

О ранжировании критериев нормальности

Б. Ю. Лемешко, В. А. Юрков

Проверка принадлежности выборки нормальному закону одна из наиболее часто решаемых задач прикладной математической статистики в приложениях. С этой целью можно использовать любой критерий согласия, а также десятки специальных критериев, ориентированных только на проверку нормальности. Такой широкий спектр затрудняет выбор наиболее предпочтительного критерия. Выбор осложняется и тем, что описание каждого критерия сопровождается какими-то положительными характеристиками, указывающими на определённые преимущества. В данном случае методами статистического моделирования исследованы свойства около 50 критериев, применяемых для проверки нормальности. В частности, исследована сходимость распределений статистик к асимптотическим распределениям, уточнены таблицы критических значений, получены оценки мощности критериев относительно некоторых конкурирующих гипотез. Опираясь на результаты проведенных исследований и полученные оценки мощности относительно близких конкурирующих гипотез, делается попытка упорядочения критериев по предпочтительности применения и предлагаются соответствующие результаты.

Ключевые слова: проверка гипотез, критерии нормальности, статистическое моделирование, ошибка 1-го рода, ошибка 2-го рода, мощность критерия, рейтинг

1. Введение

Проверка принадлежности ошибок измерений нормальному закону распределения во многих приложениях теоретического и прикладного характера имеет порой решающее значение. Именно поэтому часто возникает потребность убедиться в том, что нет оснований для отклонения гипотезы о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону распределения. В этих целях могут использоваться различные критерии согласия, а также целый ряд специальных критериев, ориентированных только на проверку нормальности.

Имея в наличии целый арсенал критериев, специалисту в конкретной области желательно знать, применение каких критериев является предпочтительным. Желательно, чтобы при заданной вероятности α ошибки 1-го рода критерий обеспечивал минимальную вероятность β ошибки 2-го рода. Другими словами, желательно, чтобы критерий обладал максимальной мощностью $1 - \beta$ относительно рассматриваемых (близких) конкурирующих законов.

Такие вопросы рассматривались при подготовке руководства [1], в котором анализируется наиболее представительное множество критериев нормальности, из упоминаемых в отечественной литературе. В настоящее время готовится переработанное издание руководства [1], дополненное ещё рядом критериев. В связи с этим методами статистического моделирования исследованы свойства и мощность рассматриваемых критериев и проведен сравнительный анализ критериев. В настоящей работе приводятся некоторые результаты этого анализа и на основании полученных оценок мощности, показанной критериями относительно тех же, что и в [1] конкурирующих гипотез, делается попытка проранжировать всё множество критериев.

Как и в [1], в данном случае проверяемой гипотезе H_0 соответствует принадлежность наблюдаемой выборки нормальному закону распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2} \right\}.$$

В качестве конкурирующих гипотез при исследовании мощности критериев рассмотрена принадлежность анализируемой выборки следующим законам: конкурирующая гипотеза H_1 соответствует обобщённому нормальному закону (семейству распределений) с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp \left\{ -\left(\frac{|x - \theta_0|}{\theta_1} \right)^{\theta_2} \right\}$$

и параметром формы $\theta_2 = 4$; гипотеза H_2 – распределению Лапласа с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\theta_1} \exp \left\{ -|x - \theta_0|/\theta_1 \right\},$$

гипотеза H_3 – логистическому распределению с плотностью

$$f(x) = \frac{\pi}{\theta_1 \sqrt{3}} \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} / \left[1 + \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} \right]^2,$$

очень близкому к нормальному.

Исследовалось следующее множество критериев, используемых для проверки нормальности: Колмогорова [2], Купера [3], Крамера–Мизеса–Смирнова [1], Ватсона [4, 5], Андерсона–Дарлинга [1], Жанга со статистиками Z_A , Z_C , Z_K [6, 7], Хи-квадрат Пирсона [1], Никулина–Рао–Робсона [8], Шапиро–Уилка [9], Шапиро–Франция [10], Чена–Шапиро [11], Ройстона [12], Эппса–Пулли [13], Д'Агостино Z_2 [14], Д'Агостино E_p [15], Фросини [16, 17], Гири [18], Дэвида–Хартли–Пирсона [19], Хегази–Грина со статистиками T_1 и T_2 [20], Шпигельхальтера [21], Харке–Бера [22, 23], Вайсберга–Бингема [24], Васичека [25], Корреа [26], Ван Эса [27], Эбрахими [28], Заманзаде–Аргами со статистиками TZ_1 и TZ_2 [29], Гаствирта [30], Гелы–Гаствирта [31], Бонетта–Сейер [32], Десгань–Мишо со статистиками X_{APD} , X_{EPD} и R_n [33, 34], Али–Чорго–Ревеса [35, 36], Мартинеса–Иглевича [37], Филлибена [38], Бонтемпса–Меддахи со статистиками BM_{3_4} и BM_{3_6} [39], Жанга [40], Лина–Мудхолкара [41], Локка–Сперриера со статистиками T_{1n} и T_{2n} [42, 43], Оя со статистиками T_1 и T_2 [44, 45].

2. Результаты исследований и ранжирование критериев

В процессе исследований выявлены положительные и отрицательные моменты, связанные с применением конкретных критериев. Уточнена сходимость распределений статистик некоторых критериев к асимптотическим распределениям статистик при справедливости H_0 . Уточнены или построены таблицы критических значений для различных объёмов выборок n . Показано, что ряд критериев при малых объёмах выборок n и малых α не способны различать гипотезы H_0 и H_1 (критерии оказываются смещёнными). Этот факт в таблице 1 отмечен окрашиванием соответствующих ячеек серым цветом. В работе получены оценки мощности всех критериев относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 при различных $n = 10 \div 300$ и различных α . Это позволяет отдавать предпочтение тому или иному критерию в зависимости от рассматриваемых альтернатив.

В таблице 1 оценки мощности критериев относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 представлены только для случая $n = 50$ и $\alpha = 0.1$, чтобы на основании этой информации установить предпочтительность того или иного критерия. В колонках таблицы критерии

упорядочены по убыванию мощности относительно соответствующей конкурирующей гипотезы.

Таблица 1. Оценки мощности критериев относительно гипотез $H_1 - H_3$ ($n = 50$, $\alpha = 0.1$)

№	Относительно H_1	1- β	Относительно H_2	1- β	Относительно H_3	1- β
1	Десгань–Мишо X_{EPD}	0.451	Шпигельхальтера	0.790	Гелы–Гаствирта	0.378
2	Корреа	0.441	Гелы–Гаствирта	0.753	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.366
3	Васичека	0.434	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.752	Хегази–Грина T_2	0.359
4	Эбрахими	0.434	Гаствирта	0.731	Харке–Бера	0.349
5	Д'Агостино Z_2	0.428	Хегази–Грина T_2	0.723	Бонтемпса– Меддахи BM_{3_4}	0.349
6	Оя T_2	0.427	Гири	0.722	Д'Агостино E_p	0.347
7	Дэвида–Хартли– Пирсона	0.400	Бонетта–Сейер	0.722	Шпигельхальтера	0.343
8	Гири	0.394	Десгань–Мишо X_{APD}	0.705	Бонтемпса– Меддахи BM_{3_6}	0.342
9	Бонетта–Сейер	0.394	Десгань–Мишо X_{EPD}	0.705	Филлибена	0.340
10	Шапиро–Уилка	0.389	Филлибена	0.699	Шапиро–Франция	0.333
11	Гаствирта	0.384	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.695	Вайсберга–Бингема	0.333
12	Чена–Шапиро	0.327	Шапиро–Франция	0.691	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.330
13	Хи-квадрат Пирсона	0.311	Вайсберга–Бингема	0.691	Десгань–Мишо X_{APD}	0.318
14	Десгань–Мишо X_{APD}	0.304	Бонтемпса– Меддахи BM_{3_6}	0.689	Мартинеса– Иглевича	0.301
15	Жанга Z_C	0.300	Мартинеса– Иглевича	0.683	Десгань–Мишо X_{EPD}	0.299
16	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.293	Оя T_2	0.680	Ван Эса	0.298
17	Ватсона	0.293	Хегази–Грина T_1	0.674	Десгань–Мишо R_n	0.287
18	Андерсона– Дарлинга	0.287	Д'Агостино E_p	0.671	Ройстона	0.273
19	Фросини	0.285	Десгань–Мишо R_n	0.670	Гаствирта	0.273
20	Али–Чорго–Ревеса	0.281	Ван Эса	0.667	Гири	0.272
21	Ройстона	0.280	Харке–Бера	0.654	Бонетта–Сейер	0.272
22	Купера	0.279	Бонтемпса– Меддахи BM_{3_4}	0.653	Жанга Z_A	0.272
23	Эпса–Пулли	0.275	Али–Чорго–Ревеса	0.643	Жанга Z_C	0.270
24	Десгань–Мишо R_n	0.275	Андерсона– Дарлинга	0.630	Хегази–Грина T_1	0.267
25	Крамера–Мизеса– Смирнова	0.269	Ватсона	0.626	Дэвида–Хартли– Пирсона	0.255

26	Мартинеса–Иглевица	0.252	Эппса–Пулли	0.623	Чена–Шапиро	0.251
27	Никулина–Рао–Робсона	0.240	Фросини	0.623	Эппса–Пулли	0.249
28	Жанга Z_A	0.239	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.621	Жанга Z_K	0.249
29	Хегази–Грина T_1	0.218	Ройстона	0.616	Д'Агостино Z_2	0.241
30	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	0.216	Купера	0.589	Али–Чорго–Ревеса	0.240
31	Шпигельхальтера	0.211	Жанга Z_A	0.578	Андерсона–Дарлингга	0.230
32	Колмогорова	0.208	Чена–Шапиро	0.576	Локка–Сперриера T_{2n}	0.222
33	Жанга Z_K	0.186	Жанга Z_K	0.569	Оя T_2	0.217
34	Жанга	0.179	Жанга Z_C	0.548	Лина–Мудхолкара	0.216
35	Д'Агостино E_p	0.164	Колмогорова	0.540	Фросини	0.212
36	Ван Эса	0.150	Локка–Сперриера T_{2n}	0.504	Жанга	0.212
37	Шапиро–Франция	0.139	Шапиро–Уилка	0.502	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.209
38	Вайсберга–Бингема	0.139	Дэвида–Хартли–Пирсона	0.499	Ватсона	0.204
39	Филлибена	0.119	Д'Агостино Z_2	0.489	Шапиро–Уилка	0.203
40	Оя T_1	0.105	Никулина–Рао–Робсона	0.473	Купера	0.192
41	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.086	Хи-квадрат Пирсона	0.423	Никулина–Рао–Робсона	0.188
42	Локка–Сперриера T_{1n}	0.074	Васичека	0.397	Колмогорова	0.181
43	Харке–Бера	0.071	Эбрахими	0.396	Локка–Сперриера T_{1n}	0.168
44	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	0.066	Корреа	0.382	Хи-квадрат Пирсона	0.155
45	Хегази–Грина T_2	0.061	Жанга	0.355	Васичека	0.137
46	Лина–Мудхолкара	0.056	Лина–Мудхолкара	0.332	Эбрахими	0.136
47	Гелы–Гаствирта	0.004	Локка–Сперриера T_{1n}	0.255	Корреа	0.132
48	Локка–Сперриера T_{2n}	0.000	Оя T_1	0.170	Оя T_1	0.130

В таблице 2 приведены рейтинги критериев по величине мощности, показанной относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 , приведены также суммы этих рейтингов. В таблице критерии упорядочены по сумме рейтингов. Итоговым рейтингом критерия можно считать его порядковое место в упорядоченном (по сумме рейтингов, показанных критерием относительно гипотез H_1 , H_2 и H_3) ряду критериев. Этот рейтинг характеризует эффективность применения соответствующего критерия в условиях альтернатив, близких к H_1 , H_2 и H_3 .

Таблица 2. Рейтинг критериев нормальности $H_1 - H_3$ ($n = 50$, $\alpha = 0.1$)

№	Критерий	Рейтинги относительно H_1, H_2, H_3	Σ	Рейтинг по Σ
1	Десгань–Мишо X_{EPD}	1–9–15	25	1
2	Гири	8–6–20	34	2–3
3	Гаствирта	11–4–19	34	2–3
4	Десгань–Мишо X_{APD}	14–8–13	35	4
5	Бонетта–Сейер	9–7–21	37	5
6	Заманзаде–Аргами TZ_1	16–11–12	39	6–7
7	Шпигельхальтера	31–1–7	39	6–7
8	Заманзаде–Аргами TZ_2	41–3–2	46	8
9	Гелы–Гаствирта	47–2–1	50	9
10	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	30–14–8	52	10
11	Хегази–Грина T_2	45–5–3	53	11
12	Мартинеса–Иглевича	26–15–14	55	12–13
13	Оя T_2	6–16–33	55	12–13
14	Филлибена	39–10–9	58	14
15	Д'Агостино E_p	35–18–6	59	15–16
16	Шапиро–Франция	37–12–10	59	15–16
17	Десгань–Мишо Rn	24–19–17	60	17
18	Вайсберга–Бингема	38–13–11	62	18
19	Ройстона	21–29–18	68	19–20
20	Харке–Бера	43–21–4	68	19–20
21	Дэвида–Хартли–Пирсона	7–38–25	70	21–23
22	Чена–Шапиро	12–32–26	70	21–23
23	Хегази–Грина T_1	29–17–24	70	21–23
24	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	44–22–5	71	24
25	Жанга Z_C	15–34–23	72	25–26
26	Ван Эса	36–20–16	72	25–26
27	Д'Агостино Z_2	5–39–29	73	27–29
28	Андерсона–Дарлинга	18–24–31	73	27–29
29	Али–Чорго–Ревеса	20–23–30	73	27–29
30	Эпса–Пулли	23–26–27	76	30
31	Ватсона	17–25–38	80	31
32	Фросини	19–27–35	81	32–33
33	Жанга Z_A	28–31–22	81	32–33
34	Шапиро–Уилка	10–37–39	86	34
35	Васичека	3–42–45	90	35–36
36	Крамера–Мизеса–Смирнова	25–28–37	90	35–36
37	Купера	22–30–40	92	37
38	Корреа	2–44–47	93	38–39
39	Эбрахими	4–43–46	93	38–39
40	Жанга Z_K	33–33–28	94	40
41	Хи-квадрат Пирсона	13–41–44	98	41
42	Никулина–Рао–Робсона	27–40–41	108	42
43	Колмогорова	32–35–42	109	43
44	Жанга	34–45–36	115	44

45	Локка–Сперриера T_{2n}	48–36–32	116	45
46	Лина–Мудхолкара	46–46–34	126	46
47	Локка–Сперриера T_{1n}	42–47–43	132	47
48	Оя T_1	40–48–48	136	48

На полученные рейтинги можно ориентироваться в приложениях, отдавая предпочтение применению того или иного критерия для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону.

3. Заключение

Из представленных результатов исследований можно сделать следующие выводы.

Во-первых, очевидно, что ряд специальных критериев нормальности имеет явное преимущество в мощности по сравнению с используемыми в этих же целях непараметрическими и параметрическими критериями согласия.

Во-вторых, среди специальных критериев есть фавориты, применение которых в приложениях наиболее целесообразно. По-видимому, к таким критериям можно отнести те, рейтинг которых в таблице 2 не опускается ниже 20.

В-третьих. К сожалению, достаточно обширна группа критериев, неспособных при малых n и малых α отличать от H_0 гипотезы типа H_1 .

И заключительное замечание. Описанные результаты, касающиеся свойств критериев проверки гипотез, имеют место в условиях отсутствия влияния ошибок округления на распределения статистик критериев. В последнее время нами отмечалась роль ошибок округления в изменении свойств статистических критериев [46, 47, 48, 49]. Ошибки округления измерений могут как существенно менять распределения статистик критериев нормальности, так и отражаться на других свойствах критериев.

Литература

1. Лемешко Б.Ю. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению: Монография / Б.Ю. Лемешко. – М.: ИНФРА-М. – 2015. – 160 с.
2. Kolmogoroff A. N. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione / A. N. Kolmogoroff // G. Ist. Ital. attuar. – 1933. – Vol. 4. – No. 1. – P. 83–91.
3. Kuiper N.H. Tests concerning random points on a circle / N. H. Kuiper // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Van Wetenschappen. – 1960. Series A – V. 63. – P.38-47.
4. Watson G. S. Goodness-of-fit tests on a circle. I. / G. S. Watson // Biometrika. – 1961. – Vol. 48. – No. 1-2. – P.109-114.
5. Watson G. S. Goodness-of-fit tests on a circle. II. / G. S. Watson // Biometrika. – 1962. – Vol. 49. – No. 1-2. – P.57- 63.
6. Zhang J. Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio / J. Zhang // Journal of the Royal Statistical Society: Series B. – 2002. – V. 64. – No. 2. – P.281-294.
7. Zhang J. Likelihood-ratio tests for normality / J. Zhang, Yu. Wub // Computational Statistics & Data Analysis. – 2005. – V. 49. – No. 3. – P.709-721.
8. Greenwood P. E. A guide to chi-squared testing / P. E. Greenwood, M. S. Nikulin. – New York : John Wiley & Sons. – 1996. – 280 p.
9. Shapiro S. S. An analysis of variance test for normality (complete samples) / S. S. Shapiro, M. B. Wilk // Biometrika. – 1965. – Vol. 52. – P. 591–611.
10. Shapiro S. S. An approximate analysis of variance test for normality / S. S. Shapiro, R. S. Francia // Journal of the American statistical Association. – 1972. – Vol. 67. – No. 337. – P. 215-216.

11. *Chen L., Shapiro S. S.* An alternative test for normality based on normalized spacings // Journal of Statistical and Simulation. – 2012. – V.53. – P. 269-288.
12. *Royston J. P.* Approximating the Shapiro-Wilk W-test for non-normality / J. P. Royston // Statistics and Computing. – 1992. – Vol. 2. – No. 3. – P. 117-119.
13. *Epps T. W.* A test for normality based on the empirical characteristic function / T. W. Epps, L. B. Pulley // Biometrika. – 1983. – Vol. 70. – P. 723–726.
14. *D'Agostino R. B.* Simulation probability points of b_2 for small samples / R. B. D'Agostino, G. L. Tietjen // Biometrika. – 1971. – Vol. 58. – P. 669–672.
15. *D'Agostino R. B.* Transformation to normality of the null distribution of g_1 / R. B. D'Agostino // Biometrika. – 1970. – Vol. 57. – P. 679–681.
16. *Frosini B. V.* A survey of a class of goodness-of-fit statistics / B. V. Frosini // Metron. – 1978. – Vol. 36. – No. 1-2. – P. 3–49.
17. *Frosini B. V.* On the distribution and power of goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric applications, “Goodness-of-fit” / Frank E. Grubbs ; ed. by Revesz P., Sarkadi K., Sen P.K. – Amsterdam-Oxford-New York : North Holland Publ. Comp. – 1987. – P. 133–154.
18. *Geary R. C.* Testing for Normality / R. C. Geary // Biometrika. – 1937. – Vol. 34. – P. 209–242.
19. *David H. A.* The distribution of the ratio? In a single normal sample, of range to standard deviation / H. A. David, H. O. Hartley, E. S. Pearson // Biometrika. – 1964. – Vol. 51, –No. 3-4. – P. 484–487.
20. *Hegazy Y. A. S.* Some new goodness-of-fit tests using order statistics / Y. A. S. Hegazy, J. R. Green // Applied Statistics. – 1975. – Vol. 24. – No. 3. – P. 299–308.
21. *Spiegelhalter D. J.* A test for normality against symmetric alternatives / D. J. Spiegelhalter // Biometrika. – 1977. – Vol. 64. – No. 2. – P. 415–418.
22. *Jarque C. M.* Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals / C. M. Jarque, A. K. Bera // Economics Letters. – 1980. – Vol. 6. No. 3. – P. 255–259.
23. *Jarque C. M.* Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals: Monte Carlo evidence / C. M. Jarque, A. K. Bera // Economics Letters. – 1981. – Vol. 7. – No. 4. – P. 313–318.
24. *Weisberg S., Bingham C.* An approximate analysis of variance test for non-normality suitable for machine calculation // Technometrics. – 1975. – Vol. 17. – No. 1. – P. 133-134.
25. *Vasicek Oldrich.* A Test for Normality Based on Sample Entropy // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). – 1976. – Vol. 38. – No. 1. – P. 54-59.
26. *Correa J. C.* A new estimator of entropy // Communication in Statistics. Theory and Methods. – 1995. – Vol. 24. – No. 10. – P. 2439–2449.
27. *Van Es B.* Estimating functionals related to a density by class of statistics based on spacings // Scandinavian Journal of Statistics. – 1992. – Vol. 19. – P. 61–72.
28. *Ebrahimi N., Pflughoeft K., Soofi E. S.* Two measures of sample entropy // Statistics & Probability Letters. – 1994. – Vol. 20. – No. 3. – P. 225–234.
29. *Zamanzade E., Arghami N. R.* Testing normality based on new entropy estimators // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 2012. – Vol. 82. – No. 11. – P. 1701-1713.
30. *Gel Y. R., Miao W., Gastwirth J. L.* Robust directed tests of normality against heavy-tailed alternatives // Computational Statistics & Data Analysis. – 2007. – Vol. 51. – No. 5. – P. 2734-2746.
31. *Gel Y. R., Gastwirth J. L.* A robust modification of the Jarque–Bera test of normality // Economics Letters. – 2008. – Vol. 99. – No. 1. – P. 30-32.
32. *Bonett D. G., Seier E.* A test of normality with high uniform power // Computational statistics & Data analysis. – 2002. – Vol. 40. – No. 3. – P. 435-445.
33. *Desgagne A., de Micheaux P.L., Leblanc A.* Test of Normality Against Generalized Exponential Power Alternatives // Communications in Statistics - Theory and Methods. – 2013. – Vol. 42. – No. 1. – P. 164-190.

34. Desgagne A., de Micheaux P.L. A Powerful and Interpretable Alternative to the Jarque–Bera Test of Normality Based on 2nd-power Skewness and Kurtosis, Using the Rao's Score Test on the APD Family // *Journal of Applied Statistics*. – 2018. – Vol. 45. – No. 13. – P. 2307-2327.
35. Aly E.E. Quadratic nuisance parameter-free goodness-of-fit tests in the presence of location and scale parameters / E. E. Aly, M. Csorgo // *Canadian Journal of Statistics*. – 1985. – Vol. 13. – P. 53-70.
36. Aly E. E. On some goodness-of-fit tests for the normal, logistic and extreme-value distributions / E. E. Aly, M. A. Shayib // *Communications in Statistics - Theory and Methods*. – 1992. – Vol. 21. – No. 5. – P. 1297-1308.
37. Martinez J., Iglewicz B. A test for departure from normality based on a biweight estimator of scales // *Biometrika*. – 1981. – Vol. 68. – No. 1. – P. 331-333.
38. Filliben J. J. The Probability Plot Correlation Coefficient Test for Normality // *Technometrics*. – 1975. – Vol. 17. – No. 1. – P.111-117.
39. Bontemps C., Meddahi N. Testing Normality: A GMM Approach // *Journal of Econometrics*. – 2005. – Vol. 124. – No. 1. – P. 149–186.
40. Zhang P. Omnibus test of normality using the Q statistic // *Journal of Applied Statistics*. – 1999. – Vol. 26. – No. 4. – P. 519-528.
41. Lin Ch.-Ch., Mudholkar G. S. A simple test for normality against asymmetric alternatives // *Biometrika*. – 1980. – Vol. 67. – No. 2. – P. 455-461.
42. Locke C., Spurrier J. D. The use of U-statistics for testing normality against nonsymmetrical alternative // *Biometrika*. – 1976. – Vol. 63. – No. 1. – P. 143-147.
43. Locke C., Spurrier J. D. The use of U-statistics for testing normality against alternatives with both tails heavy or both tails light // *Biometrika*. – 1977. – Vol. 64. – No. 3. – P. 638-640.
44. Oja H. Two location and scale-free goodness-of-fit tests // *Biometrika*. – 1981. – Vol. 68. – No. 3. – P. 637-640.
45. Oja H. New tests for normality // *Biometrika*. – 1983. – Vol. 70. – No. 1. – P. 297-299.
46. Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Семёнова М. А. К вопросу статистического анализа больших данных // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2018. – № 44. – С. 40-49.
47. Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б. Влияние округления на свойства критериев проверки статистических гипотез // *Автометрия*. – 2020. – Т. 56. – № 3. – С. 35-45.
48. Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б. О влиянии ошибок округления на распределения статистик критериев согласия // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2020. – № 53. – С. 47-60.
49. Lemeshko B. Y., Lemeshko S. B. About the effect of rounding on the properties of tests for testing statistical hypotheses // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2021. – Vol. 1715. 012063.

Лемешко Борис Юрьевич

Профессор кафедры прикладной и теоретической информатики НГТУ, д.т.н., профессор (630073, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20), тел. (383) 346-06-00, e-mail: Lemeshko@ami.nstu.ru, <http://www.ami.nstu.ru/~headrd/>

Юрков Вадим Аркадьевич

Магистрант факультета прикладной математики и информатики НГТУ, (630073, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20), тел. (383) 346-06-00, e-mail: vadim.u98@gmail.com

On the ranking of normality tests

B. Lemeshko, V. Yurkov

Checking whether a sample belongs to a normal law is one of the most frequently solved problems of applied mathematical statistics in applications. For this purpose, any goodness-of-fit test can be used, as well as dozens of special tests focused only on testing normality. Such a wide range makes it difficult to choose the most preferred test. The choice is complicated by the fact that information about each test is accompanied by some positive characteristics that indicate certain advantages. In this case, the methods of statistical simulation investigated the properties of about 50 tests for testing normality. In particular, the convergence of distributions of statistics to asymptotic distributions is investigated, the tables of critical values are refined, and estimates of the power of tests with respect to some competing hypotheses are obtained. Based on the results of the conducted research and the obtained estimates of the power of relatively close competing hypotheses, an attempt is made to order the tests according to the preference for application and the corresponding results are proposed.

Keywords: hypothesis testing, normality tests, statistical simulating, type 1 error, type 2 error, power of test, rating