

519.233.3: 006.91.001

Расширение области применения критериев типа Граббса, используемых при отбраковке аномальных измерений

Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко

Получены таблицы процентных точек для статистик критериев типа Граббса при проверке на выброс одновременно трех максимальных (трех минимальных) значений и одновременно минимального и максимального значений в выборке. Методами статистического моделирования исследованы распределения статистик критериев Граббса, используемых в задачах отбраковки аномальных измерений, при отклонениях наблюдаемого закона от нормального.

Ключевые слова: проверка гипотез, аномальные наблюдения, критерии Граббса, процентные точки

В практической деятельности важную роль играют статистические критерии, предназначенные для выделения аномальных результатов измерений (выбросов). Если не исключить выбросы из анализируемых данных, то традиционно применяемые классические методы статистического анализа, как правило, не являющиеся робастными, чаще всего приводят к некорректным выводам.

Результаты измерений, содержащие грубые ошибки обычно бывают хорошо заметны и могут быть выделены без применения статистических методов. Применение статистических методов выявления грубых ошибок целесообразно лишь в сомнительных случаях, когда информация о качестве измерений либо неполна, либо ненадежна [1]. При этом, применяя статистические методы, следует отслеживать выполнение тех предположений, в условиях которых корректно их использование.

Большинство существующих критериев отбраковки “подозрительных” данных опирается на предположение о принадлежности наблюдаемых случайных величин нормальному закону. К такого рода критериям относятся простые критерии Граббса [2-4], применяемые для проверки на аномальность (для оценки аномальности) выделяющихся результа-

тов измерений. Использование именно этих критериев предполагает стандарт [5], представляющий собой аутентичный текст соответствующего международного стандарта ИСО 5725. Статистики критерия Граббса предусматривают возможность проверки на наличие в выборке либо одного аномального результата измерения (наименьшего или наибольшего), либо двух (двух наименьших в выборке или двух наибольших).

Наш интерес к критериям Граббса был обусловлен предпочтением, отданным этим критериям при реализации стандарта ИСО 5725. В настоящей работе мы хотели показать, как изменяются распределения статистик критерия Граббса под влиянием отклонения наблюдаемого закона от нормального. Это должно дать понимание того, что будет происходить с результатами применения критериев при нарушении предположений о нормальности. Вторая цель заключалась в реализации возможности применения критериев с аналогичными статистиками для проверки еще двух гипотез: **a)** для проверки на аномальность одновременно одного минимального и одного максимального элементов в выборке; **b)** для проверки на аномальность либо трех минимальных, либо трех максимальных элементов в выборке.

В основе данных исследований лежит методика статистического моделирования, опирающаяся на развиваемое программное обеспечение.

Критерий Граббса проверки на один выброс. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n – наблюдаемая выборка, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ – построенный по ней вариационный ряд. Проверяемая гипотеза H_0 заключается в том, что все X_1, X_2, \dots, X_n принадлежат одной генеральной совокупности. При проверке на выброс наибольшего выборочного значения конкурирующая гипотеза H_1 заключается в том, что $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-1)}$ принадлежат одному закону, а $X_{(n)}$ – некоторому другому, существенно сдвинутому вправо. При проверке на выброс $X_{(n)}$ статистика критерия Граббса имеет вид

$$G_n = (X_{(n)} - \bar{X}) / S, \quad (1)$$

где

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad (2)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2, \quad (3)$$

$$S = \sqrt{S^2}. \quad (4)$$

При проверке на выброс наименьшего выборочного значения конкурирующая гипотеза H_1 предполагает, что $X_{(1)}$ принадлежит некоторому другому закону, существенно сдвинутому влево. В данном случае вычисляемая статистика принимает вид

$$G_1 = (\bar{X} - X_{(1)}) / S. \quad (5)$$

Максимальный или минимальный элемент выборки считается выбросом, если значение соответствующей статистики превысит критическое: $G_n \geq G_{n,1-\alpha}$ или $G_1 \geq G_{1,1-\alpha}$, где α – задаваемый уровень значимости.

Статистики (1) и (5) распределены одинаково. Вид условных распределений $F(G_i | H_0)$ статистик (1) и (5) в зависимости от объема анализируемой выборки при нормальном законе наблюдаемых величин представлен на рис. 1. Распределения статистики существенно зависят от объема выборки n . Аналитический вид распределений статистики в стандарте [5] и первоисточниках [2-4] не приводится. Даются лишь верхние процентные точки для различных объемов выборок, так как решение об аномальности проверяемого минимального или максимального выборочного значения принимается по правому “хвосту” распределения статистики. Если в стандарте процентные точки приведены для объемов выборок n лишь от 3 до 40, то в [4] процентные точки приведены в диапазоне n до 147.

Замечание: В таблице процентных точек, приведенной в стандарте ([5], табл. 5), неверно указаны уровни значимости α . На самом деле в данной таблице

представлены значения, соответствующие уровням значимости 0.005 (0.5%) и 0.025 (2.5%), а не 0.01 (1%) и 0.05 (5%). Чтобы убедиться в этом, достаточно обратиться к первоисточнику [4]. Данное несоответствие было замечено в процессе исследований распределений статистик Граббса. Это замечание в силе и для процентных точек статистик, предназначенных для анализа на выбросы одновременно двух минимальных или двух максимальных выборочных значений. Вследствие такого недоразумения при задании уровня значимости 0.01 или 0.05 и использовании процентных точек, приведенных в стандарте ([5], табл.5), ошибочно не будет отбраковываться часть выбросов.

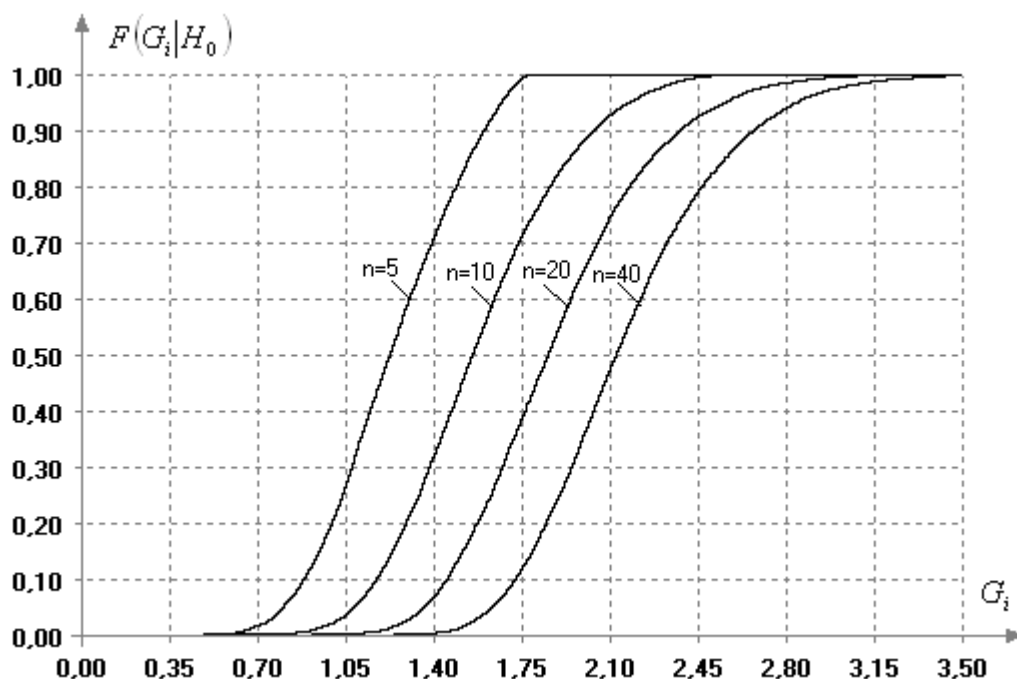


Рис. 1. Зависимость распределения статистик (1) и (5) критерия Граббса от объема выборок n (в случае нормального закона)

Данный критерий можно использовать для выделения аномальных результатов измерений только в случае нормального закона. Если наблюдаемые случайные величины принадлежат некоторому другому закону распределения, то предельное распределение статистик (1) и (5) имеет иной вид. На рис. 2 отражено изменение распределений статистик (1) и (5) в случае принадлежности наблюдаемой случайной величины различным законам экспоненциального семейства распределений с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\}. \quad (6)$$

Частными случаями семейства являются нормальный закон при параметре формы $\theta_2 = 2$ и распределение Лапласа при $\theta_2 = 1$. Предельными случаями – распределение Коши ($\theta_2 \rightarrow 0$) и равномерное распределение ($\theta_2 \rightarrow \infty$). На рис. 2 приведены распределения статистик (1) и (5) при наблюдаемых законах (6) со значениями параметра формы $\theta_2 = 0.5, 1, 2, 3, 5, 10$ и при объемах выборок $n = 40$. Как видим, распределения статистик отличаются очень сильно.

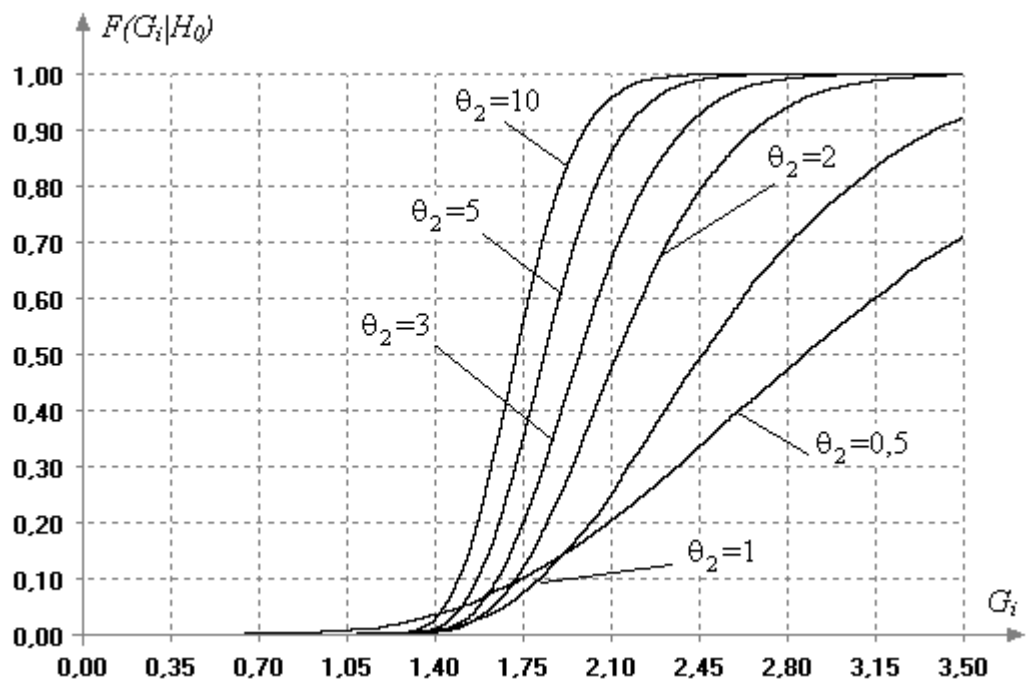


Рис.2. Изменение распределений статистик (1) и (5) критерия Граббса в случае различных законов семейства распределений (6) при $n = 40$

Справедливости ради следует напомнить, что впервые распределение статистики вида (1) было исследовано в работе [6]. В [1] приводится целый ряд статистик вида (1) и (5), отличающихся друг от друга комбинациями известных и оцениваемых параметров сдвига и масштаба нормального закона. Применение критериев, опирающихся на варианты та-

ких статистик, было предусмотрено в [7, 8]. Все приводимые здесь статистики, не смотря на похожесть, отличаются от статистик Граббса (1) и (5), в которых используются оценки обоих параметров нормального закона. Вследствие этого и распределения ни одной из этих статистик не совпадает в точности с распределением статистик Граббса (1) и (5). Обзор еще ряда критериев, предназначенных для выявления и исключения аномальных выборочных значений, приведен в [9].

Проверка на два выброса. В этом случае конкурирующая гипотеза H_1 может быть связана с предположением, что, например, некоторому другому закону принадлежат $X_{(n-1)}$ и $X_{(n)}$ (либо $X_{(1)}$ и $X_{(2)}$). При проверке на выброс одновременно двух наибольших значений статистика критерия Граббса имеет вид

$$G = S_{n-1,n}^2 / S_0^2, \quad (7)$$

где

$$S_0^2 = \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2, \quad (8)$$

$$S_{n-1,n}^2 = \sum_{j=1}^{n-2} (X_j - \bar{X}_{n-1,n})^2, \quad (9)$$

$$\bar{X}_{n-1,n} = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} X_j. \quad (10)$$

Для проверки на выброс одновременно двух наименьших величин $X_{(1)}$ и $X_{(2)}$ статистика критерия принимает вид

$$G = S_{1,2}^2 / S_0^2, \quad (11)$$

где

$$S_{1,2}^2 = \sum_{j=3}^n (X_j - \bar{X}_{1,2})^2, \quad (12)$$

$$\bar{X}_{1,2} = \frac{1}{n-2} \sum_{j=3}^n X_j. \quad (13)$$

Оба значения ($X_{(n-1)}$, $X_{(n)}$ или $X_{(1)}$, $X_{(2)}$) считаются выбросами, если значение соответствующей статистики окажется ниже критического: $G < G_\alpha$.

Вид условных распределений $F(G|H_0)$ статистик G (7) и (11) в зависимости от объема анализируемой выборки представлен на рис. 3. Аналитический вид распределений статистики G в стандарте [5] и в [2-4] не приводится. Даются лишь нижние процентные точки для различных объемов выборок, так как решение об аномальности одновременно двух наименьших или двух наибольших выборочных значений принимается по левому “хвосту” распределения статистики. В стандарте нижние процентные точки приведены для объемов выборок n лишь от 4 до 40. В первоисточнике [4] нижние процентные точки распределения статистики G приведены в диапазоне n до 149.

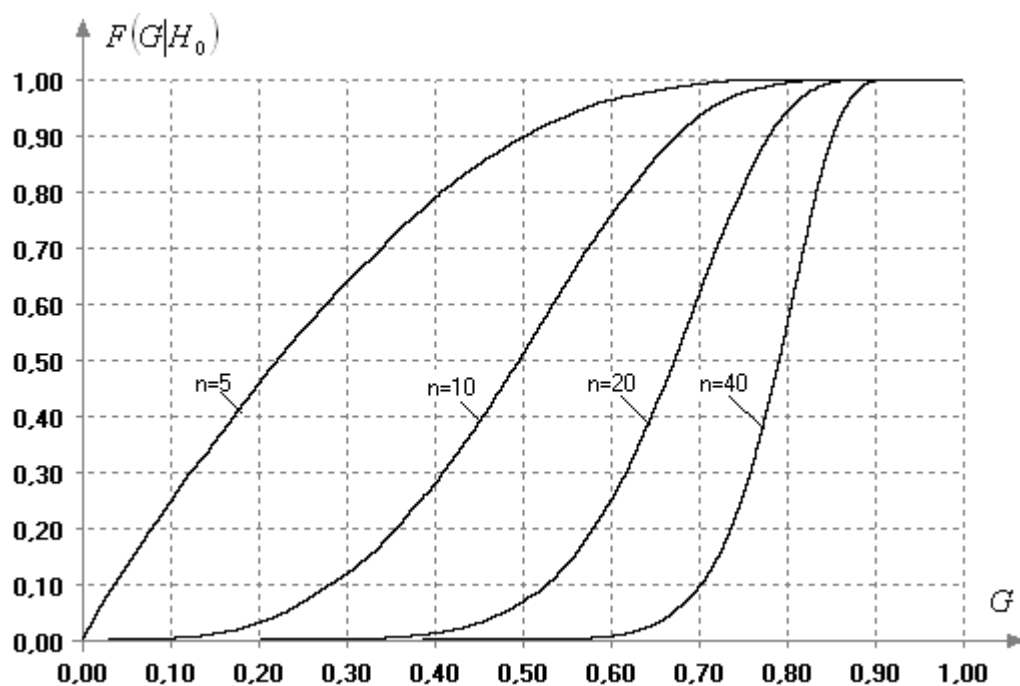


Рис. 3. Зависимость распределения статистик (7) и (11) критерия Граббса от объема выборок (в случае нормального закона)

Если наблюдаемые случайные величины принадлежат некоторому другому закону, отличному от нормального, то распределения статистик (7) и (11) принимают иной вид. Например, на рис. 4 приведены распределения статистик (7) и (11) при наблюдаемых законах вида (6) со значениями параметра формы $\theta_2 = 1, 2, 3, 5, 10$ при объемах выборок $n = 20$. Как следует из картины, представленной на этом рисунке, распределения статистик Граббса (7) и (11) очень сильно зависят от вида закона, которому принадлежат наблюдаемые величины.

Как и в первом случае, критерий со статистиками (7) – (11) можно применять для отбраковки аномальных наблюдений, используя таблицы процентных точек, приведенные в [5] и в [4], только в случае нормального закона. Если наблюдаемый закон отличается от нормального, то использование указанных таблиц, как следует из картин, представленных на рисунках 2 и 4, может приводить как к пропуску выбросов, так и к причислению к аномальным данным, не являющихся таковыми.

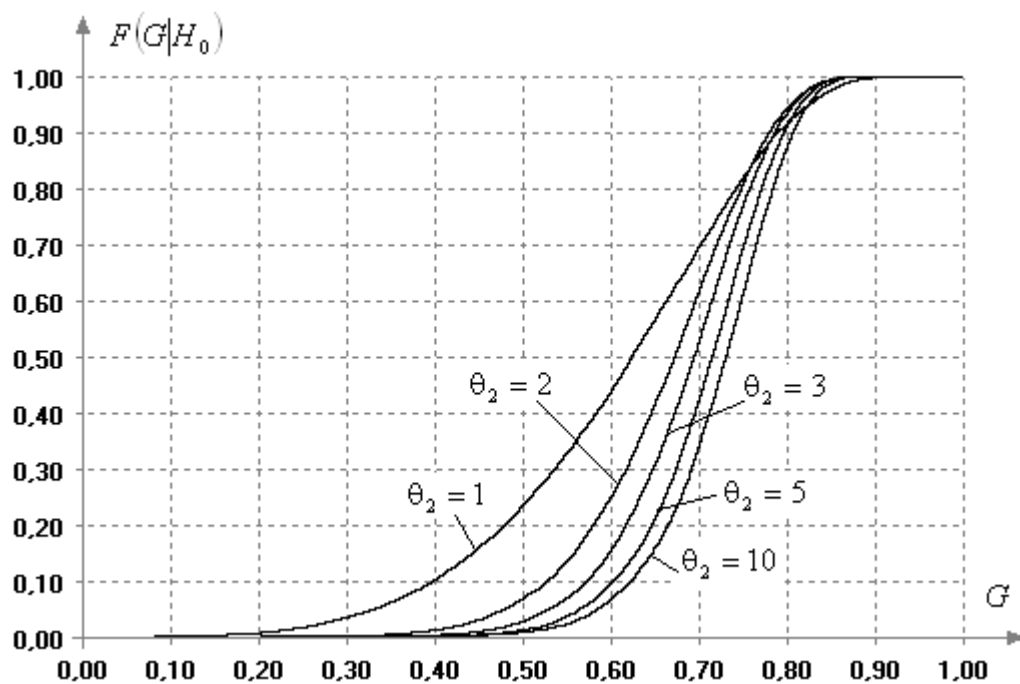


Рис. 4. Изменение распределений статистик (7) и (11) Граббса в случае различных законов распределения при $n = 20$

Проверка на три выброса. Подход (7) – (13), можно естественно развивать для построения статистик, предназначенных, например, для проверки на аномальность одновременно трех минимальных или трех максимальных выборочных значений, или для проверки на выброс одновременно минимального и максимального значений в выборке. Для этого необходимо исследовать лишь распределения соответствующих статистик.

В случае проверки на аномальность одновременно трех минимальных или трех максимальных выборочных значений конкурирующая гипотеза H_1 предполагает, что некоторому другому закону принадлежат $X_{(1)}$, $X_{(2)}$ и $X_{(3)}$ (либо $X_{(n-2)}$, $X_{(n-1)}$ и $X_{(n)}$). Статистики для проверки на аномальность одновременно трех минимальных или трех максимальных выборочных значений формируются в соответствии с соотношениями:

$$G_{1,2,3} = \frac{S_{1,2,3}^2}{S_0^2}, \quad (14)$$

$$G_{n-2,n-1,n} = \frac{S_{n-2,n-1,n}^2}{S_0^2}, \quad (15)$$

где

$$S_{1,2,3}^2 = \sum_{j=4}^n (X_j - \bar{X}_{1,2,3})^2, \quad (16)$$

$$\bar{X}_{1,2,3} = \frac{1}{n-3} \sum_{j=4}^n X_j. \quad (17)$$

$$S_{n-2,n-1,n}^2 = \sum_{j=1}^{n-3} (X_j - \bar{X}_{n-2,n-1,n})^2, \quad (18)$$

$$\bar{X}_{n-2,n-1,n} = \frac{1}{n-3} \sum_{j=1}^{n-3} X_j. \quad (19)$$

Статистики (14) и (15) распределены одинаково. Все три измерения считаются выбросами, если значение соответствующей статистики окажется ниже критического: $G_{1,2,3} < G_{3,\alpha}$ или $G_{n-2,n-1,n} < G_{3,\alpha}$.

Естественно, что распределения данных статистик также являются зависящими от объема выборок n . На рис. 5 показана зависимость от n условных распределений $F(G_{1,2,3}|H_0)$ и $F(G_{n-2,n-1,n}|H_0)$ статистик (14) и (15) в случае извлечения выборок из нормальной генеральной совокупности. Вычисленные с использованием методики статистического моделирования нижние процентные точки ($\alpha=0.1\%, 0.5\%, 1\%, 5\%, 10\%$) распределений статистик (14) и (15) при $5 \leq n \leq 50$ представлены в таблице 1. Процентные точки строились по моделируемым выборкам статистик. Объем каждой выборки, по которой оценивались процентные точки, составлял 50000 смоделированных значений статистики. В таблице приведены значения процентных точек, полученные усреднением по 15 таким экспериментам.

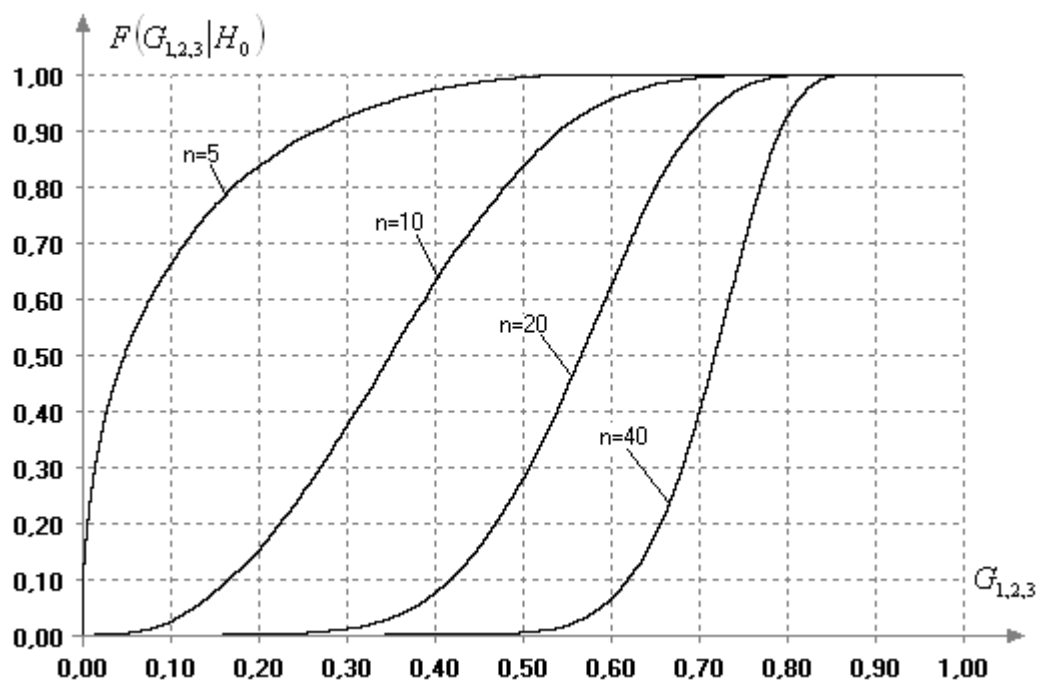


Рис. 5. Зависимость распределения статистик (14) и (15) от объема выборок (в случае нормального закона)

Таблица 1. Нижние процентные точки статистик (14) – (15) критерия типа Граббса

<i>n</i>	0.1%	0.5%	1%	2.5%	5%	10%
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015
6	0.0002	0.0009	0.0019	0.0048	0.0099	0.0207
7	0.0023	0.0065	0.0106	0.0200	0.0332	0.0552
8	0.0079	0.0186	0.0268	0.0437	0.0640	0.0943
9	0.0176	0.0355	0.0478	0.0711	0.0966	0.1333
10	0.0314	0.0561	0.0717	0.1001	0.1302	0.1703
11	0.0471	0.0779	0.0968	0.1293	0.1619	0.2047
12	0.0659	0.1012	0.1222	0.1576	0.1925	0.2368
13	0.0841	0.1237	0.1471	0.1850	0.2206	0.2660
14	0.1035	0.1468	0.1707	0.2104	0.2475	0.2935
15	0.1234	0.1692	0.1943	0.2351	0.2726	0.3182
16	0.1412	0.1905	0.2170	0.2583	0.2962	0.3419
17	0.1607	0.2109	0.2374	0.2799	0.3178	0.3631
18	0.1797	0.2309	0.2583	0.3008	0.3382	0.3828
19	0.1973	0.2503	0.2782	0.3197	0.3575	0.4016
20	0.2161	0.2688	0.2966	0.3387	0.3757	0.4190
21	0.2313	0.2856	0.3139	0.3558	0.3924	0.4348
22	0.2488	0.3023	0.3303	0.3718	0.4082	0.4505
23	0.2643	0.3197	0.3466	0.3881	0.4238	0.4645
24	0.2795	0.3339	0.3606	0.4020	0.4375	0.4782
25	0.2952	0.3491	0.3762	0.4164	0.4510	0.4906
26	0.3091	0.3625	0.3890	0.4294	0.4638	0.5028
27	0.3209	0.3750	0.4022	0.4415	0.4756	0.5144
28	0.3357	0.3887	0.4151	0.4536	0.4874	0.5250
29	0.3475	0.4001	0.4270	0.4658	0.4984	0.5353
30	0.3608	0.4127	0.4382	0.4763	0.5087	0.5451
31	0.3710	0.4228	0.4486	0.4867	0.5186	0.5544
32	0.3797	0.4331	0.4596	0.4968	0.5282	0.5634
33	0.3935	0.4441	0.4692	0.5060	0.5370	0.5716
34	0.4040	0.4547	0.4793	0.5151	0.5456	0.5798
35	0.4131	0.4643	0.4885	0.5242	0.5541	0.5876
36	0.4239	0.4730	0.4974	0.5330	0.5623	0.5952
37	0.4317	0.4824	0.5064	0.5411	0.5697	0.6023
38	0.4414	0.4915	0.5149	0.5487	0.5772	0.6090
39	0.4511	0.4999	0.5228	0.5563	0.5843	0.6158
40	0.4610	0.5077	0.5296	0.5630	0.5910	0.6219
41	0.4667	0.5146	0.5381	0.5706	0.5978	0.6279
42	0.4751	0.5226	0.5452	0.5774	0.6041	0.6338
43	0.4839	0.5299	0.5517	0.5836	0.6102	0.6397
44	0.4910	0.5366	0.5585	0.5899	0.6159	0.6450

45	0.4997	0.5436	0.5651	0.5960	0.6217	0.6504
46	0.5057	0.5498	0.5713	0.6020	0.6274	0.6553
47	0.5131	0.5562	0.5775	0.6075	0.6327	0.6605
48	0.5191	0.5622	0.5833	0.6131	0.6380	0.6653
49	0.5247	0.5684	0.5891	0.6183	0.6430	0.6698
50	0.5316	0.5745	0.5947	0.6239	0.6477	0.6743

Распределения статистик (14) – (15) также зависят от наблюдаемого закона. Рис. 6 иллюстрирует поведение распределений данных статистик при наблюдаемых законах вида (6) со значениями параметра формы $\theta_2 = 1, 2, 3, 5, 10$ при объемах выборок $n = 20$.

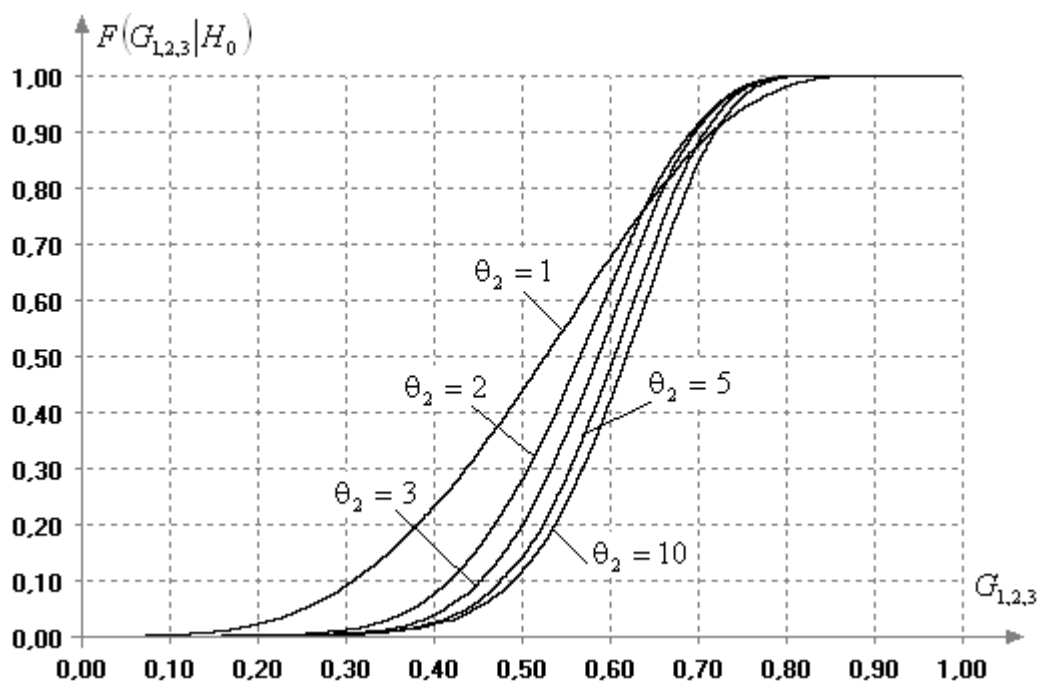


Рис. 6. Изменение распределений статистик (14) и (15) в случае различных законов семейства распределений (6) при $n = 20$

Одновременная проверка на выброс наименьшего и наибольшего значения. Статистика для проверки на аномальность одновременно минимального и максимального выборочных значений формируется в соответствии с соотношением:

$$G_{1,n} = \frac{S_{1,n}^2}{S_0^2}, \quad (20)$$

где

$$S_{1,n}^2 = \sum_{j=2}^{n-1} (X_j - \bar{X}_{1,n})^2, \quad (21)$$

$$\bar{X}_{1,n} = \frac{1}{n-2} \sum_{j=2}^{n-1} X_j. \quad (22)$$

Оба значения считаются выбросами при заданном уровне значимости α , если вычисленное по выборке значение статистики (20) окажется ниже критического: $G_{1,n} < G_{1,n,\alpha}$.

Вид условных распределений $F(G_{1,n}|H_0)$ статистики (20) $G_{1,n}$ в зависимости от объема n в случае извлечения анализируемой выборки из нормальной генеральной совокупности представлен на рис. 7. Вычисленные с использованием методики статистического моделирования нижние процентные точки распределений статистики (14) при $5 \leq n \leq 150$ приведены в таблице 2.

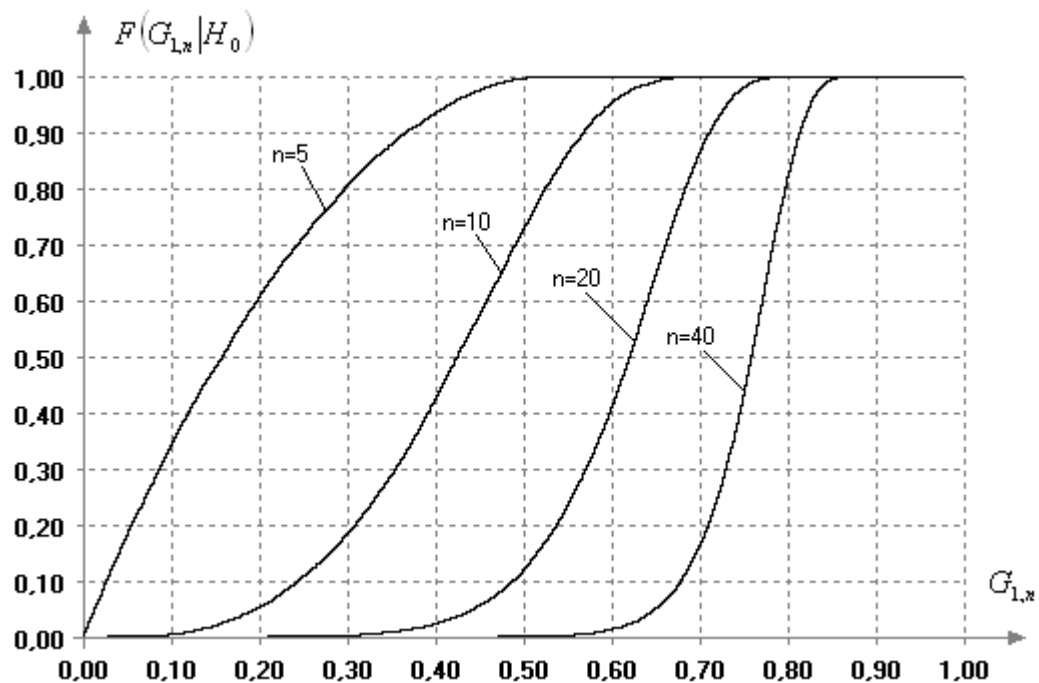


Рис. 7. Зависимость распределения статистики (20) от объема выборки (в случае нормального закона)

Таблица 2. Нижние процентные точки статистик (20) критерия типа Граббса

n	0.1%	0.5%	1%	2.5%	5%	10%
5	0.0003	0.0012	0.0025	0.0063	0.0129	0.0265
6	0.0030	0.0089	0.0140	0.0262	0.0427	0.0698
7	0.0110	0.0243	0.0349	0.0562	0.0809	0.1178
8	0.0242	0.0468	0.0620	0.0908	0.1218	0.1644
9	0.0408	0.0712	0.0908	0.1252	0.1608	0.2073
10	0.0610	0.0991	0.1215	0.1606	0.1981	0.2464
11	0.0845	0.1279	0.1529	0.1939	0.2334	0.2821
12	0.1072	0.1544	0.1813	0.2247	0.2648	0.3135
13	0.1307	0.1813	0.2091	0.2538	0.2948	0.3428
14	0.1527	0.2065	0.2356	0.2808	0.3219	0.3696
15	0.1747	0.2313	0.2605	0.3059	0.3463	0.3936
16	0.1964	0.2537	0.2837	0.3291	0.3697	0.4160
17	0.2162	0.2756	0.3052	0.3512	0.3907	0.4367
18	0.2357	0.2969	0.3268	0.3718	0.4110	0.4556
19	0.2571	0.3164	0.3465	0.3912	0.4298	0.4730
20	0.2762	0.3358	0.3650	0.4094	0.4474	0.4895
21	0.2950	0.3543	0.3829	0.4264	0.4636	0.5051
22	0.3114	0.3702	0.3994	0.4424	0.4787	0.5191
23	0.3268	0.3864	0.4154	0.4573	0.4932	0.5326
24	0.3448	0.4013	0.4297	0.4714	0.5064	0.5451
25	0.3590	0.4153	0.4440	0.4848	0.5187	0.5567
26	0.3732	0.4294	0.4576	0.4973	0.5310	0.5679
27	0.3865	0.4423	0.4699	0.5097	0.5422	0.5784
28	0.3994	0.4547	0.4818	0.5208	0.5529	0.5884
29	0.4133	0.4673	0.4930	0.5317	0.5631	0.5978
30	0.4257	0.4791	0.5050	0.5422	0.5731	0.6067
31	0.4376	0.4885	0.5145	0.5511	0.5819	0.6152
32	0.4477	0.4995	0.5249	0.5608	0.5908	0.6235
33	0.4558	0.5099	0.5346	0.5702	0.5993	0.6314
34	0.4688	0.5189	0.5431	0.5783	0.6072	0.6384
35	0.4779	0.5285	0.5524	0.5864	0.6149	0.6456
36	0.4874	0.5374	0.5612	0.5946	0.6225	0.6525
37	0.4970	0.5459	0.5688	0.6022	0.6296	0.6591
38	0.5048	0.5540	0.5767	0.6091	0.6359	0.6652
39	0.5145	0.5617	0.5839	0.6166	0.6425	0.6711
40	0.5211	0.5692	0.5917	0.6229	0.6489	0.6768
41	0.5307	0.5767	0.5985	0.6295	0.6548	0.6823
42	0.5385	0.5835	0.6052	0.6360	0.6606	0.6877
43	0.5450	0.5902	0.6117	0.6417	0.6662	0.6928
44	0.5522	0.5970	0.6181	0.6476	0.6715	0.6977

45	0.5599	0.6033	0.6237	0.6529	0.6767	0.7025
46	0.5675	0.6090	0.6295	0.6582	0.6817	0.7071
47	0.5742	0.6154	0.6356	0.6637	0.6865	0.7115
48	0.5789	0.6211	0.6412	0.6687	0.6913	0.7159
49	0.5861	0.6270	0.6461	0.6733	0.6957	0.7200
50	0.5910	0.6324	0.6512	0.6783	0.7002	0.7240

Распределения статистики (20) существенно зависят от наблюдаемого закона. Рис. 8 показывает, как меняются распределения данной статистики при наблюдаемых законах вида (6) со значениями параметра формы $\theta_2 = 1, 2, 3, 5, 10$ при объемах выборок $n = 20$.

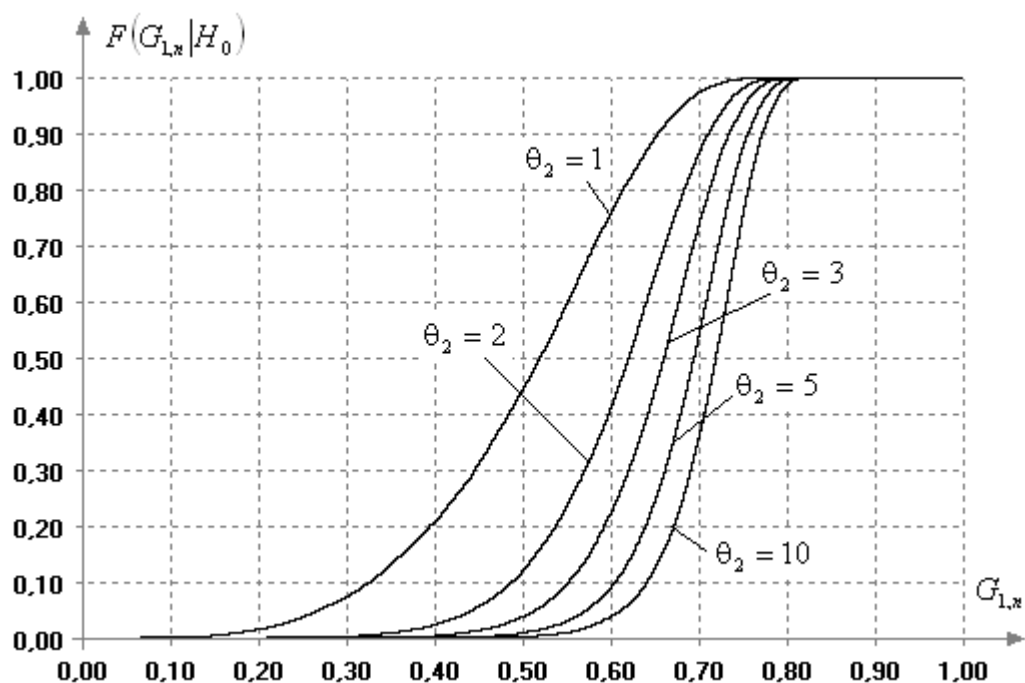


Рис. 8. Изменение распределений статистики (20) в случае различных законов семейства распределений (6) при $n = 20$

Каждый из рассмотренных критериев позволяет (способен) отбраковывать содержащиеся в выборке аномальные данные, если количество выбросов в выборке не превышает их числа, на которое рассчитан соответствующий критерий. В тех случаях, когда используемый критерий соответствует “реальному числу” выбросов, последние, как правило,

удается выделить с применением этого критерия. При содержании в выборке большего числа грубых ошибок измерений, чем предусматривает статистика, критерий уже не способен их выделять. Например, если проверка на выброс одного наибольшего значения не дала положительного результата, это еще не означает, что данное значение не является выбросом. Возможно, что в выборке содержится больше значений, которые могут интерпретироваться как аномальные. Присутствие таких данных отражается на оценках дисперсии (3), (8), и оценках характеристик рассеяния (9), (12), (16), (18), (21), так как все они не являются робастными. Следовательно, при использовании критериев типа Граббса необходимо последовательно тестировать выборку на наличие различного числа грубых ошибок измерений.

Выбросы в результатах измерений могут быть вызваны появлением “сдвинутых” значений, связанных с систематической ошибкой, могут быть связаны с увеличением рассеяния результатов измерений в силу различных причин. В последнем случае к выбросам могут относиться как наименьшие, так и наибольшие значения. Способность рассмотренных критериев выделять аномальные результаты измерений будет зависеть от вида засорения.

В качестве примера покажем мощность критериев на модели с симметричным засорением, когда выборка из нормальной генеральной совокупности с параметром сдвига μ и параметром масштаба σ засорена 10% наблюдений нормального закона с параметрами μ и 5σ :

$$F(x) = 0.9F_{Gauss}(\mu, \sigma; x) + 0.1F_{Gauss}(\mu, 5\sigma; x).$$

Мощность критерия при заданной вероятности α ошибки первого рода определяется величиной $1-\beta$, где β – вероятность ошибки второго рода. В данном случае ошибка второго рода заключается в том, что аномальное значение не идентифицируется как таковое. В таблице 3 приведены мощности критериев проверки на аномальность одного минималь-

ного (или максимального) значения в выборке, одновременно двух минимальных (двух максимальных) значений, одновременно одного минимального и одного максимального значений в выборке объемом $n = 20$. Более высокая в данном случае мощность критерия со статистикой (20) объясняется симметричностью засорения.

Таблица 3. Значения мощности $1 - \beta$ критериев типа Граббса по отношению к смеси с 10% симметричным засорением при $n = 20$

Уровень значимости α	Мощность критерия		
	со статистикой (1) и (5)	со статистикой (7) и (11)	со статистикой (20)
0.10	0.3763	0.3586	0.6094
0.05	0.3285	0.3115	0.5448
0.01	0.2431	0.2351	0.4164

Параметрическая отбраковка наблюдений. Таблицы процентных точек критериев Граббса, полученные в [2-4], сокращенная таблица, приведенная в [5], расширения критерия, рассмотренные в данной работе, и построенные здесь таблицы соответствующих процентных точек позволяют корректно отбраковывать грубые ошибки измерений (выбросы) в случае выполнения предположения о нормальности наблюдаемого закона. Если предположения о нормальности нарушаются, использовать указанные таблицы процентных точек нельзя. Как показано выше, распределения статистик критериев типа Граббса существенно зависят от истинного закона распределения наблюдаемой случайной величины.

Вообще говоря, в случае необходимости нет принципиальных трудностей для построения модели распределения любой рассмотренной статистики критерия типа Граббса (или для определения процентных точек) при любом законе наблюдаемых случайных величин. Проблема

лишь в том, что законов, для которых желательно иметь эффективную процедуру отбраковки аномальных измерений, слишком много.

Логичней при анализе данных на аномальность опираться на “истинный” закон распределения наблюдаемой величины. В этом случае задача отбраковки, формулируется следующим образом. Проверяемая гипотеза H_0 заключается в том, что все X_1, X_2, \dots, X_n принадлежат одной генеральной совокупности с законом распределения $F(x, \theta)$. При проверке на выброс наибольшего выборочного значения $X_{(n)}$ конкурирующая гипотеза H_1 заключается в том, что $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-1)}$ принадлежат $F(x, \theta)$, а $X_{(n)}$ – некоторому распределению $G(x)$, которое “существенно сдвинуто вправо” относительно $F(x, \theta)$, например, $G(x) = F(x - A, \theta)$, где A достаточно велико. Если $X_{(n)} \leq d_{n, \alpha}$, то принимается гипотеза H_0 , в противном случае - гипотеза H_1 . При справедливости нулевой гипотезы $P\{\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq d_{n, \alpha}\} = [F(d_{n, \alpha})]^n = 1 - \alpha$, и критическое значение определяется из уравнения $F(d_{n, \alpha}) = \sqrt[n]{1 - \alpha}$.

При проверке на выброс наименьшего значения $X_{(1)}$ гипотеза H_0 принимается, если $X_{(1)} \geq d_{1, \alpha}$. В этом случае $P\{\min_{1 \leq i \leq n} X_i \geq d_{1, \alpha}\} = [1 - F(d_{1, \alpha})]^n = 1 - \alpha$, и критическое значение определяется из уравнения $F(d_{1, \alpha}) = 1 - \sqrt[n]{1 - \alpha}$.

Чтобы с помощью данной процедуры корректно выделять содержащиеся в выборке грубые ошибки, необходимо знание “истинного” закона $F(x, \theta)$. Однако на практике вектор параметров θ закона $F(x, \theta)$ чаще всего приходится оценивать по этой же самой выборке. В связи с чем такую процедуру отбраковки иногда называют параметрической. Содержащиеся в выборке выбросы отражаются на оценках параметров закона $\hat{\theta}$. Полученный закон $F(x, \hat{\theta})$ оказывается существенно отличающимся от “истинного”. Вследствие этого параметрические методы от-

браковки резко выделяющихся наблюдений становятся неустойчивыми [10].

Следует отметить, что подобным же недостатком обладают и критерии типа Граббса: нет никакой гарантии, что в выборке не большее число аномальных измерений, чем мы исследуем на выбросы. Тогда это может отрицательно сказаться на результатах анализа.

В параметрических методах отбраковки с данным недостатком борются, применяя робастные методы оценивания, например, оценки максимального правдоподобия по группированным данным [11], оптимальные L-оценки по выборочным квантилям [12, 13], MD-оценки. Использование робастных методов оценивания в процедуре параметрической отбраковки делает ее очень эффективной [11].

Робастные методы оценивания математического ожидания и среднего квадратичного отклонения можно использовать и при вычислении статистик критериев типа Граббса. Однако в этом случае обязательно следует учитывать, что метод оценивания отразится на распределениях статистик.

Таблицы построенных процентных точек, расширенные для объемов выборок до $n = 150$, доступны по адресу <http://www.ami.nstu.ru/~headrd/seminar/start.htm>.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ (проект № ТО2-3.3-3356)

Литература

1. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
2. Frank E. Grubbs. Sample Criteria for Testing Outlying observations // Ann. Math. Statist, 1950. – Vol. 21. – No. 1. – P.27-58.
3. Frank E. Grubbs. Procedures for Detecting Outlying Observations in Samples // Technometrics, 1969. – Vol. 11. – No. 1. – P.1-21

4. Frank E. Grubbs, Glenn Beck. Extension of sample sizes and percentage points for significance tests of outlying observations // *Technometrics*, 1972. – Vol. 14. – No. 4. – P.847-854.
5. ГОСТ Р ИСО 5725-2–2002. Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений. Часть 2. М.: Изд-во стандартов. – 51 с.
6. Смирнов Н.В. Оценка максимального члена в ряду наблюдений // Доклады АН СССР, 1941. – Т. 33. – № 5. – С. 346-349.
7. ГОСТ 11.002-73. Прикладная статистика. Правила оценки аномальности результатов наблюдений. М.: Изд-во стандартов. 1982. – 26 с.
8. СТ СЭВ 545-77. Прикладная статистика. Правила оценки аномальности результатов наблюдений. М.: Изд-во стандартов. 1978. – 26 с.
9. Микешина Н.Г. Выявление и исключение аномальных значений // Заводская лаборатория. 1966. – Т. 22. – № 3. – С. 310-318.
10. Орлов А.И. Неустойчивость параметрических методов отбраковки резко выделяющихся наблюдений // Заводская лаборатория. 1992. – Т. 58. – № 7. – С. 40-42.
11. Лемешко Б.Ю. Робастные методы оценивания и отбраковка аномальных измерений // Заводская лаборатория. – 1997. – Т.63. – № 5. – С. 43-49.
12. Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В. Построение оптимальных L -оценок параметров сдвига и масштаба распределений по выборочным квантилям // Сибирский журнал индустриальной математики. 2001. – Т.4. – № 2. – С. 166-183.
13. Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В. Оптимальные L -оценки параметров сдвига и масштаба распределений по выборочным квантилям // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2004. – Т.70. – № 1. – С. 54-66.