

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ СЛУЧАЙНОСТИ И ОТСУТСТВИЯ ТРЕНДА

Комиссарова А.С., Лемешко Б.Ю.
НГТУ, Новосибирск
E-mail: sandra.berkovich@gmail.com

Критерии тренда и случайности предназначены для проверки гипотез о случайности расположения полученных выборочных данных, т.е. отсутствия взаимосвязи между значениями наблюдаемой случайной величины и их номерами в выборочной последовательности. Эти критерии имеют широкую область применения, особенно при анализе временных рядов.

Следует отметить, что одной из основных предпосылок применения параметрических критериев данного класса является предположение о принадлежности анализируемых данных нормальному закону. На практике такое предположение достаточно часто нарушается. Для многих статистических критериев нарушение предположения о нормальности приводит к существенным изменениям в законе распределения статистики критерия. Если этому не придавать значения и пользоваться стандартными процедурами анализа, то можно приходиться к ошибочным выводам. Поэтому исследователю необходимо обладать достоверной информацией об устойчивости, или, наоборот, чувствительности распределения статистики критерия и его числовых характеристик к виду наблюдаемого закона распределения.

В настоящей работе продолжены исследования совокупности критериев, ориентированных на проверку гипотез отсутствия тренда в средних и дисперсиях [1]. Цель работы заключалась в исследовании влияния на распределения статистик параметрических критериев тренда и случайности различной степени отклонения от нормального закона и оценка мощности параметрических и непараметрических критериев по отношению к некоторым конкурирующим гипотезам. В частности, исследовалось, что происходит с распределениями статистик, если закон распределения наблюдаемых величин асимметричен, с “тяжелыми” хвостами, либо представляет собой симметричный закон, в различной степени отличающийся от нормального. Исследовалась зависимость распределений статистик критериев от объема выборки. В основу исследований положена методика статистического моделирования распределений статистик.

В процессе исследований распределений статистик при справедливой проверяемой гипотезе H_0 рассматривалась принадлежность наблюдаемых выборок различным законам, в том числе семейству с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_0\Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{|x-\theta_1|}{\theta_0}\right)^{\theta_2}\right\} \quad (1)$$

и параметром формы $\theta_2 = 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2; 4; 8$. При различных параметрах формы вид закона менялся от близкого к распределению Коши, до близкого к равномерному закону. В частности, при $\theta_2 = 2$ выражение (1) дает плотность

нормального закона распределения. Чем меньше значение параметра формы, тем “тяжелее” хвосты распределения.

При проверке отсутствия тренда (случайности) в математическом ожидании задача формулируется следующим образом. Предполагается, что наблюдается временной ряд x_1, \dots, x_n значений взаимно независимых случайных величин с математическими ожиданиями μ_1, \dots, μ_n и одинаковыми (но неизвестными) дисперсиями. Проверяется гипотеза

$$H_0: \mu_i = \mu, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

о том, что все выборочные значения принадлежат к одной генеральной совокупности со средним μ , против конкурирующей гипотезы о наличии тренда

$$H_1: |\mu_{i+1} - \mu_i| > 0, \quad i=1, 2, \dots, n-1. \quad (3)$$

Гипотеза об отсутствии тренда в дисперсии (в характеристиках рассеяния) формулируется аналогичным образом (проверяется $H_0: \sigma_i = \sigma, \quad i=1, 2, \dots, n$, против $H_1: |\sigma_{i+1} - \sigma_i| > 0, \quad i=1, 2, \dots, n-1$).

Для проверки гипотезы об отсутствии тренда в среднем или в дисперсии предназначены параметрические критерии автокорреляции и сериальной корреляции Вальда-Вольфовитца, а также целый ряд непараметрических критериев (Фостера-Стюарта, Кокса-Стюарта, ранговой сериальной корреляции Вальда-Вольфовитца, Бартелса), описания большинства из которых присутствуют в [2].

При проверке отсутствия сдвига в дисперсии предполагается, что наблюдаемая нами последовательность x_1, \dots, x_n имеет одну и ту же дисперсию σ^2 . Проверяется гипотеза $H_0: \sigma_1^2 = \dots = \sigma_n^2 = \sigma_0^2$ (σ_0 неизвестно) против конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma_1^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma_0^2; \quad \sigma_{k+1}^2 = \dots = \sigma_n^2 = \sigma_0^2 + \delta$ ($\delta > 0$), утверждающей, что значение дисперсии меняется в некоторой неизвестной точке, т.е. k неизвестно ($1 \leq k \leq n-1$). Для проверки этой гипотезы применяется критерий Хсу, G-критерий и ранговые критерии обнаружения сдвига дисперсии в неизвестной точке.

При исследовании распределений статистик и оценке мощности критериев относительно различных конкурирующих гипотез использовалась методика статистического моделирования и разрабатываемое программное обеспечение.

Исследования распределений статистики параметрического критерия автокорреляции показали, что его применение будет корректным и в тех случаях, когда закон распределения наблюдаемой случайной величины существенно отличается от нормального, при условии, что он симметричен и без “тяжелых” хвостов.

В случае наличия линейного тренда случайные величины моделировались в соответствии с

$$x_i = a \cdot t + \xi_i, \quad (4)$$

где ξ_i представляют собой независимые случайные величины, распределённые в соответствии с заданным законом (например, по стандартному нормальному закону), $t \in [0, 1]$. В случае периодического тренда случайные величины моделировались в соответствии с соотношением

$$x_i = a \cdot \sin(2\pi t) + \xi_i, \quad (5)$$

Рассматриваемые критерии проверки гипотез об отсутствии тренда в средних, можно упорядочить по мощности (относительно линейного тренда) следующим образом:

Кокса-Стюарта \succ Бартелса \succ ранговой сериальной корреляции Вальда-Вольфовитца \succ автокорреляции \succ сериальной корреляции Вальда-Вольфовитца \succ Фостера-Стюарта .

Если рассматривать в качестве конкурирующих гипотез наличие периодического и смешанного тренда, то целесообразно рекомендовать использование критериев Бартелса, Вальда-Вольфовитца (ранговый и неранговый вариант) и автокорреляции.

При исследовании мощности критериев обнаружения тренда в характеристиках рассеяния в качестве конкурирующих гипотез рассматривалась ситуация с линейным трендом в дисперсии. Исследовалась мощность критериев Фостера-Стюарта, Кокса-Стюарта, автокорреляции, ранговой сериальной корреляции Вальда-Вольфовитца, сериальной корреляции Вальда-Вольфовитца и Бартелса. Оказалось, что критерии Фостера-Стюарта и Кокса-Стюарта, специально построенные для выявления тренда в дисперсии, весьма значительно превосходят по мощности остальные критерии. Для обнаружения тренда в дисперсии можно рекомендовать к применению критерии Фостера-Стюарта и Кокса-Стюарта, расположив их по предпочтению:

Фостера-Стюарта \succ Кокса-Стюарта.

В случае принадлежности наблюдений нормальному закону критерии сдвига дисперсии в неизвестной точке можно упорядочить по мощности следующим образом:

критерий Хсу \succ критерий сдвига дисперсии с метками Клотца \succ
 \succ G-критерий \succ критерий сдвига дисперсии с метками Сэвиджа.

В дальнейшем планируется программная реализация режима «реального времени» при исследовании распределений статистик применяемых критериев в нестандартных условиях (например, в случае принадлежности выборки произвольному закону) с последующим использованием результатов для осуществления корректных статистических выводов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-00056а), Аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект № 2.1.2/11855) и Федеральной целевой программы Минобрнауки РФ "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России".

Литература

1. Лемешко Б.Ю., Комиссарова А.С., Щеглов А.Е. Применение некоторых критериев проверки гипотез случайности и отсутствия тренда // Метрология. 2010. № 12. – С. 3-25.
2. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика: Для инженеров и научных работников. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.