МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ПРИ ПРОВЕРКЕ СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБОБЩЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА

Акушкина К.А., Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.
НГТУ, Новосибирск
E-mail: ksushco@ngs.ru

Обобщенное распределение Вейбулла (ОРВ) применяется в задачах выживаемости и надежности наряду с логнормальным распределением и обратным гауссовским распределением. Как правило, при построении моделей законов реально наблюдаемых случайных величин бывает сложно отличить один закон от другого и отдать предпочтение одному из них. В определенной степени эти трудности связаны с ограниченными возможностями применения непараметрических критериев согласия, так как неизвестны распределения статистик этих критериев при проверке сложных гипотез вид H_0: $F(x) \in \{F(x,\theta),\ \theta \in \Theta\}$. относительно ОРВ.

Данная работа посвящена исследованию распределений статистик $G(S|H_0)$ критериев согласия Колмогорова, ω^2 Крамера-Мзеса-Смирнова, Ω^2 Андерсона-Дарлинга при проверке сложных гипотез относительно семейства ОРВ в случае применения для оценивания параметров метода максимального правдоподобия. Результаты расширяют возможности применения непараметрических критериев согласия для проверки различных сложных гипотез [1,2].

Функция плотности ОРВ имеет вид

$$f(x;\theta_0,\theta_1,\theta_2) = \frac{\theta_0}{\theta_1}\theta_2^{\theta_0} x^{\theta_0-1}\left(1+\left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}-1} e^{1-\left(1+\left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}}, \qquad (1)$$

где $x \geq 0$, θ_0, θ_1, $\theta_2 > 0$. Функция распределения ОРВ задается выражением

$$F(x;\theta_0,\theta_1,\theta_2) = 1 - e^{1-\left(1+\left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}}.$$

Частными случаями семейства (1) при различном наборе значений параметров являются различные известные законы.

Функция интенсивности для ОРВ определяется соотношением

$$\lambda(x) = \frac{\theta_0}{\theta_1}\theta_2^{\theta_1} x^{\theta_0-1}\left(1+\left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}-1} \qquad (2)$$

и может быть монотонно-возрастающей ($\theta_0 > 1,\ \theta_0 > \theta_1$ и $\theta_0 = 1,\ \theta_1 < 1$), монотонно-убывающей ($0 < \theta_0 < 1,\ \theta_0 < \theta_1$ и $0 < \theta_0 < 1,\ \theta_0 = \theta_1$), иметь $\bigcap-$форму ($\theta_1 > \theta_0 > 1$), или $\bigcup-$форму ($0 < \theta_1 < \theta_0 < 1$).

Таблица. Процентные точки и модели распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае использования ОМП для оценки параметров (θ_1=0.5)

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
θ_0	1.001	1.102	1.309	B_3(6.5294, 6.8315, 3.5901, 2.0446,0.2801)
θ_1	1.084	1.199	1.427	B_3(5.4860, 5.9744, 3.4348, 2.1402, 0.3000)
θ_2	1.038	1.144	1.360	B_3(4.7833, 6.1285, 3.0596, 2.0214, 0.3200)
θ_0, θ_1	0.849	0.922	1.071	B_3(6.2332, 6.0259,2.8200, 1.3000, 0.2800)
θ_0, θ_2	0.837	0.909	1.054	*Sb*(2.1787, 1.8756, 1.5259, 0.2567)
θ_1, θ_2	0.848	0.922	1.076	*Sb*(2.4861, 1.8758, 1.7026, 0.2664)
$\theta_0,\theta_1,\theta_2$	0.780	0.845	0.979	*Sb*(2.3507, 1.9291, 1.4629, 0.2495)
Критерий Крамера-Мизеса-Смирнова				
θ_0	0.181	0.232	0.359	B_3(5.1297, 2.5959, 22.9591,0.8000, 0.0081)
θ_1	0.227	0.296	0.466	B_3(7.4650, 2.6576, 44.4162, 1.3633, 0.0000)
θ_2	0.198	0.255	0.395	B_3(5.4489, 2.7019, 31.5609, 1.1500, 0.0062)
θ_0, θ_1	0.110	0.135	0.192	B_3(6.3779, 4.6451, 27.3376, 1.0000, 0.0050)
θ_0, θ_2	0.106	0.129	0.183	*Sb*(3.7541, 1.5434, 0.5800, 0.0058)
θ_1, θ_2	0.112	0.138	0.200	B_3(10.3369, 4.0734, 25.8270, 0.5802, 0.0000)
$\theta_0,\theta_1,\theta_2$	0.086	0.103	0.145	B_3(6.7252, 4.6508, 16.7920, 0.4800, 0.0050)
Критерий Андерсона-Дарлинга				
θ_0	1.125	1.415	2.140	B_3(4.9800, 4.1685, 17.0454, 7.1000, 0.0500)
θ_1	1.279	1.625	2.478	B_3(4.7602, 5.1000, 9.8527, 6.8675, 0.0000)
θ_2	1.157	1.454	2.186	B_3(3.0331, 4.0598, 9.3429, 5.9880, 0.1000)
θ_0, θ_1	0.673	0.806	1.120	B_3(5.7172, 5.0419, 10.1641, 3.0044, 0.0550)
θ_0, θ_2	0.655	0.781	1.079	*Sb*(3.8953, 1.6481, 3.5052, 0.0513)
θ_1, θ_2	0.743	0.902	1.290	*Sb*(4.1462, 1.6136, 4.6254, 0.0535)
$\theta_0,\theta_1,\theta_2$	0.523	0.617	0.839	*Sb*(3.9313, 1.6905, 2.7078, 0.0530)

Таблицы процентных точек и модели распределений статистик критериев Колмогорова, ω^2 Крамера-Мизеса-Смирнова, Ω^2 Андерсона-Дарлинга строились по смоделированным выборкам статистик объемом $N=10^6$. При таких N величина разности между истинным законом $G(S|H_0)$ распределения статистики и смоделированным эмпирическим $G_N(S|H_0)$ по модулю не превышает величины 10^{-3}. При этом значения статистик критериев вычислялись по выборкам псевдослучайных величин, генерируемых в соответствии с наблюдаемым законом $F(x,\theta)$, объемом $n=10^3$. Процентные точки и модели предельных распределений статистик критериев Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга были получены для значений параметра формы θ_1 = 0.5, 1.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0 для случая применения оценок максимального правдоподобия (ОМП). В таблице представлены результаты для θ_1 = 0.5, где в качестве моделей используются бета-распределения третьего рода с плотностью

$$B_3(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)=\frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 \mathrm{B}(\theta_0,\theta_1)}\frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1}\left(1-\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1+(\theta_2-1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}},$$

или семейство распределений *Sb*-Джонсона

$$Sb(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\frac{\theta_1\theta_2}{(x-\theta_3)(\theta_2+\theta_3-x)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\theta_0-\theta_1\ln\frac{x-\theta_3}{\theta_2+\theta_3-x}\right)^2\right\}.$$

Следует отметить, что результатами, приведенными в данной работе можно пользоваться в случае применения ОМП. В случае использования других методов оценивания применение данных таблиц и моделей будет некорректным, так как распределения статистик непараметрических критериев сильно зависят от метода оценивания.

Настоящие исследования выполнены при частичной поддержке РФФИ (проект № 09-01-00056-а), Федерального агентства по образованию в рамках АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”.

Литература

1. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч.II // Измерительная техника. 2009. № 8. – С.17-26.
2. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч.I // Измерительная техника. 2009. № 6. – С.3-11.