ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ОТКЛОНЕНИЯ ЭМПИРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОТ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА МЕТОДАМИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рогожников А.П., Лемешко Б.Ю.
НГТУ, Новосибирск
E-mail: rogozhnikov.andrey@gmail.com

При проведении экспериментальных исследований нельзя исключать возможного наличия факторов, которые могут приводить к систематическим ошибкам, к смещенности оценок параметров, к коррелированности результатов измерений, к появлению тренда в той или иной форме. Далеко не всегда реальные измерения (ошибки измерений) представляют собой выборки независимых одинаково распределенных нормальных величин. Само по себе это не является чем-то особенным, но приводит к определенным проблемам при анализе, к появлению вопросов, связанных с точностью измерений и корректностью статистических выводов. Поэтому при статистическом анализе результатов измерений первым из проверяемых предположений обычно является проверка гипотезы о принадлежности ошибок нормальному закону.

Результаты классических экспериментов, связанных с измерениями физических констант, привлекают интерес не только в силу их исторической ценности, но и как примеры высокого уровня организации и проведения соответствующих измерений. Принято считать, что ошибки измерений в этих экспериментах подчиняются нормальному закону. В некоторых случаях, анализируя классические результаты, авторы работ сравнивают используемые критерии по мощности [1] относительно определенных конкурирующих гипотез. Приводимые оценки мощности позволяют судить о степени уверенности в том, что ошибки в данных экспериментах действительно подчиняются нормальному закону. В данной работе рассматривались наблюдения Генри Кавендиша (относительная плотность Земли), Роберта Милликена (заряд электрона), Альберта Майкельсона и Саймона Ньюкомба (скорость света).

Пусть $x_1,\ldots, x_n$ – выборка независимых случайных величин, распределённых по закону с функцией распределения $F(x)$. Проверяемая гипотеза H_0 имеет вид H_0: $F(x)=\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ – ф.р. нормального закона с некоторыми параметрами сдвига и масштаба. В связи с выходом стандарта [2] в работах [3,4] мы исследовали свойства распределений и мощность ряда критериев, предназначенных для проверки данной гипотезы: Шапиро-Уилка, Эппса-Палли, Д’Агостино, Фросини, Хегази-Грина, Гири, Дэвида-Хартли-Пирсона, Шпигельхальтера.

Методика исследования включала в себя следующие этапы для каждого из наборов данных: проверка гипотезы о нормальности при помощи перечисленных критериев; нахождение других моделей законов, хорошо согласующихся с наблюдениями (определение конкурирующих гипотез); вычисление оценок мощности критериев по отношению к возможным конкурирующим гипотезам; итоговый сравнительный анализ мощности критериев. Методика базируется на использовании методов статистического моделирования и развиваемого программного обеспечения.

Проиллюстрируем данную методику на данных Кавендиша. Результаты 29 измерений средней плотности Земли: 5.50, 5.61, 4.88, 5.07, 5.26, 5.55, 5.36, 5.29, 5.58, 5.65, 5.57, 5.53, 5.62, 5.29, 5.44, 5.34, 5.79, 5.10, 5.27, 5.39, 5.42, 5.47, 5.63, 5.34, 5.46, 5.30, 5.75, 5.68, 5.85. Достигнутые уровни значимости, полученные при проверке согласия данных Кавендиша с построенными альтернативными законами, приведены в табл. 1. Уровень значимости определялся при статистическом моделировании распределений статистик при справедливости H_0 (объем выборок статистик N=10^6).

Таблица 1. Проверка согласия с отобранными моделями для данных Кавендиша

Критерий	Нормальный		Лапласа		Лог-нормальный		Логистический	
	S^*	P	S^*	P	S^*	P	S^*	P
Y_n^2 Никулина	1.203	0.878	2.791	0.593	1.203	0.878	3.037	0.552
Колмогорова	0.515	0.789	0.560	0.700	0.538	0.730	0.386	0.974
Андерсона-Дарлинга	0.203	0.879	0.310	0.687	0.244	0.769	0.182	0.908
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.025	0.913	0.050	0.556	0.030	0.837	0.024	0.882

Анализируя мощность рассмотренных критериев относительно трех конкурирующих законов, оказавшихся подходящими для описания измерений, можно однозначно утверждать следующее. Специальные критерии нормальности, предназначенные для проверки гипотезы только о принадлежности выборки нормальному закону, по крайней мере, лучшие их представители, имеют преимущество перед непараметрическими критериями согласия. В свою очередь, непараметрические критерии согласия при проверке нормальности обладают более высокой мощностью по сравнению с критериями типа χ^2.

Если отталкиваться от полученных в данной работе оценок мощности критериев, то к наиболее предпочтительным следует отнести критерии Шпигельхальтера, Хегази-Грина T_2, Эппса-Палли, Шапиро-Уилка, Гири.

Специальные критерии нормальности можно упорядочить по мощности относительно конкурирующей гипотезы в виде распределения Лапласа следующим образом:

Шпигельхальтера $\succ$ *Гири* $\sim$ *Хегази-Грина* T_2 $\succ$ *Хегази-Грина* T_1 $\succ$ *Фросини* $\sim$ *Эппса-Палли* $\succ$ *Шапиро-Уилка* $\succ$ *Дэвида-Хартли-Пирсона*.

Относительно конкурирующей гипотезы в виде логистического распределения в следующем порядке:

Шпигельхальтера $\sim$ *Хегази-Грина* T_2 $\succ$ *Гири* $\sim$ *Хегази-Грина* T_1 $\succ$ *Эппса-Палли* $\succ$ *Шапиро-Уилка* $\succ$ *Дэвида-Хартли-Пирсона* $\succ$ *Фросини*.

Относительно конкурирующего логарифмически нормального закона критерии упорядочиваются следующим образом:

Эппса-Палли $\sim$ *Шапиро-Уилка* $\succ$ *Хегази-Грина* T_2 $\succ$ *Хегази-Грина* T_1 $\succ$ *Фросини* $\succ$ *Шпигельхальтера* $\succ$ *Гири* $\succ$ *Дэвида-Хартли-Пирсона*.

Таблица 2. Мощность критериев при проверке гипотезы H_0 относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 (для измерений Кавендиша)

Критерий		H_1- Лапласа			H_2- лог.нормальный			H_3- логистический		
		0.15	**0.05**	**0.01**	**0.15**	**0.05**	**0.01**	**0.15**	**0.05**	**0.01**
Эппса-Палли		0.516	.344	.181	.158	.055	.012	.262	.129	.046
Шапиро-Уилка		.480	.328	.186	.158	.056	.012	.255	.134	.056
Шапиро-Уилка (Royston)		.506	.348	.196	**.159**	**.056**	**.012**	.269	.143	.060
Д'Агостино z_2		.408	.243	.113	.150	.050	.010	.235	.106	.034
Фросини		.505	.330	.172	.156	.053	.011	.232	.105	.034
Хегази-Грина T_1		.558	.380	.204	.157	.054	.011	.273	.133	.047
Хегази-Грина T_2		.622	**.437**	**.243**	.158	.055	.012	**.342**	**.185**	**.074**
Гири		.571	.397	.221	.151	.051	.010	.264	.129	.048
Дэвида-Хартли-Пирсона		.438	.272	.131	.150	.050	.010	.255	.123	.042
Шпигельхальтера		**.625**	.425	.227	.152	.051	.010	.299	.143	.050
X_n^2 Пирсона (ОМП по негруппированным данным)	$k=4$	.234	.103	.034	**.155**	**.052**	**.011**	.162	.056	.013
	$k=5$	.318	.154	.045	.153	.052	.010	.172	.063	.013
	$k=6$	.312	.146	.052	.153	.051	.011	.179	.065	.016
	$k=7$	**.368**	**.196**	**.064**	.153	.052	.011	**.198**	**.075**	**.017**
X_n^2 Пирсона (ОМП по группированным данным)	$k=4$	.226	.098	.028	.167	.059	.013	.172	.062	.014
	$k=5$	.357	.181	.059	.170	.059	.012	.189	.070	.015
	$k=6$	**.366**	**.208**	**.091**	**.180**	**.064**	**.014**	**.220**	**.098**	**.031**
	$k=7$	.352	.180	.063	.173	.060	.012	.206	.087	.024
Y_n^2 Никулина	$k=4$	.262	.111	.044	.153	.052	.010	.174	.059	.015
	$k=5$	.356	.167	.066	.153	.051	.010	.197	.071	.020
	$k=6$	.342	.181	.075	.153	.052	.011	.200	.081	.023
	$k=7$	**.399**	**.223**	**.097**	**.153**	**.052**	**.011**	**.215**	**.088**	**.026**
Колмогорова		.460	.272	.118	.155	.053	.011	.216	.089	.024
Андерсона-Дарлинга		**.517**	**.342**	**.180**	**.157**	**.054**	**.011**	**.247**	**.115**	**.039**
Крамера-Мизеса-Смирнова		.507	.330	.170	.155	.053	.011	.231	.103	.033

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-00056а), Аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект № 2.1.2/11855) и Федеральной целевой программы Минобрнауки РФ "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России".

Литература

1. Voinov V., Voinov E. A statistical reanalysis of the classical Rutherford's experiment // Communications in Statistics – Simulation and Computation, 2010. – V.39. – № 1. – P.157–171.
2. ГОСТ Р ИСО 5479-2002. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения. – М.: Изд-во стандартов. 2002. – 30 с.
3. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона // Метрология. 2005. № 2. – С. 3-24.
4. Лемешко Б.Ю., Рогожников А.П. Исследование особенностей и мощности некоторых критериев нормальности // Метрология. 2009. № 4. – С. 3-24.