ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЕВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ В ВИДЕ СИСТЕМ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Щеглов А.Е., Лемешко Б.Ю.
НГТУ, Новосибирск
E-mail: tleha@ngs.ru

При решении различных прикладных задач, особенно при описании экономических процессов, часто прибегают к моделям в виде систем одновременных уравнений (СОУ).

Структурная форма СОУ имеет вид [1]:

$$YG^T = XH^T + \Delta, \tag{1}$$

где $G = (\gamma_{ij})_{m\times m}$ – матрица коэффициентов при m объясняемых переменных, $H = (h_{ij})_{m\times p}$ – матрица коэффициентов при p объясняющих переменных, $Y = (y_i^{(j)})_{n\times m}$ – матрица наблюдений за объясняемыми переменными, $X = (x_i^{(j)})_{n\times p}$ – матрица наблюдений за объясняющими переменными, $\Delta = (\delta_i^{(j)})_{n\times m}$ – матрица случайных составляющих, а n – количество временных тактов. СОУ можно также записать в приведенной форме [1]:

$$Y = X\Pi^T + E, \tag{2}$$

где $\Pi = G^{-1}H$, а $E = \Delta(G^T)^{-1}$.

Прежде чем использовать построенную модель в виде СОУ (например, для прогнозирования), необходимо ответить на вопросы о том, насколько удачно удалось ее специфицировать, идентифицировать и даст ли ее использование результаты, достаточно адекватные действительности. Ответы на эти вопросы может дать проверка статистических гипотез с помощью различных критериев.

Часто используемые критерии основываются на предположении, что шум имеет нормальное распределение, а также их свойства носят асимптотический характер. На практике же исследователь имеет дело с ограниченными объемами наблюдений, а гипотеза о нормальности шума выполняется далеко не всегда.

Цель настоящей работы заключалась в исследовании распределения статистик критериев Андерсона-Рубина и переопределения в выборках конечных размеров и при нарушении предположения нормальности шума.

Исследования в работе проводились с использованием методики компьютерного моделирования. Шум, имел двусторонне экспоненциальное распределение со значениями параметра формы $\lambda = 2$ (нормальное распределение), $\lambda = 1$ (распределение Лапласа), $\lambda = 4, \lambda = 0.5$ и $\lambda = 0.25$.

Пусть m_i – количество объясняемых, а p_i – количество объясняющих переменных, входящих в i-е уравнение СОУ $Y_{(i)} = Y(i)\gamma(i) + X(i)h(i) + \Delta(i)$. Здесь $Y_{(i)}$ и $Y(i)$ – матрицы объясняемых переменных размерности $n\times 1$ и

$n\times m_i-1$, $X(i)$ – матрица объясняющих переменных размерности $n\times p_i$, $\gamma(i)$ и $h(i)$ – векторы параметров размерности m_i-1 и p_i, соответственно, $\Delta(i)$ – вектор случайных составляющих размерности n.

Для проверки гипотезы $H_0:\gamma(i)=\gamma_0$ можно использовать критерий Андерсона-Рубина [2] со статистикой:

$$AR(\gamma_0)=\frac{[SS_0(\gamma_0)-SS_1(\gamma_0)](n-p)}{SS_1(\gamma_0)(p-p_i)}, \tag{3}$$

$$SS_0(\gamma_0)=(Y_{(i)}-Y(i)\gamma_0)^T M(X(i))(Y_{(i)}-Y(i)\gamma_0),$$

$$SS_1(\gamma_0)=(Y_{(i)}-Y(i)\gamma_0)^T M(X)(Y_{(i)}-Y(i)\gamma_0).$$

Статистика (3) при верной гипотезе подчиняется распределению Фишера $F_{p-p_i,n-p}$. В [2] она рассматривается при нормальном распределении шума.

Из результатов моделирования следует, что при нормальном шуме распределение статистики (3) достаточно хорошо согласуется с распределением Фишера $F_{p-p_i,n-p}$, как при малых объемах выборок, так и при больших. Кроме того, при симметричности законов распределения случайных составляющих, даже в случае существенного отклонения от нормального ($\lambda=1$ и $\lambda=4$), распределение статистики (3) практически не отличается от соответствующего F-распределения. Лишь при тяжелых хвостах законов распределения шума ($\lambda=0.5$ и $\lambda=0.25$) наблюдаются существенные отклонения её распределения от F-распределения при малых объемах выборок.

Пусть $Y_t^{(i)}$ и $X_t^{(i)}$ – векторы объясняемых и объясняющих переменных, входящих в i-е уравнение, а $X_{ост\_t}^{(i)}$ – вектор объясняющих переменных, не входящих в него. Тогда i-е уравнение примет вид $\gamma_+^T(i)Y_t^{(i)}=h^T(i)X_t^{(i)}+\Delta_t$ ($\gamma_+(i)$ отличается от $\gamma(i)$ наличием в i-й позиции единицы).

Критерий переопределения позволяет проверить гипотезу о том, что рассматриваемое структурное уравнение не содержит объясняющих переменных $X_{ост\_t}^{(i)}$. Статистика критерия переопределения имеет следующий вид [3]:

$$RD=n\left[\frac{\bar{\gamma}_+^T(i)M_{Y^{(i)}Y^{(i)}}\bar{\gamma}_+(i)-\bar{h}^T(i)M_{X^{(i)}X^{(i)}}\bar{h}(i)}{\bar{\gamma}_+^T(i)M_{EE}\bar{\gamma}_+(i)}-1\right], \tag{4}$$

где E_t – ошибки приведенной формы, $\bar{\gamma}_+(i),\bar{h}(i)$ – оценки параметров, $M_{zz}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}z_t z_t^T$, $W_t=X_t^{(i)}-M_{X_{ост}^{(i)}X^{(i)}}M_{X^{(i)}X^{(i)}}^{-1}X_t^{(i)}$, $M_{EE}=M_{Y^{(i)}Y^{(i)}}-$ $-M_{Y^{(i)}X^{(i)}}M_{X^{(i)}X^{(i)}}^{-1}M_{X^{(i)}Y^{(i)}}-M_{Y^{(i)}W}M_{WW}^{-1}M_{WY^{(i)}}$.

Для нахождения оценок $\bar{\gamma}_+(i)$ и $\bar{h}(i)$ можно использовать любой состоятельный метод (например, двухшаговый метод наименьших квадратов).

Статистика (4) при верной проверяемой гипотезе асимптотически подчиняется χ^2-распределению со степенью свободы $p - p_i - m_i + 1$. В [3] ничего не сказано при каком распределении шума это выполняется, но надо предполагать, при нормальном.

Исследования показали, что критерий переопределения более устойчив к отклонениям распределения шума от нормального закона, чем критерий Андерсона-Рубина. Графики эмпирического распределения статистики (4) при разном распределении шума ($\lambda = 2$, $\lambda = 1$, $\lambda = 0.5$), практически сливаются.

Но, в отличие от статистики Андерсона-Рубина, распределение статистики (4) при малом объеме выборки ощутимо отличается от асимптотического χ^2-распределения и достаточно медленно сходится к нему с ростом n (рис. 1).

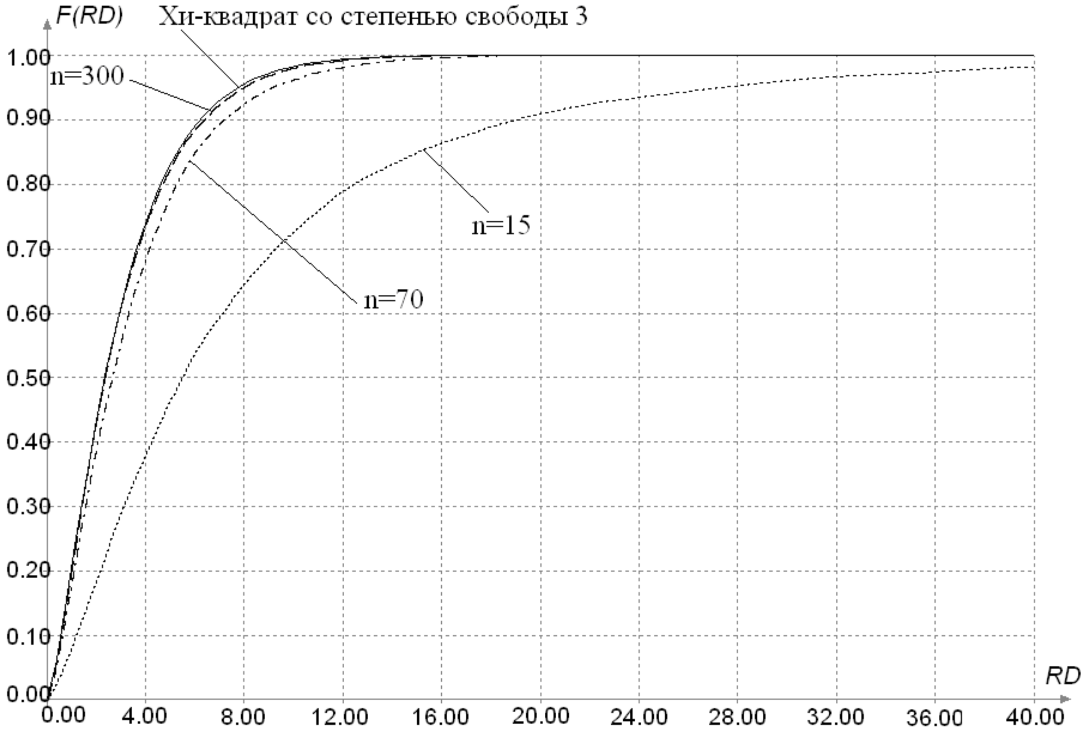

Рис. 1. Распределение статистики (4) при разных объемах выборки

Работа выполнена при частичной поддержке Федерального агентства по образованию Минобрнауки РФ в рамках Аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект № 2.1.2/3970).

Литература

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
2. Dufour Jean-Marie. Identification, weak instruments and statistical inference in econometrics. Université de Montréal, 2003
3. Маленво Э. Статистические методы в эконометрии. / Пер. с франц. - М.: Статистика, 1976. Вып. 2. – 328 с.