

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ОТКЛОНЕНИЯ ЭМПИРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОТ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА МЕТОДАМИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рогожников А.П., Лемешко Б.Ю.

НГТУ, Новосибирск

E-mail: rogozhnikov.andrey@gmail.com

Задача проверки нормальности распределения наблюдений является важным этапом в классических статистических методах анализа данных. В процедурах регрессионного анализа, контроля качества, анализа надёжности для обеспечения корректности выводов требуется выполнение предположений о принадлежности ошибок наблюдений нормальному закону. Если это условие не выполняется, используемые методы и модели могут значительно усложняться, либо вовсе становиться непригодными для применения. В этой связи важное значение имеет обоснованность решения о том, отвечают ли имеющиеся наблюдения нормальному закону, а критерии проверки отклонения эмпирического распределения вероятностей от нормального закона являются инструментом принятия такого решения.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ – выборка независимых случайных величин, распределённых по закону с функцией распределения $F(x)$. Проверяемая гипотеза H_0 имеет вид $H_0: F(x) = \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ – ф.р. нормального закона с некоторыми параметрами сдвига и масштаба.

В связи с выходом стандарта [1] в работах [2,3] мы исследовали свойства распределений и мощность ряда критериев, предназначенных для проверки данной гипотезы: Шапиро-Уилка, Эппса-Палли, Д`Агостино, Фросини, Хегази-Грина, Гири, Дэвида-Хартли-Пирсона (ДХП), Шпигельхальтера.

Важным показателем работоспособности критериев является их свойства, проявляемые при анализе реальных данных. В данной работе рассматриваются четыре классических набора наблюдений, связанных с измерениями фундаментальных физических констант: средней плотности Земли (Генри Кавендиш), заряда электрона (Роберт Милликен) и скорости света (Саймон Ньюкомб, Альберт Майкельсон). Подобные наблюдения естественным образом могут содержать случайные ошибки, имеющие нормальное распределение.

Методика исследования включает в себя следующие этапы для каждого из наборов данных: проверка гипотезы о нормальности при помощи перечисленных критериев; нахождение других моделей законов, хорошо согласующихся с наблюдениями (определение конкурирующих гипотез); вычисление оценок мощности критериев по отношению к возможным конкурирующим гипотезам. На заключительном этапе выполняется итоговый сравнительный анализ мощности критериев. Методика базируется на использовании методов статистического моделирования и развиваемого программного обеспечения.

Проиллюстрируем данную методику на данных Кавендиша. Результаты 29 измерений средней плотности Земли: 5.50, 5.61, 4.88, 5.07, 5.26, 5.55, 5.36, 5.29,

5.58, 5.65, 5.57, 5.53, 5.62, 5.29, 5.44, 5.34, 5.79, 5.10, 5.27, 5.39, 5.42, 5.47, 5.63, 5.34, 5.46, 5.30, 5.75, 5.68, 5.85.

В табл. 1 приведены значения статистик S^* , вычисленные при проверке гипотезы H_0 , и достигнутые уровни значимости $P\{S > S^*\} = \alpha'$ по каждому критерию. Здесь и далее уровень значимости определялся при статистическом моделировании распределений статистик при справедливости H_0 (объем выборки статистик $N=10^6$).

Мы попытались подобрать и другие законы, которые при оценке их параметров методом максимального правдоподобия хорошо согласуются с эмпирическим распределением. Результаты оценивания и достигнутые уровни значимости, полученные при проверке согласия данных Кавендиша с построенными законами по различным критериям, приведены в табл. 2. Параметры сдвига обозначены как θ_0 , параметры масштаба – как θ_1 . В критериях отношения правдоподобия и χ^2 Пирсона использовалось асимптотически оптимальное группирование (АОГ) с числом интервалов $k=5$.

Полученные логарифмически нормальное и логистическое распределения близки к $N(5.4478, 0.2171)$. Это косвенно подтверждается и полученными оценками мощности (см. табл. 3). Однако для отклонения гипотезы о нормальности оснований нет.

Таблица 1. Проверка нормальности измерений Кавендиша.

Критерий	Значение статистики	Достигнутый уровень значимости, α'
Эппса-Палли	0.051	0.734
Фросини	0.122	0.905
Хегази-Грина T1	0.107	0.871
Хегази-Грина T2	0.030	0.562
Гири	0.800	0.874
ДХП	4.390	0.473
Шпигельхальтера	1.227	0.633

Таблица 2. Проверка согласия данных Кавендиша с конкурирующими гипотезами. Значения статистик и достигаемые уровни значимости.

Критерий	H'_0 : Нормальное $\theta_0 = 5.4478$ $\theta_1 = 0.2171$		H_1 : Лапласа $\theta_0 = 5.4600$ $\theta_1 = 0.1737$		H_2 : Лог-нормальное $\theta_0 = 1.6944$ $\theta_1 = 0.0403$		H_3 : Логистическое $\theta_0 = 5.4560$ $\theta_1 = 0.1233$	
	S_n	$P\{S_n > S^*\}$	S_n	$P\{S_n > S^*\}$	S_n	$P\{S_n > S^*\}$	S_n	$P\{S_n > S^*\}$
Отношения правдоподобия	0.785	0.675	2.307	0.316	0.785	0.675	1.268	0.531
χ^2 Пирсона	0.840	0.657	1.251	0.535	0.840	0.657	1.275	0.529
Колмогорова	0.515	0.789	0.560	0.700	0.538	0.730	0.386	0.974
ω^2 Мизеса	0.025	0.913	0.050	0.556	0.030	0.837	0.024	0.882
Ω^2 Мизеса	0.203	0.879	0.310	0.687	0.244	0.769	0.182	0.908

Таблица 3. Оценки мощности критериев нормальности относительно близких конкурирующих гипотез, соответствующих распределениям из табл. 2, при уровнях значимости $\alpha = \alpha'$ и $\alpha = 0.10$.

Критерий	$\alpha = \alpha'$	$1 - \beta$ (H_1)	$1 - \beta$ (H_2)	$1 - \beta$ (H_3)	α	$1 - \beta$ (H_1)	$1 - \beta$ (H_2)	$1 - \beta$ (H_3)
Фросини	0.905	0.968	0.907	0.924	0.10	0.433	0.105	0.173
Хегази-Грина T1	0.871	0.962	0.873	0.906	*	0.486	0.106	0.209
Хегази-Грина T2	0.562	0.885	0.569	0.716	*	0.549	0.107	0.272
Гири	0.874	0.958	0.875	0.901	*	0.500	0.101	0.202
ДХП	0.473	0.712	0.474	0.569	*	0.368	0.100	0.194
Шпигельхальтера	0.633	0.927	0.635	0.757	*	0.544	0.102	0.228
Эппса-Палли	0.734	0.897	0.740	0.788	*	0.446	0.107	0.202

Рассмотренные критерии нормальности показали в основном схожие свойства при проверке гипотез о нормальности приведенных наборов данных. Для наблюдений Кавендиша, Милликена и Майкельсона каждый из критериев не отклоняет гипотезу H_0 , при этом достигнутые уровни значимости по разным критериям сравнимы друг с другом, как и оценки мощности этих критериев по отношению к соответствующим близким конкурирующим гипотезам.

Заметим, что по отношению к логарифмически-нормальной альтернативе H_2 (для данных Кавендиша) мощность критериев практически равна задаваемому уровню значимости, а законы, соответствующие H'_0 и H_2 , действительно близки. В остальных случаях мощность критериев достаточно велика, чтобы уверенно судить о предпочтительности того или иного закона.

По полученным результатам критерии нормальности по убыванию мощности можно расположить следующим образом: Шпигельхальтера $\rightarrow$ Гири $\rightarrow$ Хегази-Грина $T_2 \rightarrow$ Хегази-Грина $T_1 \rightarrow$ Фросини $\rightarrow$ Дэвида-Хартли-Пирсона. Критерий Эппса-Палли следует поместить на одно место с критерием Фросини.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-00056а), Аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект № 2.1.2/11855) и Федеральной целевой программы Минобрнауки РФ "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России".

Литература

1. ГОСТ Р ИСО 5479-2002. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения. – М.: Изд-во стандартов. 2002. – 30 с.
2. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона // Метрология. 2005. № 2. – С. 3-24.
3. Лемешко Б.Ю., Рогожников А.П. Исследование особенностей и мощности некоторых критериев нормальности // Метрология. 2009. № 4. – С. 3-24.