СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ И ПРОМЫШЛЕННОСТИ

УДК 519.24

ПРИМЕНЕНИЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ К ПРОВЕРКЕ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛЕЙ УСКОРЕННЫХ ИСПЫТАНИЙ*

Н. С. Галанова, Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова

Новосибирский государственный технический университет,
630092, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20
E-mail: ekaterina.chimitova@gmail.com

Рассматривается построение функции надёжности по результатам ускоренных испытаний (построение AFT-моделей). Проверка адекватности построенных AFT-моделей осуществляется на основании анализа выборки остатков. Для проверки соответствия выборки остатков базовому закону распределения вероятностей используются модифицированные непараметрические критерии согласия. При отсутствии цензурирования в применяемых критериях предлагается использовать ранее построенные модели распределений статистик для ситуации проверки сложных гипотез. В случае цензурирования I или II типа распределения статистик критериев согласия находятся методами статистического моделирования.

Ключевые слова: ускоренные испытания, AFT-модель, цензурированные измерения, оценки Каплана — Мейера, непараметрические критерии согласия, модифицированные критерии.

Введение. Задачи, связанные с исследованием надёжности, анализом выживаемости, в которых оперируют данными типа времени жизни, рассматриваются во многих областях науки и техники. В инженерных расчётах это времена отказов некоторых приборов или технических систем. В медицине такие данные представляют собой время до изменения некоторых биохимических показателей, время до ремиссии после определённого вида лечения или время жизни пациентов.

Как правило, общим свойством анализируемых данных (результатов измерений, результатов наблюдений над испытуемыми объектами) в таких задачах является их неполнота. Например, во время испытаний может выйти из строя лишь некоторая доля исследуемых объектов или часть объектов по каким-то причинам снята с испытаний. Время испытаний может быть ограничено, и к концу эксперимента значительная часть объектов останется работоспособной. Такие данные называют цензурированными справа. В условиях ограниченности эксперимента по времени получают цензурированную выборку I типа. Цензурирование II типа возникает, если испытания продолжаются до наступления заранее определённого количества отказов (результатов измерений).

Анализу данных типа времени жизни посвящено множество публикаций, разработаны способы описания и представления, предложены различные модели, учитывающие их особенности для разных приложений. В первых работах [1–10] рассматривались в основном простые модели, различающиеся параметризацией функции надёжности. Среди этих

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 8.1274.2011) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

моделей можно выделить функции надёжности, опирающиеся на экспоненциальный закон распределения вероятностей, распределение Вейбулла, гамма-распределение, обратное гауссовское распределение и другие.

Особое место в теории надёжности занимают модели ускоренных испытаний (AFT — Accelerated Failure Time), интерес к которым в последнее время возрастает в связи с увеличением доли производства высоконадёжных и высокотехнологичных изделий и систем. Проектирование и создание таких устройств ориентировано на безотказную работу в течение длительного периода. За время, которое может быть отведено на испытания и исследования надёжности при нормальных условиях эксплуатации, вероятность отказа устройства оказывается очень малой. Чтобы в подобной ситуации получить достаточное количество данных для анализа, испытания проводят при воздействиях, превышающих нагрузку, рассчитанную для нормальных условий. Соответствующие испытания называют ускоренными. Применение повышенных воздействий укорачивает длительность жизни систем, и отказы будут наблюдаться в течение времени, отведённого на сбор экспериментальных данных.

AFT-модели предназначены для оценивания функции надёжности изделий (систем), работающих в нормальных условиях эксплуатации (при воздействии нормальных нагрузок), по данным об отказах, полученным в результате ускоренных испытаний. Особенности построения AFT-моделей для различных планов экспериментов, а также аналитические выкладки для их параметризаций подробно рассмотрены в [5–8].

Несмотря на то что вопросам построения параметрических AFT-моделей посвящено множество (в основном зарубежных) публикаций, в этих задачах остаётся много нерешённых проблем. Во-первых, на качество AFT-моделей (на оценки параметров) существенное влияние оказывает наличие цензурированных наблюдений. Во-вторых, налицо ряд проблем, связанных с проверкой адекватности построенных AFT-моделей.

Например, оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметров законов распределения по цензурированным выборкам I или II типа являются асимптотически эффективными, т. е. в асимптотике подчиняются нормальному закону. Однако при ограниченности объёмов выборок и наличии значительной доли цензурированных наблюдений I или II типа распределения оценок параметров наблюдаемых законов распределения вероятностей становятся асимметричными, а сами оценки оказываются смещёнными [11, 12]. Естественно, это отражается на качестве построенных моделей законов.

Кроме того, цензурирование отражается на процедурах проверки адекватности моделей. Например, при проверке сложных гипотез о принадлежности полных выборок к некоторому теоретическому закону и оценивании параметров закона по той же самой выборке распределения статистик непараметрических критериев согласия зависят от следующих факторов: от закона, по которому проверяется согласие, от числа и типа оценённых параметров, от значения параметра формы [13–24]. В случае цензурированных выборок к указанным факторам добавляется ещё и зависимость распределений статистик от степени цензурирования [25].

При построении и анализе AFT-моделей перечисленные проблемы, связанные с наличием цензурированных данных, сохраняются и усиливаются.

Наиболее распространённым методом проверки адекватности параметрической AFT-модели результатам наблюдений (измерений) является анализ закона распределения так называемых остатков. Если гипотеза о принадлежности выборки остатков к базовому закону распределения не отклоняется, то это свидетельствует об адекватности построенной AFT-модели. Однако в публикациях, посвящённых статистике ускоренных испытаний, о проверке адекватности построенных AFT-моделей часто либо не упоминается [1–3, 5–8], либо проверку согласия выборки остатков с базовым законом распределения осуществляют графическими методами [9]. Причины этого кроются как раз в проблемах, связанных с использованием критериев согласия в условиях проверки сложных гипотез [13–24], усугубляемых наличием в задачах исследования надёжности цензурированных наблюдений, что сказывается на свойствах оценок параметров моделей [11, 12] и, в свою очередь, тоже отражается на распределениях статистик применяемых критериев согласия [25]. Необходимость проверки адекватности AFT-моделей существует, этой проблемой серьёзно занимаются, однако на настоящий момент можно однозначно утверждать, что в рамках чисто аналитического подхода она не может быть решена.

Цель данной работы — исследование вопросов проверки адекватности параметрических AFT-моделей на основе анализа выборок остатков.

AFT-модель. Пусть T — неотрицательная случайная величина, определяющая время работы исследуемого объекта до выхода из строя. Функцией надёжности называется вероятность безотказной работы за некоторое время наработки t:

$$S(t) = P\{T > t\} = 1 - F(t), \tag{1}$$

где $F(t)$ — соответствующая функция распределения вероятностей.

Надёжность объекта зависит от некоторых его характеристик и условий эксплуатации. Влияние этих характеристик учитывают с помощью объясняющих переменных (ковариат), которые в теории надёжности обычно называют воздействиями или нагрузками.

Воздействие $x(\cdot)$ является повышенным по отношению к воздействию $y(\cdot)$, если для соответствующих функций надёжности выполняется соотношение

$$S_{x(\cdot)}(t) \le S_{y(\cdot)}(t), \quad t \ge 0. \tag{2}$$

В качестве воздействия $x(\cdot)$ может выступать любой показатель эксплуатационного процесса: напряжение, давление, влажность, температура и т. д.

Цель ускоренных испытаний заключается в том, чтобы на основе данных, полученных при повышенных нагрузках, оценить функцию надёжности, соответствующую нормальным условиям функционирования.

Рассмотрим, например, следующие возможные планы испытаний:

1. Наблюдаемые объекты делятся на l групп и тестируются под постоянными во времени воздействиями $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l$, т. е. под воздействием $\mathbf{x}_i$, $i = \overline{1, l}$, тестируются n_i объектов i-й группы.

2. Все объекты тестируются под ступенчатым воздействием $x(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} \mathbf{x}_1, & t_0 < t \le t_1, \\ \mathbf{x}_2, & t_1 < t \le t_2, \\ \ldots \\ \mathbf{x}_l, & t_{l-1} < t \le t_l. \end{cases} \tag{3}$$

План испытаний может представлять собой комбинацию перечисленных планов.

Полученную в результате испытаний выборку наблюдений обычно записывают в виде

$$\mathbf{X}_n = \{(X_1, \delta_1, \mathbf{x}^1), \ldots, (X_n, \delta_n, \mathbf{x}^n)\}, \tag{4}$$

где $\delta_i = 1$, если X_i является моментом отказа (полным наблюдением), и $\delta_i = 0$, если X_i является моментом цензурирования; $\mathbf{x}^i$ — значение ковариаты, при котором зарегистрировано наблюдение X_i.

Параметрическая AFT-модель надёжности может быть задана как

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_0\Big(\int\limits_0^t r(x(s))ds\Big), \tag{5}$$

где $S_0(t) = 1 - F_0(t)$ — базовая функция надёжности; $r(\cdot)$ — неотрицательная функция от воздействий. В приложениях наиболее популярно использование следующих моделей функций от воздействий:

— логлинейная модель вида $r(x) = \mathrm{e}^{\beta_0 + \beta_1 x}$ применяется, например, для анализа данных усталости при тестировании различных электронных компонент;

— модель правила мощности в форме $r(x) = \mathrm{e}^{\beta_0 + \beta_1 \ln x}$ используется в случаях, когда воздействием являются напряжение, механическая нагрузка;

— модель Аррениуса вида $r(x) = \mathrm{e}^{\beta_0 + \beta_1 / x}$ применяется, когда в качестве нагрузки выступает, например, температура;

— модель вида $r(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_m x_m}$ используется, когда воздействие многомерно (m — размерность вектора воздействия).

В случае ступенчатого воздействия, когда план испытаний определяется соотношением (3), функция надёжности объекта, который наблюдался под воздействием $\mathbf{x}_i$, определяется выражением [5]

$$S_{\mathbf{x}_i}(t) = S_0\Big(r(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})(t - t_i) + \sum_{j=1}^{i} r(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\beta})(t_j - t_{j-1})\Big). \tag{6}$$

В параметрических AFT-моделях предполагается, что базовая функция надёжности $S_0(t) = 1 - F_0(t)$ задаётся некоторым параметрическим семейством распределений $F_0(t; \boldsymbol{\theta})$. В качестве базовых законов часто используются следующие распределения:

$$f_0(t, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\theta_0} \exp\Big(-\frac{t}{\theta_0}\Big)$$

— экспоненциальное;

$$f_0(t, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{t\theta_1\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\theta_1}\ln\Big(\frac{t}{\theta_0}\Big)\Big)^2\Big)$$

— логнормальное;

$$f_0(t, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\theta_1}{t}\Big(\frac{t}{\theta_0}\Big)^{\theta_1} \exp\Big(-\Big(\frac{t}{\theta_0}\Big)^{\theta_1}\Big)$$

— Вейбулла;

$$f_0(t, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\theta_1}{t\theta_0}\Big(\frac{t}{\theta_0}\Big)^{\theta_1}\Big(1 + \Big(\frac{t}{\theta_0}\Big)^{\theta_1}\Big)^{1/\theta_2 - 1} \exp\Big(1 - \Big(1 + \Big(\frac{t}{\theta_0}\Big)^{\theta_1}\Big)^{1/\theta_2}\Big)$$

— обобщённое распределение Вейбулла;

$$f_0(t, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\theta_0\Gamma(\theta_1)}\Big(\frac{t}{\theta_0}\Big)^{\theta_1 - 1} \exp\Big(-\frac{t}{\theta_0}\Big)$$

— гамма-распределение и другие.

Оценки максимального правдоподобия неизвестных параметров AFT-модели по цензурированной выборке $\mathbf{X}_n = \{(X_1, \delta_1, \mathbf{x}^1), \ldots, (X_n, \delta_n, \mathbf{x}^n)\}$ могут находиться в результате максимизации логарифмической функции правдоподобия

$$\ln L(\mathbf{X}_n; \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} (\delta_i \ln f_{x(\cdot)}(X_i) + (1 - \delta_i) S_{x(\cdot)}(X_i)) \tag{7}$$

по параметрам $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\theta}$.

В выражении (7) плотность $f(t)$ получается из базовой $f_0(t, \boldsymbol{\theta})$ при замене в последней масштабного параметра θ_0 величиной, обратно пропорциональной функции от воздействия $1/r(x)$.

Проверка адекватности параметрической AFT-модели. Для проверки адекватности построенной параметрической AFT-модели обычно анализируют выборку остатков, которые вычисляются следующим образом:

$$Z_i = X_i r(\mathbf{x}^i, \hat{\boldsymbol{\beta}}), \quad i = \overline{1, n}, \tag{8}$$

для случая постоянных во времени воздействий и

$$Z_i = r(\mathbf{x}_q^i, \hat{\boldsymbol{\beta}})(X_i - t_{i-1}) + \sum_{j=1}^{q} r(\mathbf{x}_j^i, \hat{\boldsymbol{\beta}})(t_j - t_{j-1}), \quad i = \overline{1, n}, \tag{9}$$

для ступенчатого воздействия вида (3), где $\mathbf{x}_q^i$ — это значение воздействия, при котором зарегистрировано наблюдение X_i. Если данные хорошо описываются построенной моделью, остатки должны принадлежать к базовому закону распределения отказов $F_0(t; \hat{\boldsymbol{\theta}})$, где $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ — найденная оценка вектора параметров, стандартизованному по параметру масштаба (при параметре масштаба $\theta_0 = 1$).

Для проверки гипотезы о принадлежности выборки остатков к закону распределения $F_0(t; \hat{\boldsymbol{\theta}})$ могут применяться различные критерии согласия, использование которых в данной ситуации сопряжено со следующими проблемами. Во-первых, измерения, как правило, оказываются цензурированными, что отражается и на свойствах оценок [11, 12], и на возможности применения конкретных критериев согласия [25]. Во-вторых, проверяемая гипотеза является сложной, так как по результатам испытаний уже были оценены параметры модели, а теперь по ним же надо проверять гипотезу.

При проверке сложных гипотез, когда неизвестные параметры оцениваются по той же выборке, непараметрические критерии согласия теряют свойство свободы от распределения. В этом случае распределения $G(S \mid H_0)$ статистик S непараметрических критериев согласия при справедливости проверяемой гипотезы H_0 зависят от некоторых факторов:

— от вида предполагаемого базового распределения отказов $F_0(t; \boldsymbol{\theta})$;

— от типа и количества оцениваемых по выборке параметров;

— от метода оценивания параметров;

— возможно, от значения параметра формы (например, значения параметра θ_1 гамма-распределения [17] или параметра θ_2 обобщённого распределения Вейбулла [20]).

Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия Колмогорова, Крамера — Мизеса — Смирнова и Андерсона — Дарлинга при проверке сложных гипотез с применением ОМП для различных комбинаций параметров в случае полных выборок (без цензурированных наблюдений) представлены в работах [17–24].

Для проверки гипотезы о принадлежности выборки остатков к закону распределения $F_0(t;\hat{\boldsymbol{\theta}})$ при наличии цензурированных измерений можно воспользоваться модифицированными критериями согласия типа Колмогорова, Крамера — Мизеса — Смирнова и Андерсона — Дарлинга, в которых в выражениях для статистик вместо эмпирической функции распределения используется непараметрическая оценка Каплана — Мейера [26].

Обозначим через $a_1 < a_2 < \ldots < a_k = \tau$, $k \le n$, значения полных наблюдений $(Z_i, \delta_i = 1)$ в выборке остатков $(Z_1,\delta_1),(Z_2,\delta_2),\ldots,(Z_n,\delta_n)$. Тогда оценку Каплана — Мейера можно вычислить по формуле

$$\hat{F}_n(t) = 1 - \prod_{a_i \le t} (1 - d_i/c_i), \tag{10}$$

где $d_i = \sum\limits_{Z_j = a_i} \delta_j$; c_i — количество наблюдений, для которых $Z_j \ge a_i$, $j = 1,\ldots,n$.

В модифицированном критерии Колмогорова для цензурированных выборок в качестве расстояния между эмпирическим и теоретическим законами распределения используется величина

$$D_n = \sup_{0 \le t \le \tau} \left| \hat{F}_n(t) - F_0(t;\boldsymbol{\theta}) \right|,$$

где $\hat{F}_n(t)$ — оценка Каплана — Мейера функции распределения; $F_0(t;\boldsymbol{\theta})$ — теоретическая функция распределения, соответствующая проверяемой гипотезе.

Для того чтобы снизить зависимость распределения статистики от объёма выборки, при малых n в модифицированном критерии Колмогорова целесообразно применить статистику с поправкой Большева [27]:

$$S_K^C = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \tag{11}$$

где $D_n = \max\{D_n^+, D_n^-\}$; $D_n^+ = \max\limits_i\{\hat{F}_n(a_i) - F_0(a_i;\boldsymbol{\theta})\}$; $D_n^- = \max\limits_i\{F_0(a_i;\boldsymbol{\theta}) - \hat{F}_n(a_{i-1})\}$.

В модифицированном критерии Крамера — Мизеса — Смирнова в качестве расстояния между распределениями берётся величина

$$\omega^2 = \int_0^\tau (\hat{F}_n(t) - F_0(t;\boldsymbol{\theta}))^2 dF_0(t;\boldsymbol{\theta}).$$

Статистика этого критерия с оценкой Каплана — Мейера принимает вид

$$S_\omega^C = \frac{n}{3}F_0(a_1;\boldsymbol{\theta}) + n\sum_{j=1}^{k-1}\Big[\hat{F}_n^2(a_j)(F_0(a_{j+1};\boldsymbol{\theta}) - F_0(a_j;\boldsymbol{\theta})) -$$

$$- \hat{F}_n(a_j)(F_0^2(a_{j+1};\boldsymbol{\theta}) - F_0^2(a_j;\boldsymbol{\theta})) + \frac{1}{3}(F_0^3(a_{j+1};\boldsymbol{\theta}) - F_0^3(a_j;\boldsymbol{\theta}))\Big]. \tag{12}$$

В модифицированном критерии Андерсона — Дарлинга в качестве меры расстояния рассматривается величина

$$\Omega^2 = \int_0^\tau (\hat{F}_n(t) - F_0(t;\boldsymbol{\theta}))^2 \frac{dF_0(t;\boldsymbol{\theta})}{F_0(t;\boldsymbol{\theta})(1 - F_0(t;\boldsymbol{\theta}))},$$

соответственно его статистика получается в виде

$$S_{\Omega}^{C} = n\Big\{ -F_0(a_1;\boldsymbol{\theta}) + \sum_{j=1}^{k-1}\Big[F_0(a_j;\boldsymbol{\theta}) - F_0(a_{j+1};\boldsymbol{\theta}) + \hat{F}_n^2(a_j)(\ln F_0(a_{j+1};\boldsymbol{\theta}) - \ln F_0(a_j;\boldsymbol{\theta})) -$$

$$-(1-\hat{F}_n(a_j))^2(\ln(1-F_0(a_{j+1};\boldsymbol{\theta})) - \ln(1-F_0(a_j;\boldsymbol{\theta})))\Big] - \ln(1-F_0(a_1;\boldsymbol{\theta}))\Big\}. \qquad (13)$$

Для того чтобы иметь возможность применять критерии согласия, необходимо знать распределения статистик этих критериев при справедливости проверяемой гипотезы, соответствующие плану и результатам испытаний, базовому закону распределения, типу и степени цензурирования. Распределения статистик критериев или процентные точки, необходимые для проверки гипотезы, могут быть сформулированы с использованием подхода из [17–24], опирающегося на компьютерные технологии и статистическое моделирование. Необходимо чётко понимать, что наличие множества указанных факторов, влияющих на распределения статистик вышеперечисленных критериев, не позволяет заранее построить распределения статистик, соответствующие конкретным условиям испытаний. Реальные результаты испытаний и значения факторов, от которых зависят распределения $G(S \mid H_0)$ статистик S критериев согласия при справедливости проверяемой гипотезы H_0, становятся известны только после создания AFT-модели. И тогда путём компьютерного моделирования строится эмпирическое распределение статистики (или даже приближённую модель распределения), по которому можно вычислить достигнутый уровень значимости и принять решение об адекватности модели. Такой интерактивный алгоритм моделирования распределений статистик используемых критериев согласия обеспечивает корректную проверку адекватности построенной модели.

Интерактивный алгоритм моделирования распределений статистик критериев. Последовательность действий при моделировании (исследовании) распределения статистики $G(S \mid H_0)$ применяемого критерия задаётся следующим образом.

1. Смоделировать полную выборку отказов $(X_1, \delta_1 = 1, \mathbf{x}^1), \ldots, (X_n, \delta_1 = 1, \mathbf{x}^n)$ в соответствии с проверяемой моделью $F_x(t;\hat{\boldsymbol{\beta}},\hat{\boldsymbol{\theta}})$, где $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ — ОМП параметров модели по исходной выборке.

При этом момент отказа объекта, находящегося под постоянным воздействием $\mathbf{x}_i$, моделируется в соответствии с выражением

$$X = F_0^{-1}(y,\hat{\boldsymbol{\theta}})/r(\mathbf{x}_i,\hat{\boldsymbol{\beta}}), \qquad (14)$$

где y — псевдослучайная величина, равномерно распределённая на интервале $[0,\ 1]$.

Момент отказа объекта, находящегося под ступенчатым воздействием (3), моделируется следующим образом. Воздействие $\mathbf{x}_i$ определяется из условия попадания величины y в интервал $(b_{i-1}, b_i]$, $i=\overline{1,l}$, где $b_0 = 0$, $b_i = F_0\Big(\sum\limits_{j=0}^{i} r(\mathbf{x}_j,\hat{\boldsymbol{\beta}})(t_{j+1}-t_j)\Big)$, $b_l = 1$. Если $i = 1$, момент отказа вычисляется в соответствии с (14). В противном случае

$$X = t_{i-1} + \Big[F_0^{-1}(y,\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \sum_{j=1}^{i} r(\mathbf{x}_{j-1},\hat{\boldsymbol{\beta}})(t_j - t_{j-1})\Big]\Big/ r(\mathbf{x}_i,\hat{\boldsymbol{\beta}}). \qquad (15)$$

2. При необходимости в соответствии с заданной схемой цензурирования преобразовать полную выборку в цензурированную: $(X_1, \delta_1, \mathbf{x}^1), \ldots, (X_n, \delta_n, \mathbf{x}^n)$.

3. Определить ОМП параметров $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\theta}$ по выборке $(X_1, \delta_1, \mathbf{x}^1), \ldots, (X_n, \delta_n, \mathbf{x}^n)$.

4. Вычислить остатки для проверяемой модели (по (8) или (9)).

5. По выборке остатков найти значение статистики критерия (по (11), (12) или (13)).

6. Повторив пп. 1–5 N раз, получим эмпирическое распределение статистики $G_N(S_n \mid H_0)$.

Выбор объёма N обусловлен желаемой точностью моделирования (подробнее о выборе N см. в [24]).

В результате исследования проблем, связанных с применением модифицированных критериев согласия для анализа выборок остатков, предложен интерактивный алгоритм проверки адекватности параметрической AFT-модели, блок-схема которого приведена на рис. 1.

Разработанные в представленном исследовании алгоритмы моделирования распределений статистик критериев согласия с параметрической AFT-моделью на основе выборок остатков реализованы в программной системе статистического анализа данных типа времени жизни LiTiS [28]. Эта система позволяет вычислять ОМП параметров AFT-модели для широкого круга базовых законов распределения и различных функций воздействия,

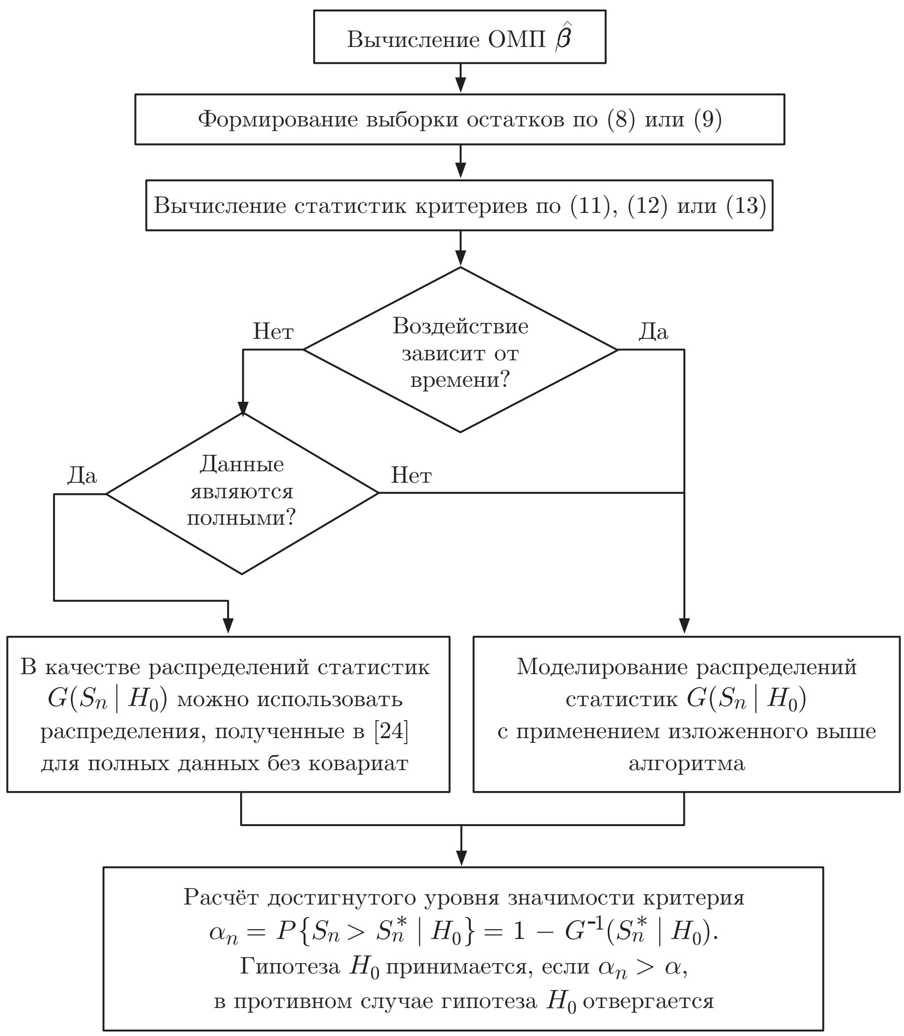

Рис. 1. Блок-схема алгоритма проверки гипотезы о согласии с параметрической AFT-моделью на основе выборок остатков

корректно осуществлять проверку построенной AFT-модели с использованием модифицированных критериев согласия, а также моделировать распределения оценок и статистик критериев согласия для заданных AFT-моделей и планов проведения испытаний.

Исследование распределений статистик критериев в случае постоянных во времени воздействий. Проведённые в представленной работе исследования показали, что, как и следовало ожидать, в случае полных данных, когда соотношения для статистик (11)–(13) совпадают с классическими, распределения $G(S_n \mid H_0)$ рассматриваемых критериев не зависят от вида функции при воздействии $r(\cdot)$. Таким образом, для проверки гипотезы о принадлежности выборки остатков к распределению $F_0(t; \hat{\boldsymbol{\theta}})$ (для проверки адекватности параметрических AFT-моделей) с применением модифицированных критериев согласия можно использовать предельные распределения статистик $G(S_n \mid H_0)$, представленные в [17–23] и наиболее полно в работе [24]. Результаты статистического моделирования подтвердили, что даже при малых объёмах выборок остатков распределения статистик непараметрических критериев совпадают с аппроксимациями распределений этих статистик, полученными для моделей без ковариат [17–24].

В случае цензурированных данных распределения статистик зависят как от степени, так и от типа цензурирования. При этом важным фактором является также схема цензурирования. Например, ограничение по времени (цензурирование I типа) или ограничение по количеству отказов (цензурирование II типа) может быть задано либо единым для всех n объектов, либо определено отдельно для каждой группы объектов. В последнем случае выборка остатков представляет собой многократно цензурированную выборку.

Исследование распределений статистик критериев в случае ступенчатого воздействия. Если объекты наблюдались под ступенчатым воздействием (3), то распределения статистик, получаемые на основе выборок остатков (9), могут существенно отличаться от распределений статистик при постоянных во времени воздействиях. В качестве примера на рис. 2 представлены эмпирические распределения статистики Колмогорова при проверке сложной гипотезы о согласии с параметрической AFT-моделью Вейбулла при двух следующих планах проведения испытаний.

1. План с постоянным воздействием: все объекты разделены на две группы с воздействиями $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ по $n_1 = 20$ и $n_2 = 20$ наблюдений в каждой.

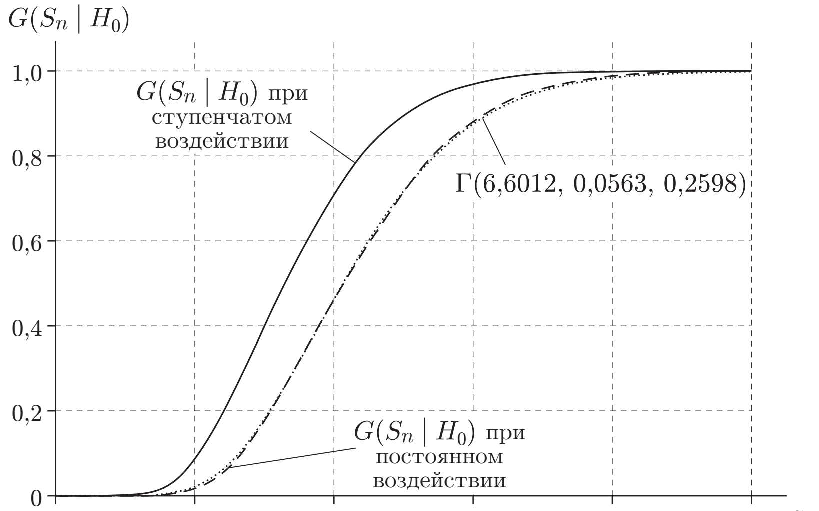

Рис. 2. Распределения статистики Колмогорова для различных планов проведения испытаний

2. План со ступенчатым воздействием: все $n = 40$ наблюдений моделировались при воздействии

$$x(t) = \begin{cases} x_1 = 1, & 0 < t \leq 1, \\ x_2 = 2, & t > 1. \end{cases}$$

Рассматривалась логлинейная модель функции от воздействия вида $r(x) = \mathrm{e}^{\beta_0 + \beta_1 x}$. Истинные значения параметров AFT-модели: $\beta_0 = -1$, $\beta_1 = 1$, параметр формы базового распределения $\theta_1 = 1$. Оценки параметров β_0, β_1 и θ_1 вычислялись методом максимального правдоподобия. Количество моделируемых выборок $N = 5000$. Для сравнения на рисунке представлена аппроксимация предельного распределения статистики Колмогорова при проверке сложной гипотезы о согласии с распределением Вейбулла, полученная в работе [18] для данных без ковариат (гамма-распределение с параметрами сдвига 0,2598, масштаба 0,0563 и формы 6,6012).

Как видно на рис. 2, даже при полных данных распределение статистики критерия согласия для зависящих от времени ковариат существенно отличается от аппроксимации предельного распределения статистики. Таким образом, в отличие от случая с постоянными во времени воздействиями применение построенных в [24] моделей распределений статистик рассматриваемых критериев для вычисления достигнутого уровня значимости будет некорректным при проверке адекватности параметрической AFT-модели с зависящими от времени ковариатами. Здесь распределения статистик могут быть получены методами статистического моделирования с использованием представленного выше алгоритма.

Выбор базовой функции надёжности. Одной из ключевых проблем при построении параметрических моделей функций надёжности, в том числе моделей с ковариатами и AFT-моделей, является проблема выбора базового закона или семейства распределений. На практике, как правило, априорной информации для однозначного выбора базового закона или семейства распределений оказывается недостаточно.

В качестве меры, указывающей на предпочтительность выбора того или иного базового распределения вероятностей $F_0(x; \boldsymbol{\theta})$, можно использовать достигнутые уровни значимости, полученные при проверке гипотез о принадлежности выборки остатков к базовому закону $F_0(x; \hat{\boldsymbol{\theta}})$ с помощью критериев согласия.

Пример 1. Продемонстрируем такую возможность на примере подбора базовой функции распределения для задачи построения функции надёжности электроизоляционных жидкостей, результаты ускоренных испытаний которых приведены в [2]. В испытаниях все объекты были разбиты на семь групп. Внутри каждой группы объекты наблюдались под постоянным повышенным напряжением от 26 до 38 кВ. Цель ускоренных испытаний заключалась в оценке функции надёжности электроизоляционных жидкостей под «нормальным» напряжением в 20 кВ. Заметим, что в этих экспериментах все испытания заканчивались отказом испытуемого объекта, следовательно, данные об отказах являются полными (нет цензурированных наблюдений) (табл. 1). Следует обратить внимание, что время от начала испытания до момента отказа с повышением напряжения существенно сокращается, n_i указывает на число испытаний, проведённых под соответствующей нагрузкой.

Функция воздействия выбрана в таком же виде, как и в [2]: $r(x) = \mathrm{e}^{\beta_0 + \beta_1 \ln x}$. В качестве возможных вариантов базовых распределений рассмотрены следующие законы: экспоненциальный, Вейбулла, обобщённый Вейбулла и гамма-распределение.

Так как данные являются полными (цензурированные измерения отсутствуют), то в качестве предельных распределений статистик рассматриваемых модифицированных критериев согласия могут быть взяты модели из [17–24].

Таблица 1

План испытаний и моменты отказов

Напряжение, кВ	n_i	Моменты отказов, мин
26	3	5,79, 1579,52, 2323,7
28	5	68,85, 426,07, 110,29, 108,29, 1067,6
30	11	17,05, 22,66, 21,02, 175,88, 139,07, 144,12, 20,46, 43,40, 194,90, 47,30, 7,74
32	15	0,40, 82,85, 9,88, 89,29, 215,10, 2,75, 0,79, 15,93, 3,91, 0,27, 0,69, 100,58, 27,80, 13,95, 53,24
34	19	0,96, 4,15, 0,19, 0,78, 8,01, 31,75, 7,35, 6,50, 8,27, 33,91, 32,52, 3,16, 4,85, 2,78, 4,67, 1,31, 12,06, 36,71, 72,89
36	15	1,97, 0,59, 2,58, 1,69, 2,71, 25,50, 0,35, 0,99, 3,99, 3,67, 2,07, 0,96, 5,35, 2,90, 13,77
38	8	0,47, 0,73, 1,40, 0,74, 0,39, 1,13, 0,09, 2,38

В табл. 2 представлены полученные оценки параметров моделей, 95 %-ный доверительный интервал для оценок параметров моделей, а также значения логарифма функции правдоподобия.

В табл. 3 приведены вычисленные значения статистик применяемых критериев согласия и достигнутые уровни значимости.

Вследствие того что в данном примере отсутствовали цензурированные измерения, при проверке адекватности и выборе наиболее подходящей AFT-модели в качестве распределений статистик применяемых критериев согласия были взяты результаты из [17–24]. Как видно из табл. 3, при уровне значимости $\alpha \leq 0{,}09$ гипотеза о согласии не отвергается для всех моделей, кроме модели, построенной на основе экспоненциального закона. Однако для AFT-модели, созданной на основе обобщённого распределения Вейбулла, достигнутые уровни значимости по всем критериям существенно выше. Следовательно, эта модель и является наиболее предпочтительной из рассмотренных базовых законов.

Таблица 2

Оценки параметров и доверительные интервалы

Базовый закон	Оценки	Доверительный интервал		$\ln L$
Экспоненциальный	$\hat{\beta}_0 = -64{,}1303$	−64,17	−64,10	−305,55
	$\hat{\beta}_1 = 17{,}481$	17,47	17,49	
Вейбулла	$\hat{\beta}_0 = -63{,}8973$	−63,98	−63,81	−300,83
	$\hat{\beta}_1 = 17{,}457$	17,43	17,48	
	$\hat{\theta}_1 = 0{,}7762$	0,74	0,82	
Гамма	$\hat{\beta}_0 = -64{,}3374$	−64,42	−64,26	−301,61
	$\hat{\beta}_1 = 17{,}434$	17,41	17,46	
	$\hat{\theta}_1 = 0{,}6923$	0,65	0,73	
Обобщённый Вейбулла	$\hat{\beta}_0 = -62{,}8442$	−62,98	−62,72	−300,47
	$\hat{\beta}_1 = 17{,}402$	17,36	17,44	
	$\hat{\theta}_1 = 0{,}9238$	0,87	0,98	
	$\hat{\theta}_2 = 1{,}6220$	1,53	1,72	

Таблица 3

Результаты проверки гипотез о принадлежности выборки остатков к базовым распределениям отказов

Базовый закон	Критерий					
	Колмогорова		Крамера — Мизеса — Смирнова		Андерсона — Дарлинга	
	S_n^*	$P\{S_n > S_n^*\}$	S_n^*	$P\{S_n > S_n^*\}$	S_n^*	$P\{S_n > S_n^*\}$
Экспоненциальный	1,46	0,00	0,51	0,00	2,95	0,00
Вейбулла	0,67	0,33	0,06	0,29	0,39	0,38
Гамма	0,86	0,10	0,11	0,09	0,62	0,12
Обобщённый Вейбулла	0,55	0,76	0,04	0,71	0,28	0,70

Пример 2. В качестве примера подбора модели по цензурированным измерениям рассмотрим данные об отказах моторов. План испытаний и данные об отказах приведены в [29], а их анализ — в [30, 3].

В предлагаемой работе исследуемые объекты поделены на четыре группы, в каждой из которых они наблюдались под воздействием повышенной температуры. Время испытаний было ограничено для каждой группы. Из наблюдаемых 40 объектов отказали 17. Цель исследований заключалась в оценке надёжности объектов в нормальных условиях функционирования — при температуре 130 °C. В табл. 4 приведены значения повышенного воздействия для каждой из групп и моменты отказов.

В качестве функции от воздействия была выбрана та же, что и в [3], — логлинейная модель вида $r(z(x)) = \mathrm{e}^{\beta_0 + \beta_1 z(x)}$, где значение воздействия (в градусах Цельсия) пересчитывается в соответствии с соотношением $z(x) = 1000/(273{,}2 + x)$.

В табл. 5 приведены полученные оценки, 95 %-ный доверительный интервал и значения функции правдоподобия для различных параметрических AFT-моделей.

По значениям $\ln L$ для рассмотренных AFT-моделей можно предположить, что предпочтительными являются модели, опирающиеся на базовые законы распределения Вейбулла и обобщённый Вейбулла. Для определения наиболее подходящей AFT-модели с использованием непараметрических критериев согласия проверялись гипотезы о принадлежности выборок остатков к соответствующему базовому закону. Распределения статистик критериев, применяемых для проверки сложных гипотез относительно рассматриваемых зако-

Таблица 4

План проведения испытаний и моменты отказов

Температура, °C	Времена отказов, ч
150	Цензурировано 10 в момент 8064
170	1764, 2772, 3444, 3542, 3780, 4860, 5196 Цензурировано 3 в момент 5448
190	408, 408, 1344, 1344, 1440 Цензурировано 5 в момент 1680
220	408, 408, 504, 504, 504 Цензурировано 5 в момент 528

Таблица 5

Модели базовых законов распределения

Базовый закон	Оценки	Доверительный интервал		$\ln L$
Экспоненциальный	$\hat{\beta}_0 = 15{,}2813$	15,20	15,36	−155,3647
	$\hat{\beta}_1 = -10{,}8408$	−10,88	−10,81	
Вейбулла	$\hat{\beta}_0 = 12{,}9681$	12,92	13,02	−146,2894
	$\hat{\beta}_1 = -9{,}5471$	−9,57	−9,53	
	$\hat{\theta}_1 = 3{,}0867$	2,76	3,44	
Гамма	$\hat{\beta}_0 = 14{,}5602$	14,50	14,62	−147,3728
	$\hat{\beta}_1 = -9{,}5845$	−9,61	−9,56	
	$\hat{\theta}_1 = 4{,}4626$	4,26	4,68	
Обобщённый Вейбулла	$\hat{\beta}_0 = 10{,}5386$	10,43	10,57	−145,8709
	$\hat{\beta}_1 = -9{,}6778$	−9,73	−9,66	
	$\hat{\theta}_1 = 2{,}6329$	2,60	2,73	
	$\hat{\theta}_2 = 0{,}0010$	0,00	0,0013	
Логнормальный	$\hat{\beta}_0 = 13{,}2782$	13,21	13,34	−148,5752
	$\hat{\beta}_1 = -9{,}6591$	9,63	9,69	
	$\hat{\theta}_1 = 0{,}5927$	0,54	0,65	

нов (при наличии имеющейся в данном случае степени цензурирования), неизвестны, но они необходимы для формирования окончательного вывода. Подчеркнём, что при проверке сложных гипотез относительно обобщённого распределения Вейбулла распределения статистик соответствующих критериев согласия $G(S_n \mid H_0)$ зависят от значения параметра θ_2 этого распределения.

Так как в описанном эксперименте присутствовало цензурирование I типа, то для нахождения эмпирических распределений $G(S_n \mid H_0)$ статистик (11)–(13) модифицированных непараметрических критериев согласия Колмогорова, Крамера — Мизеса — Смирнова и Андерсона — Дарлинга использована методика компьютерного моделирования [31] и описанный выше алгоритм моделирования распределений статистик критериев согласия, применяемых в задачах анализа AFT-моделей. Эмпирические распределения статистик моделировались в соответствии с условиями испытаний, заданными в табл. 4 (нагрузки, моменты цензурирования, число групп и количество объектов в группе при $n = 40$). А далее по построенным распределениям $G(S_n \mid H_0)$ статистик и вычисленным по выборкам остатков значениям статистик S_n^* критериев согласия определены достигнутые уровни значимости $P\{S_n > S_n^*\}$.

Полученные в результате анализа значения статистик S_n^* критериев согласия и достигнутые уровни значимости $P\{S_n > S_n^*\}$ приведены в табл. 6. Как видим, в обоих случаях проверяемая гипотеза не отклоняется, однако для модели, созданной на базе распределения Вейбулла, достигнутые уровни значимости несколько выше. Таким образом, на основании проверки гипотез предпочтение отдаётся более простой AFT-модели функции надёжности, построенной при использовании в качестве базового закона отказов распределения Вейбулла. В то же время по значениям статистик критериев можно видеть, что в данном случае AFT-модель, полученная при выборе в качестве базового закона обобщённого распределения Вейбулла, имеющего ещё и параметр формы, ближе к оценке Каплана — Мейера, вычисленной по результатам испытаний и являющейся аналогом эмпирической функции распределения.

Таблица 6

Результаты проверки гипотез о принадлежности выборки остатков к базовому закону

Базовый закон	Критерий					
	Колмогорова		Крамера — Мизеса — Смирнова		Андерсона — Дарлинга	
	S_n^*	$P\{S_n > S_n^*\}$	S_n^*	$P\{S_n > S_n^*\}$	S_n^*	$P\{S_n > S_n^*\}$
Вейбулла	1,64	0,48	0,36	0,48	1,93	0,46
Обобщённый Вейбулла	1,63	0,42	0,35	0,41	1,90	0,40

В задачах выживания и надёжности нередко наличие цензурирования III типа, при котором моменты цензурирования представляют собой независимые случайные величины. Проблемы, возникающие в задачах построения и проверки адекватности AFT-моделей при случайном цензурировании, сложнее и менее изучены. Принципиальная трудность заключается в том, что, как правило, отсутствует информация о законе распределения моментов цензурирования. В рамках данной работы мы ограничились результатами, связанными с полными выборками и выборками с цензурированием I и II типов, оставив на будущее проблемы, возникающие в задачах проверки адекватности AFT-моделей при случайном цензурировании результатов испытаний.

Заключение. В представленной работе рассмотрено построение моделей ускоренных испытаний для наиболее популярных видов функций воздействия различных нагрузок, используемых в исследованиях надёжности и анализе выживаемости.

Полезность созданной AFT-модели определяется тем, насколько точно прогнозируемая функция надёжности, найденная по результатам ускоренных испытаний (при повышенных нагрузках) тестируемых объектов, соответствует неизвестной функции надёжности, характеризующей живучесть объектов в нормальных условиях.

Об адекватности построенной параметрической AFT-модели можно судить по анализу выборки остатков. Решение об адекватности модели можно принять по результатам проверки гипотезы о принадлежности выборки остатков базовому закону распределения. Такая проверка осуществляется с помощью модифицированных непараметрических критериев согласия.

Показано, что в случае полных данных (при отсутствии цензурированных наблюдений) и при постоянных во времени воздействиях в качестве предельных распределений статистик модифицированных критериев Колмогорова, Крамера — Мизеса — Смирнова и Андерсона — Дарлинга используются модели, созданные в [17–24] для классических критериев в условиях проверки сложных гипотез.

При наличии цензурированных наблюдений I или II типа необходимые распределения статистик модифицированных критериев согласия без принципиальных трудностей могут быть получены методами статистического моделирования.

Показано, что, последовательно осуществляя анализ выборок остатков, соответствующих некоторому множеству базовых законов распределения вероятностей, по максимальному достигаемому уровню значимости для критериев согласия можно подобрать наилучший базовый закон, а следовательно, и наилучшую из рассматриваемых AFT-модель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Klein J. P., Moeschberger M. L.** Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data. N. Y.: Springer, 2003. 536 p.

2. **Lawless J. F.** Statistical Models and Methods for Lifetime Data. Hoboken: John Wiley and Sons, 2002. 664 p.
3. **Kalbeisch J. D., Prentice R. L.** The Statistical Analysis of Failure Time Data. N. Y.: John Wiley and Sons, 2002. 462 p.
4. **Huber C., Limnios N., Nikulin M.** Mathematical Methods in Survival Analysis, Reliability and Quality of Life. New Jersey: Wiley-ISTE, 2008. 420 p.
5. **Bagdonavicius V., Nikulin M.** Accelerated Life Models. Modeling and Statistical Analysis. N. Y.: Chapman & Hall/CRC, 2002. 360 p.
6. **Nikulin M.** Accelerated life models // Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability. N. Y.: John Wiley and Sons, 2007. P. 503–506.
7. **Nikulin M.** Step stress accelerated life testing: classical methods // Ibid. P. 57–62.
8. **Антонов А. В., Никулин М. С.** Статистические модели в теории надёжности: Учеб. пособие. М.: Абрис, 2012. 390 с.
9. **Lee E. T., Wang J. W.** Statistical Methods for Survival Data Analysis. Hoboken: John Wiley and Sons, 2003. 513 p.
10. **Кокс Д. Р., Оукс Д.** Анализ данных типа времени жизни. М.: Финансы и статистика, 1988. 191 с.
11. **Лемешко Б. Ю., Гильдебрант С. Я., Постовалов С. Н.** К оцениванию параметров надежности по цензурированным выборкам // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. **67**, № 1. С. 52–64.
12. **Лемешко Б. Ю.** Об оценивании параметров распределений и проверке гипотез по цензурированным выборкам // Методы менеджмента качества. 2001. № 4. С. 32–38.
13. **Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.** О распределениях статистик непараметрических критериев согласия при оценивании по выборкам параметров наблюдаемых законов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов, 1998. **64**, № 3. С. 61–72.
14. **Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.** Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез // Автометрия. 2001. № 2. С. 88–102.
15. **Р 50.1.037–2002.** Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. II. Непараметрические критерии. М.: Изд-во стандартов, 2002. 64 с.
16. **Лемешко Б. Ю., Маклаков А. А.** Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями экспоненциального семейства // Автометрия. 2004. **40**, № 3. С. 3–20.
17. **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B., Postovalov S. N.** Statistic distribution models for some nonparametric goodness-of-fit tests in testing composite hypotheses // Commun. Statist. Theory and Methods. 2010. **39**, N 3. P. 460–471.
18. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б.** Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I // Измерительная техника. 2009. № 6. С. 3–11.
19. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б.** Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II // Измерительная техника. 2009. № 8. С. 17–26.
20. **Akushkina K. A., Lemeshko S. B., Lemeshko B. Yu.** Models of statistical distributions of nonparametric goodness-of-fit tests in testing composite hypotheses of the generalized Weibull distribution // Proc. of the Third Intern. Conf. on Accelerated Life Testing, Reliability-based Analysis and Design. 19–21 May, 2010. Clermont-Ferrand, France. P. 125–132.

21. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Никулин М. С., Сааидиа Н.** Моделирование распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона // АиТ. 2010. № 7. С. 83–102.

22. **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B.** Models of statistic distributions of nonparametric goodness-of-fit tests in composite hypotheses testing for double exponential law cases // Commun. Statist. Theory and Methods 2011. **40**, N 16. P. 2879–2892.

23. **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B.** Construction of statistic distribution models for nonparametric goodness-of-fit tests in testing composite hypotheses: The computer approach // Quality Technology & Quantitative Management. 2011. **8**, N 4. P. 359–373.

24. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Постовалов С. Н., Чимитова Е. В.** Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. 888 с.

25. **Лемешко Б. Ю., Чимитова Е. В., Плешкова Т. А.** Проверка простых и сложных гипотез о согласии по цензурированным выборкам // Науч. вестн. НГТУ. 2010. № 4(41). С. 13–28.

26. **Kaplan E. L., Meier P.** Nonparametric estimation from incomplete observations // Journ. Amer. Statist. Association. 1958. **5**, N 282. P. 457–481.

27. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. 416 с.

28. **LiTiS** — Программная система статистического анализа данных типа времени жизни. URL: http://amsa.conf.nstu.ru/amsa2011/Litis.msi (дата обращения: 27.03.2012).

29. **Crawford D. E.** Analysis of incomplete life test data on motorettes // Insulation/Circuits. 1970. **16**, N 10. P. 43–48.

30. **Prentice R. L.** Exponential survivals with censoring and explanatory variables // Biometrika. 1973. **60**, N 2. P. 279–288.

31. **Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.** Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. 119 с.

Поступила в редакцию 27 марта 2012 г.