Измерительная техника. 2013. № 5. – С.3–9

519.24

О применении и мощности непараметрических критериев согласия Купера, Ватсона и Жанга

Б. Ю. Лемешко, А.А. Горбунова
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия, e-mail: lemeshko@fpm.ami.nstu.ru

Приводятся оценки мощности критериев согласия Купера, Ватсона и 3-х критериев Жанга со статистиками Z_A, Z_C, Z_K относительно некоторых пар конкурирующих законов при проверке простых и сложных гипотез. Мощность рассматриваемых критериев сравнивается с мощностью критериев Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга.

Ключевые слова: непараметрические критерии согласия, критерий Купера, критерий Ватсона, критерии Жанга, мощность критерия, простые и сложные гипотезы

The power of non-parametric goodness-of-fit tests (Kuiper’s test, Watson’s test and 3 Zhang’s tests with statistics Z_A, Z_C and Z_K) for some pairs of competing simple and composite hypotheses is given. The power of the tests studied is compared with the power of Kolmogorov’s, Cramer-Mises-Smirnov’s and Anderson-Darling’s tests.

Keywords: nonparametric goodness-of-fit tests, Kuiper`s test, Watson`s test, Zhang`s tests, power of test, simple and composite hypotheses

Данной работой мы хотели привлечь внимание к некоторым непараметрическим критериям согласия, которые редко или совсем не используются в работах отечественных специалистов при статистическом анализе результатов экспериментальных данных. Одни, как, например, критерии Купера [1] и Ватсона [2-3], по-видимому, вследствие того, что, являясь развитием и аналогами критериев Колмогорова и Крамера-Мизеса-Смирнова, как будь-то не имеют явных преимуществ перед последними, другие, как критерии, предложенные в работах [4-7], – в силу ограниченной доступности источников и отсутствия независимых рекомендаций по применению.

Применяя критерии согласия, следует различать проверку простых и сложных гипотез. Простая проверяемая гипотеза имеет вид H_0: $F(x)=F(x,\theta)$, где $F(x,\theta)$ – известная теоретическая функция распределения вероятностей с известным скалярным или векторным параметром θ. При проверке простых гипотез непараметрические критерии согласия являются “свободными от распределения”, то есть распределения статистик критериев $G(S|H_0)$ при справедливости проверяемой гипотезы не зависят от вида закона $F(x,\theta)$, с которым проверяется согласие.

При проверке сложных гипотез вида H_0: $F(x)\in\{F(x,\theta),\ \theta\in\Theta\}$, где оценка $\hat{\theta}$ скалярного или векторного параметра распределения $F(x,\theta)$ вычисляется по той же самой выборке, непараметрические критерии согласия теряют свойство свободы от распределения. При проверке сложных гипотез условные распределения статистик $G(S|H_0)$ зависят от ряда факторов: от вида наблюдаемого закона $F(x,\theta)$, соответствующего справедливой проверяемой гипотезе H_0; от типа оцениваемого параметра и числа оцениваемых параметров; в некоторых случаях от конкретного значения параметра (например, в случае семейств гамма- и бета-распределений); от метода оценивания параметров. Различия в распределениях той же самой статистики при проверке простых и сложных гипотез настолько существенны, что пренебрегать этим ни коем случае нельзя.

Подчеркнем, что имеющиеся классические результаты по рассматриваемым в данной работе критериям (распределения статистик критериев или таблицы процентных точек), связаны только с проверкой простых гипотез.

Критерий Купера. В [1] Купер предложил расширенную статистику критерия типа Колмогорова для проверки гипотезы о том, что случайная выборка принадлежит закону с непрерывной функцией распределения $F(x,\theta)$. Статистика V_n критерия определяется следующим соотношением

$$V_n = \sup_{-\infty<x<\infty}\{F_n(x)-F(x,\theta)\} - \inf_{-\infty<x<\infty}\{F_n(x)-F(x,\theta)\},$$

где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, и используется в виде

$$V_n = D_n^+ + D_n^-, \tag{1}$$

где $D_n^+ = \max\left\{\frac{i}{n}-F(x_i,\theta)\right\}$, $D_n^- = \max\left\{F(x_i,\theta)-\frac{i-1}{n}\right\}$, $i=\overline{1,n}$, n – объем выборки, x_i – здесь и далее элементы вариационного ряда, построенного по выборке (упорядоченная по возрастанию выборка).

Существенным недостатком критерия со статистикой (1) является зависимость распределения статистики от объема выборки n. Такую зависимость распределений $G(V_n|H_0)$ статистики при справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 иллюстрирует рис.1, на котором приведены полученные в результате моделирования распределения статистики.

Таблицы процентных точек для случая проверки простых гипотез по критерию со статистикой (1) можно найти в работах [8, 9]. В качестве предельного распределения $G\left(\sqrt{n}V_n|H_0\right)$ статистики $\sqrt{n}V_n$ Купером [1] дана следующая функция распределения [9]:

$$G(s|H_0) = 1-\sum_{m=1}^{\infty}2(4m^2s^2-1)e^{-2m^2s^2}.$$

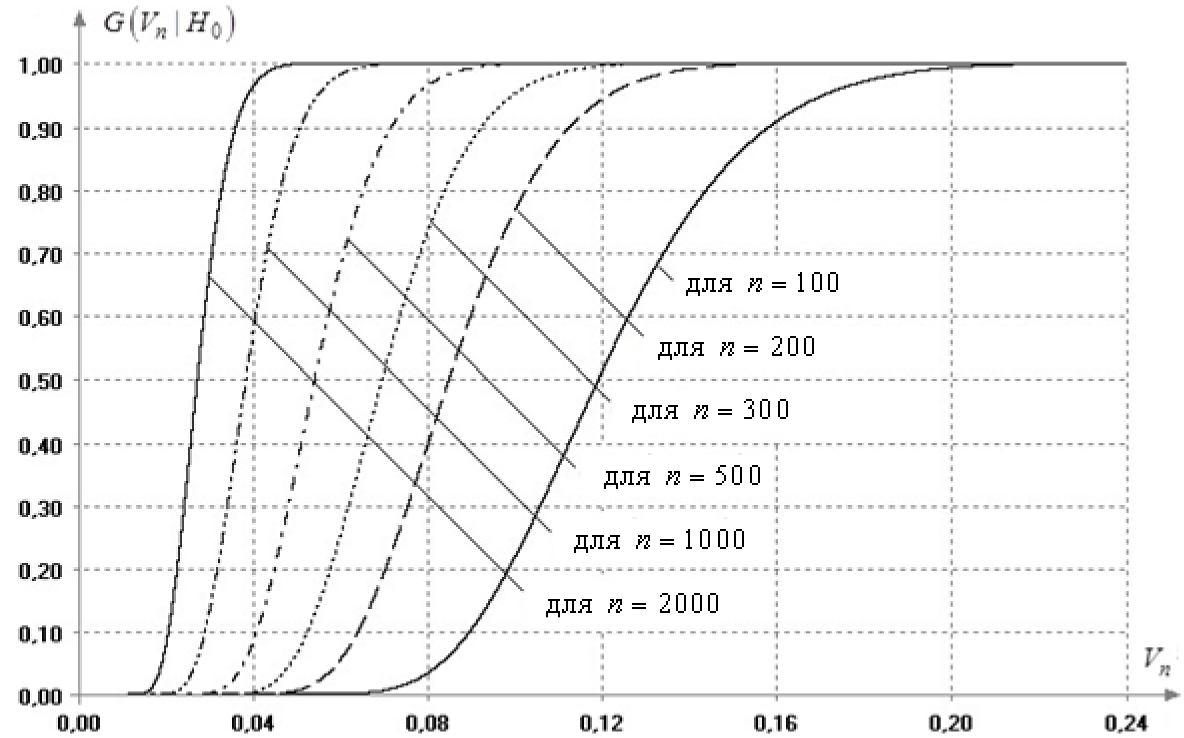

Рис. 1. Распределения статистики (1) критерия Купера $G(V_n \mid H_0)$ в зависимости от объёма выборки n при проверке простой гипотезы

В [10] для модификации статистики

$$V = V_n\left(\sqrt{n} + 0.155 + \frac{0.24}{\sqrt{n}}\right), \tag{2}$$

распределение которой уже не зависит так сильно от n, приведены следующие процентные точки:

α	0.15	0.10	0.05	0.01
V	1.537	1.620	1.747	2.001

Зависимостью распределения статистики (2) от объема выборки можно пренебречь при $n \geq 20$, так как отклонение реального распределения статистики от предельного незначительно и практически не влияет на результаты статистического вывода.

Мы предлагаем применять в критерии Купера статистику в следующей модификации

$$V_n^{mod} = \sqrt{n}(D_n^+ + D_n^-) + \frac{1}{3\sqrt{n}}, \tag{3}$$

где правомерность использования такой поправки логично вытекает из выражения для статистики критерия согласия Смирнова [11, с. 81]. Зависимостью распределения статистики (3) от объема выборки можно практически пренебречь при $n \geq 30$. Процентные точки распределения этой статистики приведены в следующей таблице и практически совпадают с процентными точками статистики (2):

α	0.15	0.10	0.05	0.01
V_n^{mod}	1.537	1.619	1.747	2.000

Статистики (2) и (3) имеют одно и то же предельное распределение. При малых же n различие между распределениями статистик (2) и (3) достаточно существенное. Однако при $n \geq 20$ в области принятия решения (при значениях функций распределения статистик $G(V|H_0) > 0.9$ и $G(V_n^{mod}|H_0) > 0.9$) эти распределения практически совпадают.

В качестве модели предельного распределения статистики (3) можно использовать бета-распределение 3-го рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 \mathrm{B}(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1 - 1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0 + \theta_1}}$$

и вектором параметров $\boldsymbol{\theta} = 7.8624, 7.6629, 2.6927, 2.6373, 0.495\ ^{\mathrm{T}}$. Данному распределению соответствуют следующие процентные точки:

α	0.15	0.10	0.05	0.01
V_n^{mod}	1.537	1.620	1.747	1.994

Модель хорошо описывает распределение статистики на всей области определения и, так же как и предельное, может использоваться для вычисления достигаемого уровня значимости $P\{S > S^* | H_0\}$: вероятности того, что при справедливости проверяемой гипотезы H_0 статистика S критерия превысит величину S^*, где S^* – значение статистики, вычисленное по выборке.

Критерий Ватсона. Статистика критерия Ватсона [2,3] имеет вид

$$U_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F_n(x) - F(x,\theta) - \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(y) - F(y,\theta)) dF(y,\theta) \right\}^2 dF(x,\theta)$$

и используется в следующей удобной для расчетов форме

$$U_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(F(x_i,\theta) - \frac{i - \frac{1}{2}}{n} \right)^2 - n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F(x_i,\theta) - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12n}. \qquad (4)$$

Процентные точки статистики U_n^2 при проверке простой гипотезы можно найти в [2, 12]. Предельное распределение $G(U_n^2 | H_0)$ статистики U_n^2 приведено в [2,3] в виде

$$G(s|H_0) = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}e^{-2m^2\pi^2 s}.$$

Модификации критериев Купера и Ватсона рассматривались в [13], критерия Ватсона в [14]. В [13] процентные точки приведены для распределений модифицированных статистик. В частности, верхние процентные точки для модифицированной статистики Ватсона в форме

$$U_n^{2*} = (U_n^2 - 0.1/n + 0.1/n^2)(1 + 0.8/n)$$

принимают следующие значения [13]:

α	0.15	0.10	0.05	0.01
U_n^{2*}	0.131	0.152	0.187	0.267

Практически те же значения верхних процентных точек имеют место быть для распределения статистики (4):

α	0.15	0.10	0.05	0.01
U_n^2	0.131	0.1513	0.187	0.268

Следует подчеркнуть, что зависимость распределения статистики (4) от объема выборки выражена слабо. При объемах выборок $n \ge 20$ отличием распределения статистики (4) от предельного распределения можно пренебречь.

Предельное распределение статистики (4) по всей области определения хорошо приближается моделью обратного гауссовского закона с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2}\left(\frac{\theta_0}{2\pi\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\theta_0\left(\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)-\theta_1\right)^2}{2\theta_1^2\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)}\right)$$

и вектором параметров $\boldsymbol{\theta} = (0.2044, 0.08344, 1.0, 0.0)^{\mathrm{T}}$. Это распределение (наряду с предельным) можно использовать для вычисления достигаемого уровня значимости.

Отметим, что асимптотическая эффективность критерия Ватсона исследовалась в [15].

Критерии Жанга (Jin Zhang). В диссертации [4] и в последовавших работах [5-7] были предложены непараметрические критерии согласия, статистики которых имеют вид:

$$Z_K = \max_{1 \le i \le n} \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \log \left\{ \frac{i - \frac{1}{2}}{nF(x_i, \theta)} \right\} + \left(n - i + \frac{1}{2} \right) \log \left[\frac{n - i + \frac{1}{2}}{n\{1 - F(x_i, \theta)\}} \right] \right), \tag{5}$$

$$Z_A = -\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\log\{F(x_i, \theta)\}}{n - i + \frac{1}{2}} + \frac{\log\{1 - F(x_i, \theta)\}}{i - \frac{1}{2}} \right], \tag{6}$$

$$Z_C = \sum_{i=1}^{n} \left[\log \left\{ \frac{[F(x_i, \theta)]^{-1} - 1}{(n - \frac{1}{2}) / (i - \frac{3}{4}) - 1} \right\} \right]^2 . \tag{7}$$

В справедливости утверждений автора о более высокой мощности предложенных критериев по сравнению с критериями Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга мы убедились несколько ранее [16]. Однако от рекомендации широкого применения критериев остановила сильная зависимость распределений статистик (5) – (7) от объема выборки n. Например, зависимость от n распределения статистики Z_A иллюстрирует рис. 2, где представлены смоделированные распределения статистики. Такая зависимость осложняет использование критериев. Естественно, зависимость от n сохраняется и при проверке сложных гипотез.

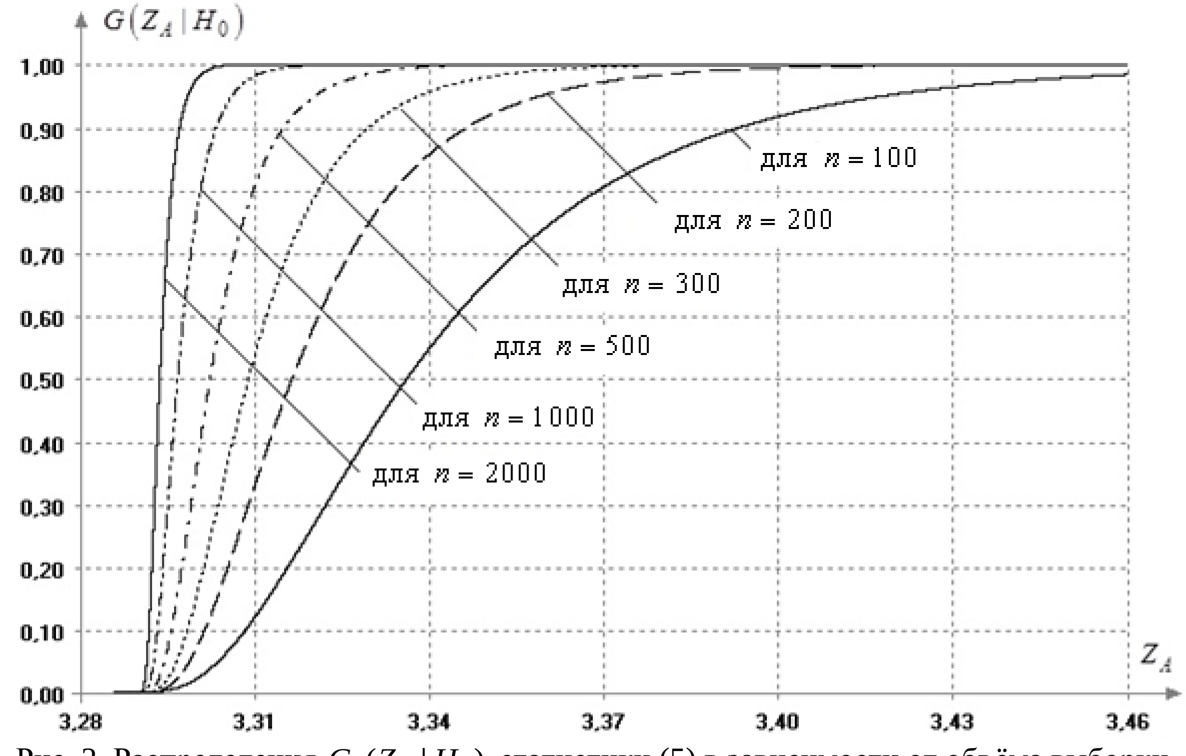

Рис. 2. Распределения $G_n(Z_A | H_0)$ статистики (5) в зависимости от объёма выборки n при проверке простой гипотезы

Сравнительный анализ мощности критериев. Исследование мощности критериев практически не реально без использования компьютерных технологий и статистического моделирования распределений статистик критериев. В данном случае для исследования распределений статистик при справедливости проверяемой $G(S|H_0)$ и справедливости конкурирующей гипотезы $G(S|H_1)$ был использован тот же развиваемый подход [17]. При этом результаты статистического моделирования обеспечивали точность построения распределений статистик $G(S|H_i)$, $i=\overline{0,1}$, порядка $\pm 10^{-3}$ с доверительной вероятностью 0.9. Эта величина определяет максимальную длину доверительного интервала, накрывающего истинное значение функции распределения в точке. Такого значения он достигает в районе медианы.

Для того чтобы сопоставить мощность рассматриваемых критериев с мощностью критериев Колмогорова (К), Крамера-Мизеса-Смирнова (КМС) и Андерсона-Дарлинга (АД), мы демонстрируем результаты исследований на двух парах тех же конкурирующих законов, что и в работах [18-20].

Первую пару составили нормальный и логистический законы: проверяемой гипотезе H_0 соответствовал нормальный закон с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\theta_0\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}\right\},$$

а конкурирующей гипотезе H_1 – логистический с функцией плотности

$$f(x)=\frac{\pi}{\theta_0\sqrt{3}}\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_1)}{\theta_0\sqrt{3}}\right\}\Bigg/\left[1+\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_1)}{\theta_0\sqrt{3}}\right\}\right]^2$$

и параметрами $\theta_0=1$, $\theta_1=0$. В случае простой гипотезы H_0 параметры нормального закона имеют те же значения. Эти два закона близки и трудно различимы с помощью критериев согласия.

Вторую пару составили: H_0 – распределение Вейбулла с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_0(x-\theta_2)^{\theta_0-1}}{\theta_1^{\theta_0}}\exp\left\{-\left(\frac{x-\theta_2}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right\}$$

и параметрами $\theta_0=2$, $\theta_1=2$, $\theta_2=0$; H_1 – гамма-распределение с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\theta_1\Gamma(\theta_0)}\left(\frac{x-\theta_2}{\theta_1}\right)^{\theta_0-1}e^{-(x-\theta_2)/\theta_1}$$

и параметрами $\theta_0=3.12154$, $\theta_1=0.557706$, $\theta_2=0$, при которых гамма-распределение наиболее близко к данному закону Вейбулла.

Мощность исследовалась при проверке простых и сложных гипотез H_0 против простой конкурирующей гипотезы H_1.

Для различных значений вероятности ошибки 1-го рода α и различных объемов выборок в таблице 1 приведены полученные оценки мощности критериев при проверке простой гипотезы H_0 (нормальное распределение) против гипотезы H_1 (логистическое). Соответственно, в таблице 2 – при проверке простой гипотезы H_0 (распределение Вейбулла с параметрами 2, 2, 0) против гипотезы H_1 (гамма-распределение с параметрами 3.12154, 0.557706, 0).

Аналогично, при проверке сложных гипотез соответствующие оценки мощности относительно тех же пар конкурирующих законов представлены в таблицах 3 и 4. При проверке сложных гипотез в качестве метода оценивания параметров закона использовался метод максимального правдоподобия.

Таблица 1. Мощность критериев согласия при проверке простой гипотезы H_0 (нормальное распределение) против гипотезы H_1 (логистическое)

α	n =10	n =20	n =50	n =100	n =300	n =500	n =2000
Мощность критерия Жанга (Z_C)							
0.150	0.214	0.258	0.330	0.410	0.638	0.792	0.997
0.100	0.155	0.195	0.265	0.344	0.574	0.740	0.997
0.050	0.095	0.125	0.187	0.260	0.481	0.654	0.995
0.025	0.063	0.086	0.138	0.201	0.406	0.577	0.991
0.010	0.040	0.057	0.096	0.148	0.327	0.487	0.982
Мощность критерия Жанга (Z_A)							
0.150	0.205	0.243	0.297	0.360	0.582	0.757	0.999
0.100	0.143	0.175	0.221	0.274	0.485	0.675	0.999
0.050	0.075	0.097	0.129	0.167	0.341	0.532	0.996
0.025	0.039	0.052	0.074	0.099	0.230	0.401	0.989
0.010	0.016	0.022	0.034	0.048	0.129	0.259	0.970
Мощность критерия Жанга (Z_K)							
0.150	0.169	0.194	0.246	0.314	0.529	0.693	0.996
0.100	0.115	0.134	0.178	0.235	0.434	0.601	0.991
0.050	0.060	0.072	0.102	0.144	0.303	0.458	0.974
0.025	0.032	0.039	0.059	0.088	0.209	0.340	0.941
0.010	0.015	0.018	0.029	0.047	0.127	0.224	0.872
Критерий Ватсона							
0.150	0.163	0.175	0.214	0.278	0.506	0.680	0.995
0.100	0.111	0.120	0.153	0.208	0.421	0.602	0.992
0.050	0.057	0.064	0.086	0.126	0.301	0.477	0.981

0.025	0.029	0.033	0.048	0.075	0.211	0.368	0.964
0.010	0.012	0.014	0.022	0.037	0.128	0.250	0.929
Критерий Купера							
0.150	0.163	0.174	0.209	0.268	0.482	0.652	0.993
0.100	0.110	0.119	0.149	0.199	0.396	0.570	0.987
0.050	0.057	0.062	0.082	0.118	0.279	0.443	0.972
0.025	0.029	0.032	0.045	0.070	0.192	0.335	0.948
0.010	0.012	0.014	0.020	0.035	0.113	0.223	0.904

Таблица 2. Мощность критериев согласия при проверке простой гипотезы H_0 (распределение Вейбулла с параметрами 2, 2, 0) против гипотезы H_1 (гамма-распределение с параметрами 3,12154, 0,557706, 0)

α	n =10	n =20	n =50	n =100	n =300	n =500	n =2000
Мощность критерия Жанга (Z_C)							
0.150	0.194	0.224	0.305	0.427	0.786	0.938	1.000
0.100	0.140	0.168	0.239	0.350	0.718	0.906	1.000
0.050	0.084	0.106	0.163	0.254	0.603	0.837	1.000
0.025	0.053	0.070	0.116	0.188	0.499	0.756	1.000
0.010	0.031	0.044	0.077	0.131	0.384	0.641	1.000
Мощность критерия Жанга (Z_A)							
0.150	0.183	0.204	0.272	0.394	0.774	0.935	1.000
0.100	0.127	0.142	0.196	0.300	0.693	0.898	1.000
0.050	0.068	0.076	0.107	0.180	0.549	0.815	1.000
0.025	0.036	0.040	0.057	0.103	0.413	0.711	1.000
0.010	0.015	0.017	0.024	0.047	0.264	0.558	1.000
Мощность критерия Жанга (Z_K)							
0.150	0.183	0.205	0.266	0.364	0.684	0.868	1.000
0.100	0.129	0.146	0.198	0.282	0.593	0.805	1.000
0.050	0.070	0.082	0.118	0.182	0.451	0.684	1.000
0.025	0.039	0.047	0.071	0.116	0.335	0.561	0.999
0.010	0.018	0.022	0.037	0.065	0.222	0.415	0.996
Мощность критерия Ватсона							
0.150	0.171	0.190	0.251	0.350	0.661	0.842	1.000
0.100	0.117	0.132	0.185	0.273	0.581	0.787	1.000
0.050	0.061	0.072	0.108	0.175	0.455	0.685	0.999
0.025	0.032	0.038	0.063	0.111	0.346	0.581	0.998
0.010	0.013	0.017	0.030	0.059	0.235	0.448	0.995
Мощность критерия Купера							
0.150	0.170	0.187	0.243	0.335	0.633	0.819	1.000
0.100	0.116	0.130	0.178	0.258	0.550	0.759	1.000

0.050	0.060	0.069	0.103	0.163	0.423	0.649	0.999
0.025	0.031	0.037	0.058	0.102	0.317	0.541	0.997
0.010	0.013	0.016	0.028	0.054	0.208	0.407	0.992

Таблица 3. Мощность критериев согласия при проверке сложной гипотезы H_0 (нормальное распределение) против гипотезы H_1 (логистическое)

α	n =10	n =20	n =50	n =100	n =300	n =500	n =2000
Мощность критерия Жанга (Z_A)							
0.150	0.210	0.259	0.340	0.434	0.706	0.865	1.000
0.100	0.153	0.198	0.272	0.358	0.633	0.815	1.000
0.050	0.090	0.126	0.185	0.256	0.512	0.718	0.999
0.025	0.052	0.080	0.126	0.180	0.403	0.615	0.998
0.010	0.025	0.045	0.075	0.112	0.282	0.478	0.995
Мощность критерия Жанга (Z_C)							
0.150	0.195	0.236	0.321	0.427	0.711	0.866	0.998
0.100	0.142	0.186	0.270	0.374	0.662	0.831	0.998
0.050	0.086	0.126	0.205	0.302	0.584	0.770	0.998
0.025	0.052	0.086	0.156	0.243	0.510	0.705	0.997
0.010	0.026	0.051	0.105	0.176	0.411	0.609	0.996
Мощность критерия Жанга (Z_K)							
0.150	0.176	0.221	0.316	0.424	0.692	0.839	0.999
0.100	0.123	0.162	0.249	0.349	0.614	0.779	0.998
0.050	0.068	0.097	0.167	0.248	0.492	0.668	0.995
0.025	0.038	0.058	0.111	0.176	0.386	0.557	0.988
0.010	0.018	0.029	0.066	0.112	0.271	0.424	0.966
Мощность критерия Ватсона							
0.150	0.177	0.201	0.268	0.367	0.673	0.848	1.000
0.100	0.124	0.145	0.204	0.294	0.599	0.798	1.000
0.050	0.068	0.084	0.128	0.200	0.481	0.704	0.999
0.025	0.038	0.049	0.081	0.135	0.380	0.608	0.999
0.010	0.018	0.025	0.044	0.080	0.270	0.486	0.996
Мощность критерия Купера							
0.150	0.171	0.194	0.256	0.346	0.633	0.812	1.000
0.100	0.119	0.139	0.192	0.273	0.554	0.752	0.999
0.050	0.064	0.079	0.118	0.181	0.433	0.646	0.998
0.025	0.035	0.045	0.073	0.119	0.333	0.544	0.996
0.010	0.016	0.022	0.039	0.069	0.228	0.416	0.989

Таблица 4. Мощность критериев согласия при проверке сложной гипотезы H_0 (распределение Вейбулла с параметрами 2, 2, 0) против гипотезы H_1 (гамма-распределение с параметрами 3,12154, 0,557706, 0)

α	n =10	n =20	n =50	n =100	n =300	n =500	n =2000
Мощность критерия Жанга (Z_A)							
0.150	0.165	0.219	0.358	0.533	0.880	0.974	1.000
0.100	0.112	0.161	0.287	0.456	0.837	0.960	1.000
0.050	0.059	0.095	0.196	0.345	0.754	0.925	1.000
0.025	0.030	0.056	0.132	0.256	0.664	0.879	1.000
0.010	0.013	0.028	0.077	0.169	0.540	0.799	1.000
Мощность критерия Жанга (Z_C)							
0.150	0.170	0.215	0.341	0.509	0.867	0.971	1.000
0.100	0.113	0.152	0.264	0.426	0.818	0.954	1.000
0.050	0.055	0.081	0.166	0.303	0.722	0.913	1.000
0.025	0.024	0.041	0.098	0.203	0.610	0.853	1.000
0.010	0.007	0.014	0.044	0.107	0.440	0.732	1.000
Мощность критерия Жанга (Z_K)							
0.150	0.147	0.173	0.277	0.436	0.814	0.947	1.000
0.100	0.097	0.117	0.206	0.352	0.747	0.916	1.000
0.050	0.048	0.060	0.121	0.236	0.623	0.844	1.000
0.025	0.023	0.030	0.070	0.151	0.499	0.751	1.000
0.010	0.009	0.012	0.032	0.081	0.350	0.609	1.000
Мощность критерия Ватсона							
0.150	0.169	0.195	0.267	0.377	0.710	0.885	1.000
0.100	0.116	0.138	0.200	0.299	0.634	0.838	1.000
0.050	0.061	0.077	0.122	0.199	0.511	0.748	1.000
0.025	0.033	0.043	0.075	0.131	0.401	0.650	1.000
0.010	0.015	0.020	0.039	0.075	0.284	0.523	0.999
Мощность критерия Купера							
0.150	0.167	0.189	0.248	0.343	0.661	0.852	1.000
0.100	0.114	0.132	0.183	0.266	0.579	0.797	1.000
0.050	0.060	0.072	0.108	0.171	0.450	0.691	1.000
0.025	0.032	0.040	0.064	0.109	0.341	0.583	0.999
0.010	0.014	0.018	0.032	0.059	0.230	0.449	0.998

Сравнивая оценки мощности рассматриваемых критериев с результатами для критериев Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга, приведенными в [19, 20], можно упорядочить критерии по мощности следующим образом:

– при проверке простых гипотез относительно пары “нормальный закон – логистический закон” – $Z_c \succ Z_a \succ Z_k \succ U_n^2 \succ V_n \succ AD \succ K \succ KMC$;

– при проверке простых гипотез относительно пары “закон Вейбулла – гамма-распределение” – $Z_c \succ Z_a \succ Z_k \succ U_n^2 \succ V_n \succ AD \succ KMC \succ K$;

– при проверке сложных гипотез относительно пары “нормальный закон – логистический закон” – $Z_a \approx Z_c \succ Z_k \succ AD \succ KMC \succ U_n^2 \succ V_n \succ K$;

– при проверке сложных гипотез относительно пары “закон Вейбулла – гамма-распределение” – $Z_a \succ Z_c \succ AD \succ Z_k \succ KMC \succ U_n^2 \succ V_n \succ K$.

Если сравнить полученные результаты с мощностью критериев типа χ^2, то в случае проверки простых гипотез [19] критерий χ^2 Пирсона оказывается на третьей позиции при условии использования асимптотически оптимального группирования [17] и выбора числа интервалов, при котором критерий будет иметь максимальную мощность [17, 21]. Но в случае проверки сложных гипотез [20] позиции критериев χ^2 Пирсона и типа χ^2 Никулина-Рао-Робсона [22- 24] ухудшаются: они оказываются на 7-й – 8-й позиции в общем ряду критериев по убыванию мощности. Однако заметим, что мощность этих критериев можно максимизировать относительно заданной конкурирующей гипотезы за счет оптимального выбора границ и числа интервалов группирования [17, 21].

Окончательные итоги работы можно сформулировать следующим образом.

Критерии Купера и Ватсона целесообразно использовать при проверке простых гипотез, так как в этой ситуации они имеют преимущество в мощности перед критериями Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга. Проблем применения этих критериев при проверке простых гипотез нет.

При проверке сложных гипотез критерии Купера и Ватсона утрачивают преимущество перед критериями Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга. Однако отсюда не следует отказ от использования критериев при проверке сложных гипотез. В настоящий момент препятствием служит отсутствие знаний о распределениях (о процентных точках распределений) статистик критериев при проверке соответствующих сложных гипотез. В продолжение данной работы будут представлены результаты (модели предельных распределений и таблицы процентных точек), которые подобно работам [17, 25-27] позволят применять критерии Купера и Ватсона для проверки сложных гипотез относительно различных параметрических моделей законов распределения вероятностей.

Критерии Жанга, особенно критерии со статистиками Z_c и Z_a, имеют неоспоримое преимущество в мощности перед остальными, более заметное при проверке простых гипотез. При проверке простых гипотез определенные трудности с использованием критериев связаны с существенной зависимостью распределений статистик от объема выборок, но эти трудности не принципиальны.

При проверке сложных гипотез, когда к зависимости распределений статистик от n добавляется зависимость распределений статистик критериев от комбинации факторов, определяющих сложность гипотезы, эти трудности становятся принципиальными, так как невозможно для бесконечного числа вариантов сложных гипотез заранее найти законы распределения статистик критериев. Однако и здесь есть выход, который заключается в изменении технологии проверки сложной гипотезы с применением конкретного критерия [28]. Соответствующий подход предполагает исследование требуемой закономерности в интерактивном режиме. Применительно к данной ситуации это означает, что распределение статистики применяемого критерия, которое неизвестно к моменту начала решения задачи статистического анализа (так как неизвестны все факторы, определяющие характер сложной гипотезы), должно находиться в реальном времени данного анализа и использоваться на этапе формирования статистического вывода – принять или отклонить проверяемую гипотезу на основе вычисленного значения статистики критерия и полученного на основе использования компьютерных технологий знания о распределении статистики. Такой подход, использующий возможности многоядерной и многопроцессорной вычислительной техники, уже успешно реализован [28].

В заключение позволим себе высказать следующее. Дальнейшее развитие аппарата прикладной математической статистики и достижение положительного эффекта от применения статистических методов в сфере науки, техники и экономики неразрывно связаны с интенсивным использованием компьютерных технологий имитационного моделирования и исследования статистических и вероятностных закономерностей, с развитием соответствующего наукоемкого программного обеспечения.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках госзадания (проект 8.1274.2011) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение № 14.В37.21.0860).

Литература

1. **Kuiper N.H.** Tests concerning random points on a circle / N.H. Kuiper // *Proc. Konikl. Nederl. Akad. Van Wettenschappen*. 1960. Series A, V. **63**. P. 38 – 47.

2. **Watson G.S.** Goodness-of-fit tests on a circle. I. / G.S. Watson // *Biometrika*. 1961. V. **48**. No. 1-2. P. 109 – 114.

3. **Watson G.S.** Goodness-of-fit tests on a circle. II. / G.S. Watson // *Biometrika*. 1962. V. **49**. No. 1-2. P. 57 – 63.

4. **Zhang J.** Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests // PhD Thesis. York University, Toronto. 2001. (http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/NQ66371.pdf)

5. **Zhang J.** Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio / J. Zhang // *Journal of the Royal Statistical Society: Series B.* 2002. V. **64**. Part 2. P. 281 – 294.

6. **Zhang J., Wub Yu.** Likelihood-ratio tests for normality // Computational Statistics & Data Analysis. 2005. V. 49, No. 3. P. 709 – 721.

7. **Zhang J.** Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio / J. Zhang // Technometrics. 2006. V. **48**, No. 1. P. 95 – 103.

8. **Arsham H.** Kuiper's P-value as a measuring tool and decision procedure for the goodness-of-fit test // J. Appl. Statist., 1988. V. **15**. P. 131 – 135.

9. **Stephens M.A.** The goodness-of-fit statistic V_N: distribution and significance points / M.A. Stephens // *Biometrika*. 1965. V. **52**, No. 3-4. P. 309 – 321.

10. **Stephens M.A.** EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons / M. A. Stephens // Journal of the American Statistical Association, 1974. V. 69, No. 347. P. 730 – 737.

11. **Большев Л.Н., Смирнов Н.В.** Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с.

12. **Pearson E.S., Hartley H.O.** Biometrika Tables for Statisticians. Vol. 2, 1972.

13. **Stephens M.A.** Use of the Kolmogorov-Smirnov, Cramer-Von Mises and Related Statistics Without Extensive Tables // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 1970. V.32, No. 1. P. 115 – 122.

14. **Koziol. J.A.** A modification of Watson's statistic for goodness-of-fit // Communications in Statistics – Theory and Methods. 1989. V. 18, No. 10. P. 3739 – 3747.

15. **Nikitin Ya.Yu**. Bahadur effectiveness of Watson-Darling goodness-of-fit tests // Journal of Mathematical Sciences. 1988. V. 43, No. 6. P. 2833-2838.

16. **Козлова А.В., Лемешко Б.Ю.** Исследование распределений статистик и мощности непараметрических критериев согласия, предложенных Jin Zhang // Материалы Российской НТК “Информатика и проблемы телекоммуникаций”, Новосибирск. 2007. Т.1. С.136 – 139.

17. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход : монография / **Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова**. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с.

18. **Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н.** Мощность критериев согласия при близких альтернативах // Измерительная техника. 2007. № 2. С.22-27; **Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Postovalov S.N.** The power of goodness of fit tests for close alternatives // Measurement Techniques, 2007. V.50, № 2. P. 132 – 141.

19. **Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н.** Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т.11. № 2(34). С.96 – 111; **Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B. and Postovalov S.N.** Comparative Analysis of the Power of Goodness-of-Fit Tests for Near Competing Hypotheses. I. The Verification of Simple Hypotheses // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2009, Vol. 3, No. 4. P. 462 – 475.

20. **Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н.** Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. - Т.11. № 4(36). С.78-93; **Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B. and Postovalov S.N.** Comparative analysis of the power of goodness-of-fit tests for near competing hypotheses. II. Verification of complex hypotheses // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2010 V. 4. No. 1. P. 79 – 93.

21. **Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В.** О выборе числа интервалов в критериях согласия типа χ^2 // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2003. Т. 69. № 1. – С. 61-67.

22. **Никулин М.С.** О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. 18, № 3. С. 675 – 676.

23. **Никулин М.С.** Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. 18, № 3. С. 583 – 591.

24. **Rao K.C., Robson D.S.** A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family // Comm. Statist. 1974. V. 3. P. 1139 – 1153.

25. **Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.** Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч.I // Измерительная техника. 2009. № 6. С.3 – 11; **Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B.** Distribution models for nonparametric tests for fit in verifying complicated hypotheses and maximum-likelihood estimators. Part 1 // Measurement Techniques. 2009. Vol. 52, № 6. P.555 – 565.

26. **Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.** Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч.II // Измерительная техника. 2009. № 8. С.17 – 26; **Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B.** Models for statistical distributions in nonparametric fitting tests on composite hypotheses based on maximum-likelihood estimators. Part II // Measurement Techniques. 2009. Vol. 52. № 8. P. 799 – 812.

27. **Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B. and Postovalov S.N.** Statistic Distribution Models for Some Nonparametric Goodness-of-Fit Tests in Testing Composite Hypotheses // Communications in Statistics - Theory and Methods, 2010. Vol. 39, No. 3. P. 460 – 471.

28. **Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Rogozhnikov A.P.** Real-Time Studying of Statistic Distributions of Non-Parametric Goodness-of-Fit Tests when Testing Complex Hypotheses // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference” – AMSA’2011, Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. P. 19 – 27.