют проблему разнообразие законов распределения и различная сложность функций от случайных величин.

Особенно часто с необходимостью построения закона распределения функции от случайных величин сталкиваются в задачах анализа погрешности косвенных измерений, когда измеряемая величина Y представляет собой функцию от случайных величин $Y = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n)$. Нахождение закона распределения Y при известных законах распределения случайных величин X_i аналитическими методами и в аналитическом виде удается в исключительных случаях. Использование линеаризации функций $\varphi(\cdot)$ и построение приближенных решений, как правило, грешит серьёзными погрешностями.

В качестве реального выхода из тупиковой ситуации при поиске закона $F(y)$ можно рассматривать использование статистического моделирования. Методами статистического моделирования при соответствующей программной поддержке исследование закона распределения $F(y)$ в зависимости от законов распределения $F_i(x_i)$ принципиальных трудностей не вызывает [1-3].

Одной из целей настоящей работы явилась разработка программного комплекса, позволяющего в рамках системы ISW [4] моделировать эмпирические законы распределения для произвольных функции от случайных величин, подчиняющихся различным законам распределений, с дальнейшим их исследованием.

Для достижения поставленной цели последовательно решались следующие задачи:

- изучение методов и подходов, используемых для моделирования псевдослучайных величин в методе статистических испытаний;
- моделирование законов распределений одномерных функций независимых случайных величин;
- отладка синтаксического и семантического анализатора введенных выражений;
- исследование полученных в результате моделирования законов распределений.

При выполнении работы использовался аппарат статистического моделирования, теории вероятностей и математической статистики.

Цель данной статьи заключается в демонстрации возможностей системы моделирования при исследовании законов распределений функций от случайных величин. Рассматриваемые примеры связаны с известными теоретическими результатами, демонстрируют изменение закономерностей в зависимости от законов распределения аргументов.

При исследовании распределений функций от случайных величин количество экспериментов, осуществляемых при статистическом моделировании, как правило, принималось равным $N = 1.66 \times 10^6$. Такое число экспериментов позволяет, с одной стороны, проследить качественную картину, отражающую изменение распределений в зависимости от различных факторов, с другой – обеспечить приемлемую точность получаемых вероятностей.

II. Постановка задачи

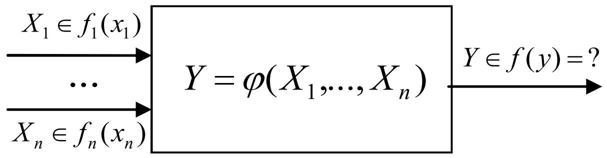
Достаточно часто решаемой задачей в метрологии является задача определения вероятностных характеристик величины Y, непосредственно недоступной для измерения, на основании доступных для многократных измерений величин $X_1, X_2, ..., X_k$. Предполагается, что

$$Y = \varphi\left(X_1, X_2, ..., X_k\right),$$

978-1-5090-4069-8/16/$31.00 ©2016 IEEE

где $\varphi(\cdot)$ – некоторая известная функция. Или в векторной форме $Y=\varphi\left(\overline{X}\right)$. Предполагается, что закон распределения вектора $\overline{X}$ или, в случае независимости его компонент, законы распределения $X_1, X_2, ..., X_k$ (или законы распределения ошибок измерений) известны или могут быть найдены (построены) на основании результатов статистического анализа.

Функция $Y=\varphi\left(\overline{X}\right)$ может быть результатом функционирования некоторой информационно-измерительной системы.



Классический подход определения закона распределения вероятностей функции от системы случайных величин предполагает знание совместной плотности распределения $f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$ системы случайных величин $X_1, X_2, ..., X_k$.

Пусть $X:\Omega \to R^n$ – случайная величина, и $g:R^n \to R^n$ – непрерывно дифференцируемая функция такая, что $J_g\left(x\right)\neq 0$, $\forall x \in R^n$, где $J_g\left(x\right)$ – якобиан функции g в точке x. Тогда случайная величина также абсолютно непрерывна, и её плотность имеет вид:

$$f_Y\left(y\right)=f_X\left(g^{-1}\left(y\right)\right)\left|J_{g^{-1}}\left(y\right)\right|.$$

Однако аналитическое решение с помощью классического подхода удается найти только для некоторых частных случаев $Y=\varphi\left(\overline{X}\right)$ и $f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$.

В работе рассматриваются различные функции от систем случайных величин, подчиняющихся различным законам распределения. Основным методом нахождения распределения интересующей нас случайной величины Y является метод статистических испытаний. Подсистема моделирования функций от случайных величин реализована в состава ISW [4].

III. Практическое применение

Ниже рассмотрен ряд примеров, демонстрирующих возможности и точность статистического моделирования при исследовании законов распределения функций от случайных величин.

Для проверки принадлежности моделируемых распределений $F(y)$ теоретическим законам использовались различные критерии согласия. В приводимых таблицах представлены результаты применения только критериев χ^2 Пирсона, Колмогорова, ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова (КМС), Ω^2 Андерсона–Дарлинга (АД).

Рассмотрим некоторые примеры моделирования функций от одной случайной величины.

Пример 1. $Y=X^n$, где $X \in U(0,1)$. В данном случае теоретическим законом распределения Y является бета-распределение первого рода с параметрами формы $1/n$ и 1.

В таблице 1 представлены достигнутые уровни значимости p_{value} при проверке согласия полученных в результате моделирования эмпирических распределений $F_N(y)$ соответствующим бета-распределениям.

ТАБЛИЦА I
РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ СОГЛАСИЯ ВЫБОРКИ ВЕЛИЧИНЫ $Y=X^n$ С БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ I-РОДА

n	Y	χ^2 Пирсона	ω^2 КМС
0.1	$B(10,1)$	0.493	0.880
0.2	$B(5,1)$	0.426	0.089
0.5	$B(2,1)$	0.494	0.291
2	$B(0.5,1)$	0.807	0.803
3	$B(0.333,1)$	0.668	0.789
5	$B(0.2,1)$	0.422	0.614
n	Y	Колмогорова	Ω^2 АД
0.1	$B(10,1)$	0.837	0.820
0.2	$B(5,1)$	0.072	0.098
0.5	$B(2,1)$	0.395	0.313
2	$B(0.5,1)$	0.892	0.819
3	$B(0.333,1)$	0.899	0.796

Пример 2. Проверим свойство зеркальной симметричности бета-распределения. Если $X \in B(k,n)$, то $Y=(1-X)\in B(n,k)$, где n и k - параметры формы. Результаты проверки принадлежности $F_N(y)$ к $B(n,k)$ приведены в таблице 2.

ТАБЛИЦА II
РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ СОГЛАСИЯ ВЫБОРКИ ВЕЛИЧИНЫ Y С СООТВЕСТВУЮЩИМИ БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

X	Y	χ^2 Пирсона	ω^2 КМС
$B(0.8,1)$	$B(1,0.8)$	0.493	0.880
$B(5,3)$	$B(3,5)$	0.886	0.914
$B(10,25)$	$B(25,10)$	0.234	0.458
X	Y	Колмогорова	Ω^2 АД
$B(0.8,1)$	$B(1,0.8)$	0.837	0.820
$B(5,3)$	$B(3,5)$	0.938	0.887
$B(10,25)$	$B(25,10)$	0.702	0.435

Проанализировав предыдущие два примера можно прийти к следующей связи между равномерным распределением и бета-распределением I рода.

Пример 3. $Y=1-X^n$, где $X \in U(0,1)$. Теоретическим законом распределения Y является бета-распределение первого рода с параметрами 1 и $1/n$. В таблице 3 представлены значения p_{value} при проверке согласия моделируемых $F_N(y)$ с соответствующими бета-распределениями.

ТАБЛИЦА III

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ СОГЛАСИЯ ВЫБОРКИ ВЕЛИЧИНЫ $Y = 1 - X^n$ С БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ I-РОДА

n	Y	χ^2 Пирсона	ω^2 КМС
0.1	$B(1,10)$	0.181	0.535
0.2	$B(1,5)$	0.942	0.998
0.5	$B(1,2)$	0.604	0.873
2	$B(1,0.5)$	0.651	0.661
3	$B(1,0.333)$	0.588	0.885
5	$B(1,0.2)$	0.653	0.652
n	Y	Колмогорова	Ω^2 АД
0.1	$B(1,10)$	0.590	0.651
0.2	$B(1,5)$	0.999	0.986
0.5	$B(1,2)$	0.869	0.938
2	$B(1,0.5)$	0.495	0.642
3	$B(1,0.333)$	0.758	0.811

Пример 4. $Y = |X - \mu| / \sigma$, где $X \in Laplace(\mu,\sigma)$. Теоретическим законом распределения Y является стандартный экспоненциальный закон. В таблице 4 представлены значения p_{value} при проверке согласия моделируемых $F_N(y)$ с экспоненциальным законом.

ТАБЛИЦА IV

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ СОГЛАСИЯ ВЕЛИЧИНЫ Y СО СТАНДАРТНЫМ ПОКАЗАТЕЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Случайная величина	χ^2 Пирсона	ω^2 КМС
$\lvert Laplace(0,1)\rvert$	0.731	0.883
$\lvert Laplace(2,3)-2\rvert / 3$	0.749	0.488
$\lvert Laplace(3,5)-3\rvert / 5$	0.973	0.845
$\lvert Laplace(10,7)-10\rvert / 7$	0.103	0.266
Случайная величина	Колмогорова	Ω^2 АД
$\lvert Laplace(0,1)\rvert$	0.925	0.907
$\lvert Laplace(2,3)-2\rvert / 3$	0.559	0.639
$\lvert Laplace(3,5)-3\rvert / 5$	0.828	0.820
$\lvert Laplace(20,10)-20\rvert / 10$	0.219	0.349

Пример 5. $Y = \mu - \sigma \log \frac{e^{-X}}{1-e^{-X}}$, где $X \in Exp(0,1)$. Теоретическим законом распределения Y является логистический закон с параметрами μ и σ. В таблице 5 представлены значения p_{value} при проверке принадлежности моделируемых $F_N(y)$ логистическому закону.

ТАБЛИЦА V

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ СОГЛАСИЯ ВЫБОРКИ ВЕЛИЧИНЫ Y С ЛОГИСТИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

μ	σ	Y	χ^2 Пирсона	ω^2 КМС
0	1	$Log(0,1)$	0.786	0.880
-1	0.5	$Log(-1,0.5)$	0.292	0.395
5	3	$Log(5,3)$	0.528	0.521
10	0.5	$Log(10,0.5)$	0.641	0.539
2.5	50	$Log(2.5,50)$	0.973	0.933
μ	λ	Y	Колмогорова	Ω^2 АД
0	1	$Log(0,1)$	0.837	0.820
-1	0.5	$Log(-1,0.5)$	0.541	0.358
5	3	$Log(5,3)$	0.471	0.657
10	0.5	$Log(10,0.5)$	0.764	0.512
2.5	50	$Log(2.5,50)$	0.956	0.914

Далее рассмотрим примеры с функциями от двух случайных, нормально распределенных величин.

Пример 6. Пусть $Y = X_1/X_2$, где $X_1 \in N(0,\sigma_1)$ и $X_2 \in N(0,\sigma_2)$ являются независимыми. Теоретическим законом распределения Y является распределение Коши с нулевым параметром сдвига. В таблице 6 приведены результаты проверки согласия полученных в результате моделирования эмпирических распределений $F_N(y)$ величины Y с соответствующим распределением Коши.

ТАБЛИЦА VI

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ СОГЛАСИЯ ВЕЛИЧИНЫ $Y = X_1 / X_2$ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КОШИ

X_1	X_2	Y	χ^2 Пирсона	ω^2 КМС
$N(0,1)$	$N(0,1)$	$C(0,1)$	0.884	0.841
$N(0,1)$	$N(0,2)$	$C(0,0.5)$	0.804	0.962
$N(0,2)$	$N(0,1)$	$C(0,2)$	0.878	0.638
$N(0,3)$	$N(0,7)$	$C(0,0.428)$	0.828	0.829
$N(0,1.5)$	$N(0,10)$	$C(0,0.15)$	0.386	0.162
$N(0,10)$	$N(0,2)$	$C(0,5)$	0.659	0.966
$N(0,1)$	$N(0,20)$	$C(0,0.05)$	0.980	0.920
Y	Y	Y	Колмогорова	Ω^2 АД
$N(0,1)$	$N(0,1)$	$C(0,1)$	0.828	0.660
$N(0,1)$	$N(0,2)$	$C(0,0.5)$	0.982	0.142
$N(0,2)$	$N(0,1)$	$C(0,2)$	0.537	0.706
$N(0,3)$	$N(0,7)$	$C(0,0.428)$	0.804	0.902
$N(0,1.5)$	$N(0,10)$	$C(0,0.15)$	0.235	0.202
$N(0,10)$	$N(0,2)$	$C(0,5)$	0.974	0.965
$N(0,1)$	$N(0,20)$	$C(0,0.05)$	0.811	0.950

Значения p_{value} по всем критериям свидетельствуют об очень хорошем согласии полученного в результате моделирования эмпирического распределения с распределением Коши.

Пример 7. $Y = X_1/X_2$, где $X_1, X_2 \in N(1,1)$ и независимы. В этом случае законом распределения Y уже не является распределение Коши. Оценивание параметров распределения Коши с плотностью $f(y) = C(\theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_1}{\pi\left(\theta_1^2 + (y-\theta_2)^2\right)}$ по смоделированной выборке дает оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметров масштаба $\theta_1 = 0.6962$ и сдвига $\theta_2 = 0.7536$. Полученное в результате моделирования эмпирическое распределение $F_N(y)$ и аппроксимирующее распределение Коши представлены на рисунке 1.

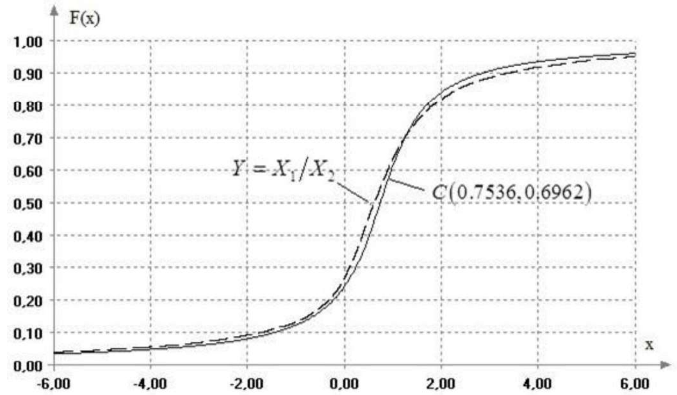


Рис. 1 – Распределение $Y = X_1/X_2$ при $X_1, X_2 \in N(1,1)$

Пример 8. Это более общий случай, когда $Y = X_1/X_2$, а $X_1 \in N(\mu_1, \sigma_1)$ и $X_2 \in N(\mu_2, \sigma_2)$ независимы. В таблице 7 приведены результаты проверки согласия смоделированных выборок с подобранными нормальными законами. При равенстве дисперсий с ростом абсолютной величины μ_2 по сравнению с μ_1 распределение $F_N(y)$ стремится к нормальному закону. В случае существенного превышения параметра μ_2 над μ_1 ($\mu_1 < \mu_2$), как можно видеть, нормальный закон становится хорошей моделью для случайной величины Y.

При незначительном превышении μ_2 над μ_1 эмпирическое распределение имеет более тяжелый правый хвост. С ростом дисперсии X_2 распределение случайной величины Y начинает отклоняться от нормального закона. В этих же условиях при росте дисперсии X_1 по сравнению с дисперсией X_2 распределение Y хорошо аппроксимируется нормальным законом.

На рисунке 2 представлен вид $F(y)$ в случае существенного превышения абсолютного значения μ_1 над μ_2.

Если стандартные отклонения $\sqrt{D[X_i]}$ много меньше $E[X_i]$ и распределения X_i близки к нормальному закону, а такие ситуации не редки, то распределение $Y = X_1/X_2$ хорошо аппроксимируется нормальным законом. В таком случае и линеаризация функции $\varphi(\cdot)$, часто используемая на практике, не приводит к большим погрешностям.

ТАБЛИЦА VII

ПРОВЕРКА СОГЛАСИЯ ВЕЛИЧИНЫ $Y = X_1 / X_2$ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Случайная величина	Проверяемый закон	χ^2 Пирсона	ω^2 КМС
$N(1,1)/N(10,1)$	$N(0.1, 0.1)$	0	0
$N(1,1)/N(25,1)$	$N(0.04, 0.04)$	0.001	0.067
$N(1,10)/N(25,1)$	$N(0.04, 0.4)$	0.228	0.881
$N(1,1)/N(25,4)$	$N(0.04, 0.04)$	0	0
$N(1,1)/N(37,1)$	$N(0.027, 0.027)$	0.050	0.196
$N(1,1)/N(50,1)$	$N(0.02, 0.02)$	0.617	0.699
Случайная величина	Проверяемый закон	Колмогорова	Ω^2 АД
$N(1,1)/N(10,1)$	$N(0.1, 0.1)$	0	0
$N(1,1)/N(25,1)$	$N(0.04, 0.04)$	0.054	0.004
$N(1,10)/N(25,1)$	$N(0.04, 0.4)$	0.876	0.379
$N(1,1)/N(25,4)$	$N(0.04, 0.04)$	0	0
$N(1,1)/N(37,1)$	$N(0.027, 0.027)$	0.218	0.077
$N(1,1)/N(50,1)$	$N(0.02, 0.02)$	0.818	0.683

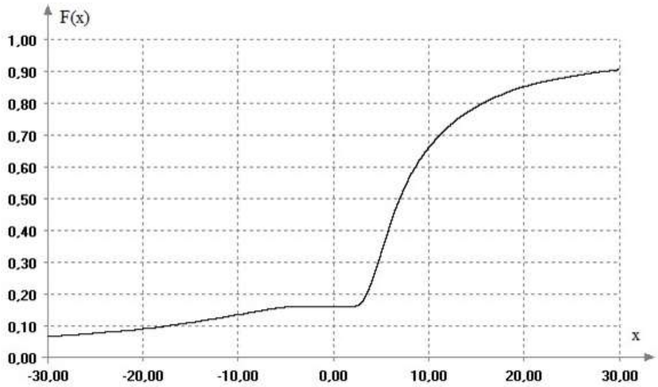


Рисунок 2 – Эмпирическое распределение Y, $X_1 \in N(10,1)$, $X_2 \in N(1,1)$

IV. Исследование сходимости законов случайных величин

Пример 9. Между распределением Фишера и χ^2-распределением существует взаимосвязь следующего вида

$$d_1 * F(d_1, d_2) \to \chi^2(d_1) \text{ при } d_2 \to \infty,$$

где d_1 и d_2 степени свободы распределений.

Исследуем сходимость данного вида на примере распределения случайной величины $4 * F(4, d_2)$ при объеме выборок 1 660 000. Расстояния по Колмогорову между теоретическим $\chi^2(d_1)$ и реальным распределением $d_1 * F(d_1, d_2)$ показаны в таблице 8 и на рисунке 3.

Очевидно, что распределение $4 * F(4, d_2)$ действительно сходится к χ^2-распределению, о чем, в частности свидетельствует линия степенного тренда. В данном случае можно прогнозировать, что гипотеза о согласии $4 * F(4, d_2)$ с $\chi^2(4)$ не будет отклоняться при $d_2 > 218$.

ТАБЛИЦА VIII
РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕЛИЧИНЫ $4*F(4,d_2)$ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ $\chi^2(4)$

d_2	расстояние	d_2	расстояние
1	0.909795488	20	0.086142562
2	0.735759456	40	0.04559945
3	0.560978724	80	0.022972802
4	0.435409205	120	0.015452631
8	0.223739526	180	0.010450386
10	0.179828623	199	0.009542026

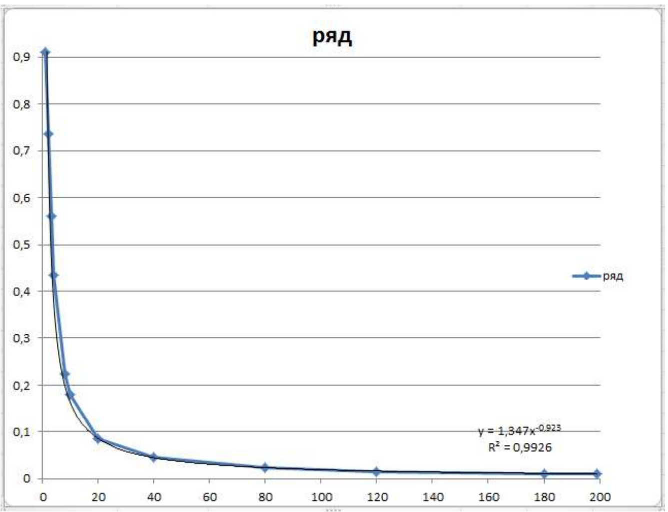


Рисунок 3 – Расстояние между распределениями

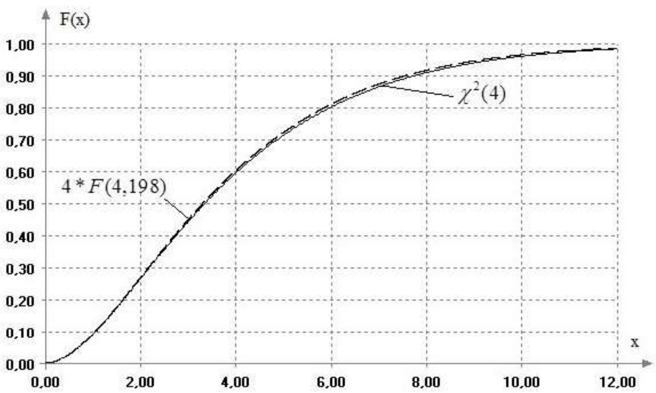


Рисунок 4 – Распределение $4*F(4,198)$

Степень близости между теоретическим и эмпирическим распределениями в зависимости от n в можно видеть на рисунке 4.

Пример 10. Между бета-распределением и гамма-распределением существует следующая связь:

$$n*B(k,n,1,0) \to \Gamma(k,1,0) \text{ при } n \to \infty,$$

где k и n параметры формы законов распределения. Исследуем данную сходимость на примере распределения случайной величины $n*B(2,n,1,0)$ при объеме выборок 1660000. Расстояния между теоретическим и реальным распределением приведены в таблице 9 и показаны на рисунке 5, демонстрирующем степенной тренд сходимости распределений в зависимости от n.

ТАБЛИЦА IX
РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕЛИЧИНЫ $n*B(2,n,1,0)$ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ $\Gamma(2,1,0)$

n	расстояние	n	расстояние
1	0,735759456	20	0,036542575
2	0,435409205	36	0,02548311
3	0,296347784	50	0,018458541
4	0,223739526	64	0,014513949
5	0,179828623	75	0,012450055
8	0,112964985	80	0,011699978
10	0,090685139	90	0,010450386
16	0,056916171	99	0,009542026

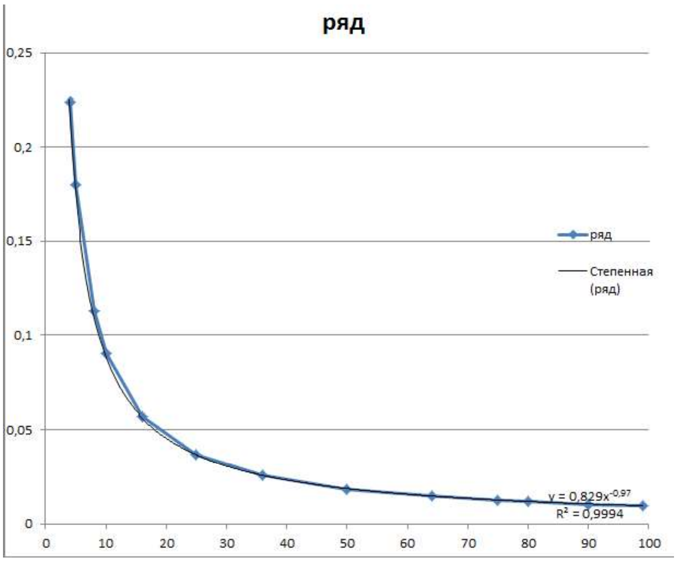


Рисунок 5 – Расстояние между распределениями

В данном случае можно прогнозировать, что гипотеза о согласии $n*B(2,n,1,0)$ с $\Gamma(2,1,0)$ не будет отклоняться при $d_2 > 500$.

Это свойство выполняется и для частного случая такой взаимосвязи: между гамма-распределением и экспоненциальным законом. В этом случае распределение случайной величины $n*(1-U(0,1)\wedge(1/n))$, где $U(0,1)$ равномерная случайная величина на (0,1), должна сходиться к экспоненциальному закону. Результаты проверки показаны в таблице 10 и на рисунке 6.

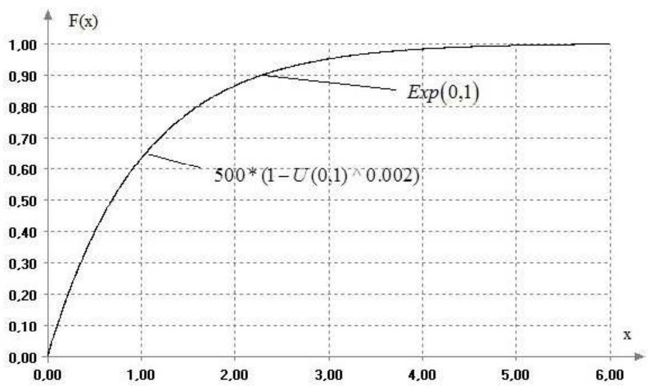


Рисунок 6 – Распределение величины $n*(1-U(0,1)\wedge(1/n))$

ТАБЛИЦА X

ПРОВЕРКА СОГЛАСИЯ ВЕЛИЧИНЫ $n*(1-U(0,1)\wedge(1/n))$ С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

n	χ^2 Пирсона	Колмогорова
250	0.000003	0.032
500	0.014	0.524
750	0.095	0.561
1000	0.749	0.552
1250	0.894	0.971
n	ω^2 КМС	Ω^2 АД
250	0.034	0.004
500	0.362	0.171
750	0.649	0.378
1000	0.878	0.942
1250	0.802	0.822

Результаты исследований показали широкие возможности разработанной подсистемы при исследовании законов распределения погрешностей косвенных измерений и построении их моделей.

V. ОПИСАНИЕ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОГО ИНТЕРФЕЙСА

Для исследования законов распределения функций от случайных величин было доработано программное обеспечение, позволяющее моделировать выборки функций от случайных величин. Интерфейс с пользователем позволяет задавать произвольные функции от системы независимых случайных величин, распределенных по различным одномерным законам.

На рисунке 7 показана вкладка “Моделирование функций от случайных величин”, отражающая описание пользовательского интерфейса:

1 – модуль выбора распределения из загруженных в систему законов распределения;

2 – модуль выбора случайной величины из ещё неиспользуемых;

3 – модуль, содержащий выбранные случайные величины. В модуле показано соответствие этих величин с ID распределения (не виден пользователю);

4 – клавиши для добавления и удаления случайных величин в модуле 3;

5 – модуль, содержащий информацию обо всех выбранных случайных величинах: начальном значении генератора случайных чисел, который можно менять, и о распределении случайной величины, включая параметры;

6 – клавиша для загрузки распределений;

7 – клавиша для изменения параметров распределений. После ее нажатия появляется форма, показанная на рисунке 8;

8 – Модуль для изменения параметров моделирования (максимального количества используемых случайных величин и объемов генерируемых выборок);

9 – модуль для записи моделируемого выражения. Операции доступные в этом модуле будут представлены далее;

10 – клавиша запуска моделирования функции от случайных величин. В случае некорректной записи выражения в модуль 9 будет выдана ошибка, и моделирование не запустится;

11 – модуль записи имени файла для сохранения результирующей выборки. После окончания моделирования имя файла будет сгенерировано по умолчанию в соответствии с видом моделируемого выражения;

12 – клавиша для подтверждения сохранения уже смоделированной выборки в файл с именем, указанным в 11.

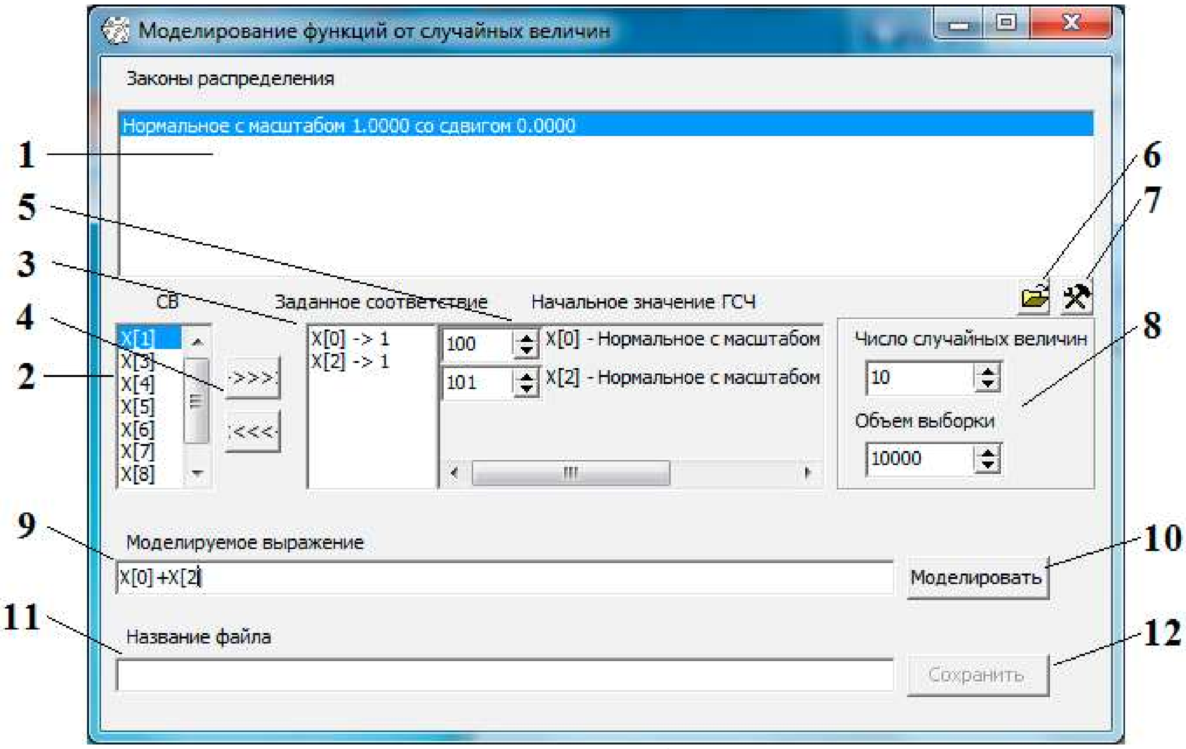


Рисунок 7 – Интерфейс

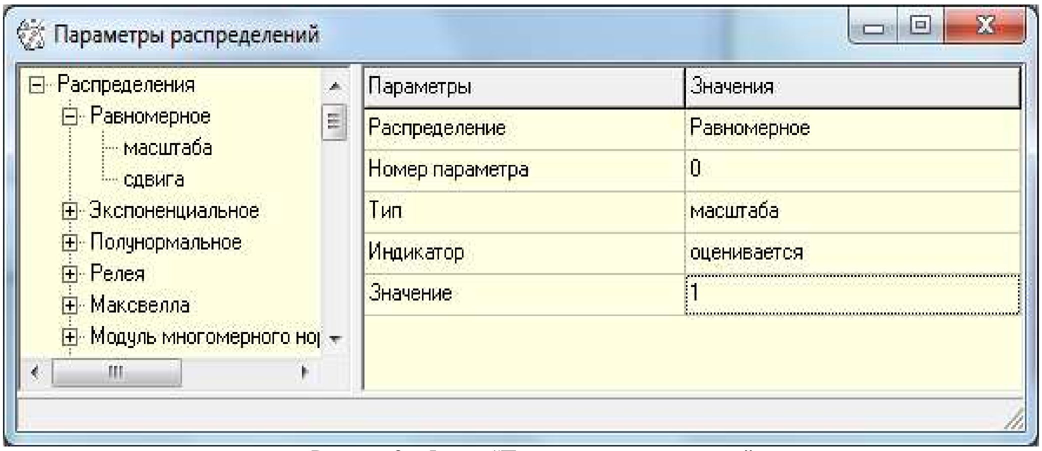


Рисунок 8 – Форма “Параметры распределений”

VI. Выводы и заключение

В соответствии с целями исследований реализовано программное обеспечение, предназначенное для исследования законов распределения вероятностей функций от систем независимых случайных величин и систем случайных величин.

Разработанное программное обеспечение позволяет: моделировать выборки псевдослучайных величин, распределенных по различным законам распределения с заданными параметрами и заданным начальным значением генератора случайных чисел; моделировать выборки значений функций от систем независимых случайных величин.

Вид функций от независимых случайных величин может быть “произвольным” и задается пользователем в режиме диалога.

В программной системе доступны следующие операции:

- бинарные операции: сложение (+), вычитание (–), умножение (*), деление (/), деление по модулю (%), возведение в степень (^);
- унарные операции: унарный минус, извлечение квадратного корня (sqrt), взятие модуля (abs), тригонометрические операции (sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg, sh, ch, th, cth, exp), логарифмические операции (lg, ln);
- *n*-арные операции: нахождение минимума (min), нахождение максимума (max), нахождение среднего (avg) и суммы (sum) множества случайных величин.
- в системе также доступны известные константы e (e) и π (pi);

Помимо простой моделируемой функции, задание которой показано на рисунке 7, можно привести примеры задания более сложных *n*-арных операций:

- avg(X[i(0)],i(0)=0:10) – среднее значения 11 элементов X с индексами от 0 до 10 включительно;
- min(X[i(0)],i(0)=0:49) – поиск минимума среди 50 элементов X с индексами от 0 до 49 включительно;
- синтаксис поиска максимума аналогичный;
- Sum(X[(i(0)],i(0)=0:24)+Sum(X[i(1)],i(1);=50:75) – нахождение суммы элементов X с индексами от 0 до 24 и от 50 до 75 включительно.

Результаты применения показали, что программное обеспечение является эффективным инструментом для исследования законов распределения различных функций от систем случайных величин. Широкий набор инструментов позволяет моделировать законы распределения достаточно сложных зависимостей, интересных для применения в приложениях.

Показано, что методы статистического моделирования в совокупности с программным обеспечением, позволяющим строить приближенные математические модели для полученных эмпирических распределений (в том числе в виде смесей различных параметрических законов), представляют собой эффективный инструмент для изучения законов распределения функций от случайных величин и для исследования вероятностных закономерностей.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части госзадания (проект № 2.541.2014/К).

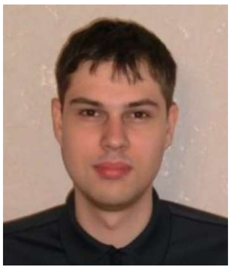
Список литературы

[1] Лемешко Б.Ю. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход : монография / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с.

[2] Лемешко Б.Ю., Огурцов Д.В. Статистическое моделирование как эффективный инструмент для исследования законов распределения случайных величин // Метрология. 2007. – № 5. – С. 3-13.

[3] Lemeshko B.Yu., Ogurtsov D.V. Statistical modeling as an effective instrument for investigating the distribution laws of functions of random quantities // Measurement Techniques, 2007. V.50, № 6. – P. 593-600.

[4] ISW – Программная система статистического анализа одномерных случайных величин. URL: http://ami.nstu.ru/~headrd/ISW. htm (дата обращения 27.04.2016)



Павел Юрьевич Блинов
Аспирант кафедры прикладной математики НГТУ

Борис Юрьевич Лемешко
Профессор кафедры прикладной математики НГТУ, д.т.н.