

Б.Ю. ЛЕМЕШКО

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Конспект лекций

НОВОСИБИРСК
2013

УДК 519.8
Л 442

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор *А.А. Попов*;
д-р физ.-мат. наук, профессор *В.А. Селезнев*

Работа подготовлена на кафедре прикладной математики для студентов IV курса ФПМИ (направление 010400 – Прикладная математика и информатика, направление 010500 – Математическое обеспечение и администрирование информационных систем) и утверждена Редакционно-издательским советом университета в качестве конспекта лекций.

Лемешко Б.Ю.

Л 442 Теория игр и исследование операций: Конспект лекций / Б.Ю. Лемешко. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013. – 167 с.

ISBN 978-5-7782-2198-7

Курс лекций рассчитан на один семестр и предназначен для студентов ФПМИ, но может быть полезен и студентам других специальностей. Настоящее издание должно помочь студентам овладеть элементами теории игр и методами исследования операций.

УДК 519.8

ISBN 978-5-7782-2198-7

© Лемешко Б.Ю., 2013
© Новосибирский государственный
технический университет, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение в исследование операций	5
1.1. Предмет исследования операций	5
1.2. Основные этапы операционного исследования	6
1.3. Типичные классы задач	7
1.4. Некоторые принципы принятия решений в ио	8
1.5. Принятие решений в условиях определенности	9
1.6. Методика определения полезности	11
1.7. Принятие решений в условиях риска	15
1.8. Принятие решений в условиях неопределенности	15
1.9. Принятие решений в условиях конфликтных ситуаций или противодействия	21
2. Элементы теории игр	23
2.1. Введение	23
2.2. Стратегии. Нормальная форма игры	26
2.3. Ситуации равновесия	27
2.4. Антагонистические игры. Игры с нулевой суммой	28
2.5. Нормальная форма	30
2.6. Смешанные стратегии	30
2.7. Теорема о минимаксе	32
2.8. Вычисление оптимальных стратегий	37
2.9. Игры с ограничениями	41
2.10. Бесконечные игры	42
2.11. Игры на квадрате	43
2.12. Игры с непрерывным ядром	44
2.13. Вогнуто-выпуклые игры	47
2.14. Игры с выбором момента времени	49
3. Дискретное программирование	54
3.1. Введение	54
3.2. Некоторые понятия и определения, используемые в методах отсечения	56
3.3. Лексикографическая модификация метода последовательного уточнения оценок	58
3.4. Первый алгоритм Гомори	60
3.5. Доказательство конечности первого алгоритма Гомори	67
3.6. Второй алгоритм Гомори	70
3.7. Третий алгоритм Гомори	78
3.7.1. Построение целочисленного правильного отсечения для 3-го алгоритма Гомори	79
3.7.2. Построение начальной I -нормальной целочисленной симплексной таблицы	81
3.7.3. Алгоритм	82
3.7.4. Выбор λ	83
3.8. Доказательство конечности третьего алгоритма Гомори	88

4. Дополнительные главы нелинейного программирования	91
4.1. Классические методы решения задач оптимизации с ограничениями типа равенств	91
4.2. Метод множителей Лагранжа	93
4.3. Теорема Куна-Таккера	98
4.4. Квадратичное программирование	102
4.4.1. Условия Куна-Таккера для задачи квадратичного программирования.....	102
4.4.2. Метод Баранкина и Дорфмана.....	104
4.4.3. Метод Франка и Вулфа.....	112
4.5. Метод возможных направлений	119
4.5.1. Метод выбора возможного направления.....	119
4.5.2. Алгоритм метода возможных направлений	121
4.6. Метод условного градиента	123
4.6.1. Правило выбора длины шага	123
4.6.2. Алгоритм метода условного градиента	124
4.6.3. Сходимость алгоритма условного градиента.....	124
4.6.4. Метод Ньютона	126
4.7. Динамическое программирование	126
Рекомендуемая литература	132

1. ВВЕДЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

1.1. ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Исследование операций (ИО) – наука, которая занимается разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного (или оптимального) управления, в основном, организационными системами.

Предметом исследования операций чаще всего являются системы организационного типа (организации), которые состоят из большого числа подразделений, взаимодействующих между собой. Причем интересы подразделений не всегда согласуются между собой и могут быть противоположными.

Цель исследования операций – количественное обоснование принимаемых решений по управлению организациями (системами).

Решение, наиболее выгодное всей организации называется *оптимальным*. Решение, выгодное одному или нескольким подразделениям – *субоптимальное*.

Надо заметить, что решение, оптимальное для всей организации, не обязательно оптимально для входящих в нее подразделений.

Исследование операций характеризуется следующими основными особенностями:

1. Системный подход к анализу поставленной проблемы. Системный подход (анализ) является основным принципом исследования операций. Любая задача, какая бы ни была частная, рассматривается с точки зрения ее влияния на критерий функционирования всей системы.

2. Для исследования операций характерно, что при решении каждой новой проблемы возникают все новые задачи. Наибольший эффект достигается при непрерывном исследовании, обеспечивающий преемственность при переходе одной задачи к другой.

3. Стремление к нахождению оптимального решения поставленной задачи. Хотя определение оптимального решения не всегда возможно из-за ограничений, накладываемыми имеющимися в наличии ресурсами (или уровня развития современной науки). В этом случае довольствуются субоптимальным решением.

4. Одним из создателей исследования операций является Т. Саати, который определил ее как *”искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые делаются еще худшие ответы другими методами”*.

5. Исследования всегда проводятся комплексно по многим направлениям. Для проведения такого исследования системы организационного типа создается группа, состоящая из специалистов различного профиля из разных областей (инженеры, экономисты, психологи и т.д.). Задача такой

группы – комплексное исследование всего множества факторов, влияющих на решение проблемы, и использования идей и методов различных наук.

1.2. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Любое операционное исследование, при всем возможном многообразии конкретных работ по исследованию операций, проходит последовательно следующие этапы:

1. Постановка задачи
2. Построение математической модели
3. Нахождение метода решения (выбор, разработка)
4. Проверка и корректировка модели
5. Реализация найденного решения на практике

1. Постановка задачи. Чрезвычайно ответственный этап операционного исследования. Первоначально задачу формулируют с точки зрения заказчика. Такая постановка никогда не бывает окончательной. Во время анализа исследуемой системы постановка всегда уточняется. На этом этапе роль операций состоит в тщательном исследовании объекта, изучении множества факторов, влияющих на результаты исследования процесса.

2. Формализация задачи. В самом общем случае математическая модель задачи имеет вид. Необходимо найти

$$\max E = \max f(\bar{x}, \bar{y})$$

при

$$g_i(\bar{x}, \bar{y}) \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

где

$E = f(\bar{x}, \bar{y})$ – целевая функция (показатель качества или эффективность системы);

$\bar{x}$ – вектор управляемых переменных;

$\bar{y}$ – вектор неуправляемых переменных;

g_i – функция потребления i -го ресурса

b_i – величина i -го ресурса

3. Нахождение метода решения. Для нахождения оптимального решения $\bar{x}_{opt}$ в зависимости от структуры целевой функции и ограничений применяют те или иные методы теории оптимальных решений:

- Линейное программирование, если f и g – линейные функции.
- Нелинейное программирование, если f и g – нелинейные функции.

- Динамическое программирование, если f имеет специфическую структуру, т.е. является аддитивной или мультипликативной функцией от переменных $\bar{x}$ и $\bar{y}$, например, $f(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i, y_i)$.
- Геометрическое программирование, если целевая функция $f(x) = \sum_i c_i x_1^{\alpha_i} \dots x_m^{\alpha_m}$, а $g_i(x) \leq 1$.
- Стохастическое программирование, когда $\bar{y}$ – случайная величина, а вместо функции $f(\bar{x}, \bar{y})$ рассматривается ее математическое ожидание $E_y[f(\bar{x}, \bar{y})]$.
- Дискретное программирование, если на $\bar{x}$ и $\bar{y}$ наложено требование дискретности (например, целочисленности).
- Эвристическое программирование применяют при решении тех задач, в которых точный оптимизм найти алгоритмическим путем невозможно из-за огромного числа вариантов.

4. Проверка и корректировка модели. В сложных системах, к которым относятся и системы организационного типа, модель лишь частично отражает реальный процесс. Поэтому необходима проверка степени соответствия или адекватности модели и реального процесса. Проверку производят сравнением предсказанного поведения с фактическим поведением при изменении значений внешних управляемых воздействий.

5. Реализация найденного решения на практике. Важнейший этап, завершающий операционное исследование.

1.3. ТИПИЧНЫЕ КЛАССЫ ЗАДАЧ

По содержательной постановке наиболее часто возникают следующие типичные классы задач:

- *Задачи управления запасами.* Такие задачи обладают следующей особенностью: с увеличением запасов увеличиваются расходы на хранение, но уменьшаются потери из-за возможной их нехватки. (Логистика)
- *Задачи распределения ресурсов.* Такие задачи возникают, когда существует определенный набор работ, которые необходимо выполнить, а наличных ресурсов для выполнения работы должным образом не хватает.
- *Задачи ремонта и замены оборудования* появляются в тех случаях, когда работающее оборудование изнашивается, устаревает и со временем подлежит замене.
- *Задачи массового обслуживания* рассматривают вопросы образования и функционирования очередей, с которыми приходится сталкиваться в повседневной практике, при управлении технологическими процессами, в линиях связи и компьютерных сетях.

- *Задачи календарного планирования или составления расписания.*
- *Задачи сетевого планирования и управления.* Здесь рассматриваются соотношения между сроком окончания крупного комплекса операций и моментами начала всех операций комплекса. Они актуальны при разработке сложных и дорогостоящих проектов.
- *Задачи выбора маршрута или сетевые задачи.* Чаще всего встречаются при исследовании разнообразных процессов на транспорте и в системах связи (компьютерные сети).

Часто задачи оказываются комбинированными.

1.4. НЕКОТОРЫЕ ПРИНЦИПЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ИО

В процессе принятия решений всегда возникают многочисленные трудности.

1. Большое число критериев, которые не всегда согласованы между собой. Например, требования максимальной надежности и минимальной стоимости; или требование максимальной мощности изделия при минимальных габаритах. Такие критерии противоречивы. Поэтому часто возникает задача выбора некоторого компромисса между такими требованиями.

2. Высокая степень неопределенности, которая обусловлена недостаточной информацией для обоснованного принятия решения.

Любой процесс принятия решения включает следующие элементы:

- *Цель.* Необходимость принятия решения определяется целью или несколькими целями, которые должны быть достигнуты.
- *Лицо, принимающее решение,* должно нести ответственность за последствия этих решений.
- *Наличие альтернативных решений* (различных вариантов достижения целей).
- *Наличие внешней среды* (совокупности внешних факторов, влияющих на исход решения).
- *Исходы решений,* т.е. результаты, к которым приходят в результате реализации принятых решений.
- *Правила выбора решений* (решающие правила).

Эти правила позволяют определить наиболее предпочтительные в смысле выбранного критерия решения. Решающее правило отражает информированность лица, принимающего решение, о возможных исходах выбранных решений, а также предпочтительность тех или иных исходов.

Теория принятия решений использует различные процедуры, позволяющие формализовать предпочтения, т.е. выразить их в единой количественной мере. Основой для таких процедур является *теория полезности*, разработанная Дж. Фон Нейманом и О. Моргенштерном. Ее математическая основа – система аксиом, в которых утверждается, что существует не-

которая мера ценности, позволяющая упорядочить результаты решений. Эта мера называется функцией *полезности решений* или *полезностью*.

В зависимости от условий внешней среды и степени информированности лица, принимающего решение, существует следующая квалификация задач принятия решений:

- в условиях определенности;
- в условиях риска;
- в условиях неопределенности;
- в условиях конфликтных ситуаций или противодействия (активного противника).

1.5. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Характеризуется однозначной или детерминированной связью между принятым решением и его исходом. Основная трудность – наличие многих критериев, по которым следует сравнивать исходы.

В таких ситуациях возникает задача принятия решения при так называемом “компромиссном критерии”.

Пусть имеется совокупность критериев $F_1(\bar{x}), F_2(\bar{x}), \dots, F_n(\bar{x})$, $\bar{x} \in X$. Пусть для определенности все $F_i(\bar{x}) \rightarrow \max$, тогда можно рассмотреть следующие случаи:

1. Если все критерии измеряются в одной шкале, то обобщенный критерий $F_0(\bar{x})$ можно записать в виде взвешенной суммы критериев

$$F_0(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n w_i F_i(\bar{x}), \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1,$$

где w_i – вес соответствующего критерия. В этом случае необходимо найти

$$\max_{\bar{x} \in X} F_0(\bar{x})$$

Если же критерии измеряются в различных шкалах, то необходимо привести их к одной шкале. Для этого формируют критерий

$$\min_{\bar{x} \in X} F_0(\bar{x}) = \min_{\bar{x} \in X} \sum_{i=1}^n w_i \frac{F_i(\bar{x}_i^*) - F_i(\bar{x})}{|F_i(\bar{x}_i^*)|},$$

где

$$F_i(\bar{x}_i^*) = \max_{\bar{x} \in X} F_i(\bar{x}), \quad F_i(\bar{x}_i^*) \neq 0.$$

Т.е. требуется свести к минимуму взвешенную величину отклонения каждого критерия от его максимального значения.

При таком формировании обобщенного критерия можно добиться высоких показателей по одним критериям за счет ухудшения показателей его другим.

2. Часто требуется, чтобы значения некоторых частных критериев не оказались меньше предельно допустимых значений $F_i(\bar{x}) \geq F_{i\text{дон}}$. Допустим, что по каждому критерию определены значения $F_{i\text{дон}}$, $i = \overline{1, n}$. В таком случае формируемый обобщенный критерий может быть дополнен системой ограничений, и задача принимает следующий вид:

$$\max_{\bar{x} \in X} F_0(\bar{x}) = \max_{\bar{x} \in X} \sum_{i=1}^n w_i F_i(\bar{x}),$$

при

$$F_i(\bar{x}) \geq F_{i\text{дон}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

3. Бывает, что критерии упорядочены по предпочтению $F_1(\bar{x}) \succ F_2(\bar{x}) \succ \dots \succ F_n(\bar{x})$, тогда задача отыскания оптимального решения может быть записана следующим образом:

$$\max_{\bar{x} \in X} F_1(\bar{x})$$

при

$$F_2(\bar{x}) \geq F_{2\text{дон}},$$

...

$$F_n(\bar{x}) \geq F_{n\text{дон}}.$$

4. Бывают ситуации, когда критерии $F_1(\bar{x})$, $F_2(\bar{x})$, ..., $F_n(\bar{x})$ могут принимать только два значения (0 или 1): $F_i(\bar{x}) = 1$, если i -я цель достигнута, $F_i(\bar{x}) = 0$ – в противном случае.

Тогда обобщенный критерий может быть образован логическим объединением отдельных критериев.

а) В виде конъюнкции критериев $F_i(\bar{x})$, если общая цель операции состоит в выполнении всех целей одновременно, т.е.

$$F_0(\bar{x}) = \prod_{i=1}^n F_i(\bar{x}).$$

б) В виде дизъюнкции критериев, когда общая цель достигается, если достигается хотя бы одна частная цель, т.е.

$$F_0(\bar{x}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(\bar{x})).$$

1.6. МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

Очень часто в реальных условиях критерии носят качественный характер и не могут быть выражены в количественной мере. Но решение надо принимать, каким-то образом проранжировав критерии. Это также соответствует принятию решения в условиях определенности. Для принятия решений необходимо установить предпочтения различных критериев (меру полезности) для лица, принимающего решения (Р. Акофф, М. Сасиени).

Применение теории полезности основывается на следующих аксиомах:

1. Результат x_i оказывается предпочтительнее x_j тогда и только тогда, когда $U(x_i) \geq U(x_j)$, где $U(x_i)$ и $U(x_j)$ – полезность результатов x_i и x_j соответственно.

2. *Транзитивность*. Если $x_i \succ x_j$, а $x_j \succ x_k$, то $U(x_i) > U(x_k)$.

3. *Линейность*. Если некоторый результат x представлен в виде

$$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2,$$

то полезность его

$$U(x) = (1 - \alpha)U(x_1) + \alpha U(x_2).$$

3. *Аддитивность*. Если $U(x_1, x_2)$ – полезность от достижения одновременно результатов x_1 и x_2 , то свойство аддитивности означает, что

$$U(x_1, x_2) = U(x_1) + U(x_2).$$

Аналогично, если имеется n результатов $x_1, x_2, \dots, x_n$, то полезность от одновременного достижения результатов

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n U(x_i)$$

Рассмотрим несколько вариантов методики определения полезности в различных случаях. Эта методика основана на допущении, что если “чистая” полезность результата x равна U , а вероятность его получения равна p , то общая полезность результата в такой ситуации равна pU . Иначе говоря, безразлично, какой получается результат: с полезностью pU или с полезностью U при вероятности p .

Это – принципиальное допущение относительно поведения человека, которое при некоторых обстоятельствах может оказаться несправедливым.

Случай I, когда имеется два результата x_1 и x_2 .

1) Определяем, какой результат предпочтительней для лица, принимающего решение. Пусть $x_1 \succ x_2$.

2) Затем определяем такую вероятность α , при которой достижение результата x_1 будет эквивалентно результату x_2 , получаемому с вероятностью 1 (иногда это может быть найдено из условий задачи; иногда может быть найдено на основании оценок экспертов).

3) Оцениваем соотношение между полезностями результатов x_1 и x_2 . Для этого примем полезность $U(x_2) = 1$. Тогда $\alpha U(x_1) = U(x_2)$, и, следовательно, $U(x_1) = 1/\alpha$.

Случай II, когда имеется n возможных результатов $x_1, x_2, \dots, x_n$, между которыми установлено отношение предпочтения $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n$.

1) Определяем величину α_1 из условия

$$\alpha_1 U(x_1) = U(x_2).$$

2) Аналогично определяем α_2 из условия

$$\alpha_2 U(x_2) = U(x_3)$$

и т.д.

$$\alpha_{n-1} U(x_{n-1}) = U(x_n).$$

3) Положив полезность наименее предпочтительного варианта x_n равной 1, находим

$$U(x_n) = 1,$$

$$U(x_{n-1}) = 1/\alpha_{n-1},$$

...

$$U(x_1) = 1/\prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i.$$

Случай III, когда критерии являются качественными и возможны результаты типа “да - нет” с независимыми полезностями.

Предположим, что имеется n возможных результатов $x_1, x_2, \dots, x_n$. Методика определения полезности состоит из следующих этапов.

1) Предложить руководителю (эксперту) упорядочить результаты по предпочтительности. Пусть x_1 – наиболее, а x_n – наименее предпочтительные результаты.

2) Приписать полезности результата x_n значение 1 и предложить руководителю приписать различные числа остальным результатам, определяющим их относительную ценность для него (не сообщать этих чисел ему на последующих шагах).

3) Далее составляют таблицу возможных вариантов выбора (комбинаций результатов), достигаемых одновременно, а затем устанавливают их предпочтительность относительно отдельных результатов $x_1, x_2, \dots, x_n$:

1	x_1 или $x_2 + \dots + x_n$	x_2 или $x_3 + \dots + x_n$	...	x_{n-2} или $x_{n-1} + x_n$
2	x_1 или $x_2 + \dots + x_{n-1}$	x_2 или $x_3 + \dots + x_{n-1}$	...	
3	x_1 или $x_2 + \dots + x_{n-2}$	x_2 или $x_3 + \dots + x_{n-2}$	...	
...			...	
...		x_2 или $x_3 + x_4$		
N	x_1 или $x_2 + x_3$			

Рассматривают приведенные варианты выбора, начиная с верхней строки левого столбца. Если левая часть первого варианта выбора предпочтительнее или эквивалентна правой части, то переходят к верхней строке правого столбца (следующего). В противном случае продолжают просмотр столбца.

Проверяют числа, полученные на шаге 2, и определяют, удовлетворяют ли они неравенствам, полученным (принятым) на шаге 3. Если обнаруживается несоответствие, то следует в минимально возможной степени изменить числовые оценки так, чтобы они удовлетворяли числовым неравенствам.

Пример. Пусть эксперт упорядочивает 5 результатов $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n$, приписав им следующие оценки $U_0(x_1) = 7$, $U_0(x_2) = 4$, $U_0(x_3) = 2$, $U_0(x_4) = 1.5$, $U_0(x_5) = 1$.

Рассмотрев возможные варианты выбора, он высказал следующее суждение относительно ценности тех или иных комбинаций результатов:

- 1) $x_1 \prec x_2 + x_3 + x_4 + x_5$; 5) $x_2 \prec x_3 + x_4 + x_5$; 7) $x_3 \succ x_4 + x_5$
- 2) $x_1 \prec x_2 + x_3 + x_4$; 6) $x_2 \succ x_3 + x_4$;
- 3) $x_1 \prec x_2 + x_3 + x_5$;

$$4) x_1 \succ x_2 + x_3;$$

Необходимо произвести оценку полезности результатов так, чтобы удовлетворить всем неравенствам, начиная с самого последнего.

Подставляем начальные оценки в неравенство 7):

$$U_0(x_3) = 2 \not\geq U_0(x_4) + U_0(x_5) = 2.5$$

т.е. 7) не выполняется.

Тогда изменяем полезность результата x_3 :

$$U_1(x_3) = 3,$$

тогда 7) будет выполняться. После этого проверяем неравенство 6):

$$U_0(x_2) = 4 \not\geq U_1(x_3) + U_0(x_4) = 3 + 1.5 = 4.5.$$

Это неравенство также не выполняется. Примем $U_1(x_2) = 5$.

Проверяем неравенство 5):

$$U_1(x_2) = 5 < U_1(x_3) + U_0(x_4) + U_0(x_5) = 3 + 1.5 + 1 = 5.5,$$

неравенство выполняется.

Проверяем неравенство 4):

$$U_0(x_1) = 7 \not\geq U_0(x_2) + U_1(x_3) = 5 + 3 = 8.$$

Примем $U_1(x_1) = 8.5$. Проверяем неравенство 3):

$$U_1(x_2) = 8.5 < U_1(x_2) + U_1(x_3) + U_0(x_5) = 5 + 3 + 1 = 9.$$

Проверяем неравенство 2):

$$8.5 = U_1(x_1) < 5 + 3 + 1.5 = 9.5$$

Проверяем неравенство 1): $8.5 < 5 + 3 + 1.5 + 1 = 10.5$.

Окончательные оценки полезностей:

$$U_1(x_1) = 8.5, U_1(x_2) = 5, U_1(x_3) = 3, U_1(x_4) = 1.5, U_1(x_5) = 1.$$

Ясно, что такая методика становится практически нереализуемой при увеличении числа результатов.

Для такой ситуации её авторами предложена следующая модификация методики. Множество результатов разбивают на подмножества, состоящие из 5-7 результатов и имеющие *один общий* результат, например x_1 . Затем приписывают начальные значения полезностям всех результатов, причем полезность общего результата x_1 одинакова во всех подмножествах. Далее применяют изложенный способ коррекции оценок полезности независимо в каждом из подмножеств с ограничением $U(x_1) = const$. В

результате получают систему полезностей с единой мерой $U(x_i)$ для всех подмножеств.

1.7. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Такая задача возникает в том случае, когда с каждой принимаемой стратегией x_i связано целое множество различных результатов $O_1, O_2, \dots, O_m$ с известными вероятностями $P(O_j|x_i)$.

Формально модель задачи может быть представлена в виде следующей матрицы:

$x_i \backslash O_j$	O_1	O_2		O_m
x_1	L_{11}	L_{12}		L_{1m}
x_2	L_{21}	L_{22}		L_{2m}
.....				
x_n	L_{n1}	L_{n2}		L_{nm}

где $L_{ij} = U(O_j, x_i)$ – полезность результата O_j при использовании решения x_i .

Пусть заданы условные вероятности $P(O_j|x_i)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Вводят ожидаемую полезность для каждой стратегии

$$E[U(x_i)] = \sum_{j=1}^m U(O_j, x_i) P(O_j|x_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Решающее правило для определения оптимальной стратегии задаётся следующим образом: следует выбрать ту стратегию, которая дает максимальную ожидаемую полезность, т.е.

$$\max_{x_i} E[U(x_i)] = \max_{i=\overline{1, n}} E[U(x_i)].$$

1.8. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Одним из определяющих факторов в таких задачах является внешняя среда или природа, которая может находиться в одном из состояний $S_1, S_2, \dots, S_k$, которые неизвестны лицу (наблюдателю) принимающему решения.

Тогда математическую модель задачи в условиях неопределенности можно сформулировать следующим образом.

Имеется некоторая матрица L размерности $m \times n$ с элементами, рассматриваемыми как полезность результата O_j при использовании стратегии x_i

$$L_{ij} = U(O_j, x_i), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

В зависимости от состояния среды результат O_j достигается с вероятностью $P(O_j | x_i, S_k)$.

$x_i \backslash O_j$	O_1	O_2		O_m
x_1	L_{11}	L_{12}		L_{1m}
x_2	L_{21}	L_{22}		L_{2m}
.....				
x_n	L_{n1}	L_{n2}		L_{nm}

Кроме того, наблюдателю неизвестно распределение вероятностей $P(S_k)$. Относительно состояния среды наблюдатель может высказать только определенные гипотезы. Его предположения о вероятном состоянии среды называются субъективными вероятностями $\overline{P}(S_k)$, $k = \overline{1, K}$.

Если бы величины $P(S_k)$ были известны наблюдателю, то мы бы имели задачу принятия решений в условиях риска, и в этом случае решающее правило для определения стратегии определялось бы следующим образом:

$$\begin{aligned} \max_{x_i} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^k U(O_j, x_i) P(O_j | x_i, S_k) P(S_k) &= \max_{x_i} \sum_{j=1}^m U(O_j, x_i) P(O_j | x_i) = \\ &= \max_{x_i} E[U(x_i)]. \end{aligned} \quad (1)$$

На самом же деле состояния среды неизвестны и неизвестно также распределение вероятностей $P(S_k)$.

Как поступить в данном случае? Существует несколько критериев для выбора оптимальной стратегии.

Критерий Вальда. Или критерий осторожного наблюдателя. Этот критерий оптимизирует полезность в предположении, что среда находится в самом невыгодном для наблюдателя состоянии. По данному критерию решающее правило имеет следующий вид:

$$\max_{x_i} \cdot \min_{S_k} U(x_i, S_k), \quad (2)$$

где

$$U(x_i, S_k) = \sum_{j=1}^m U(0_j, x_i) P(0_j | x_i, S_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, K}.$$

По критерию Вальда выбирают стратегию, которая дает гарантированный выигрыш при наихудшем варианте состояния среды.

Критерий Гурвица. Основан на следующих двух предположениях: среда может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $1 - \alpha$ и в самом выгодном с вероятностью α , где α – коэффициент доверия.

Тогда решающее правило записывается следующим образом:

$$\max_{x_i} [\alpha \max_{s_k} U(x_i, s_k) + (1 - \alpha) \min_{s_k} U(x_i, s_k)], \quad (3)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1.$$

Если $\alpha = 0$, то получаем критерий Вальда. Если $\alpha = 1$, то приходим к решающему правилу вида

$$\max_{x_i} \max_{s_k} U(x_i, s_k). \quad (4)$$

Это, так называемая, стратегия “здорового оптимиста”, который верит в свою удачу.

Критерий Лапласа. Если никакой информации о вероятностях состояний среды нет, то все состояния среды считаются равновероятными:

$$P(s_1) = P(s_2) = \dots = P(s_K).$$

В результате решающее правило определяется соотношением (1):

$$\begin{aligned} \max_{x_i} E[U(x_i)] &= \max_{x_i} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^K U(0_j, x_i) P(0_j | x_i, S_k) P(S_k) = \\ &= \max_{x_i} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^K U(0_j, x_i) P(0_j | x_i, S_k), \end{aligned} \quad (5)$$

при условии $P(S_k) = 1/K$.

Критерий Сэвиджа. Или критерий минимизации “сожалений”. “Сожаление” – это величина, равная изменению полезности результата при данном состоянии среды относительно возможного наилучшего состояния.

Чтобы определить “сожаление” поступают следующим образом. Строят матрицу

$$\mathbf{U} = \|u_{ik}\|,$$

где

$$u_{ik} = U(x_i, S_k) = \sum_{j=1}^m u(x_i, O_j) P(O_j | x_i, S_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, K}.$$

В каждом столбце этой матрицы находят максимальный элемент $u_k = \max_i u_{ik}$, который вычитают из всех элементов этого столбца. Далее строим матрицу сожалений

$$\mathbf{U}_c = \|u_{ik} - u_k\| = \|u_{ik}^c\|.$$

Искомую стратегию x_i , которая минимизирует “сожаление”, определяют из условия

$$\min_{x_i} \max_{S_k} u_{ik}^c. \quad (6)$$

Этот критерий минимизирует возможные потери при условии, что состояние среды наихудшем образом отличается от предполагаемого.

Рассмотрим **частный случай** задачи в условиях неопределенности, когда каждому возможному состоянию среды соответствует один возможный исход:

$$P(O_j | S_k) = \delta_{jk}, \quad \text{где } \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

То есть, в данном случае математическая модель задачи принятия решения определяется множеством стратегий $\{x_i\}$, множеством состояний среды $\{S_k\}$ и матрицей полезностей

$x_i \setminus S_j$	S_1	S_2	...	S_k
x_1	L_{11}	L_{12}	...	L_{1k}
x_2	L_{21}	L_{22}	...	L_{2k}
...	...	...	...	...
x_n	L_{n1}	L_{n2}	...	L_{nk}

где $L_{ij} = U(x_i, S_j)$. Множество $\{P(S_j)\}$ предполагается неизвестным.

В этом случае рассмотренные выше критерии для выбора оптимальной стратегии принимают следующий вид.

Критерий Вальда:

$$\max_{x_i} \min_{S_k} U(x_i, S_k).$$

Критерий Гурвица:

$$\max_{x_i} [\alpha \max_{S_k} U(x_i, S_k) + (1 - \alpha) \min_{S_k} U(x_i, S_k)].$$

Критерий Лапласа:

$$\max_{x_i} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K U(x_i, S_k).$$

Критерий Сэвиджа:

$$\min_{x_i} \max_{S_k} U_c(x_i, S_k),$$

где

$$U_c(x_i, S_k) = U(x_i, S_k) - \max_i U(x_i, S_k).$$

Рассмотрим пример использования данных критериев в условиях определенности.

Пример. Некоторая фирма решает построить отель в одном из курортных мест. Необходимо определить наиболее целесообразное количество мест или комнат в этой гостинице.

Составляют смету расходов по строительству гостиницы с различным количеством комнат, а также рассчитывают ожидаемый доход в зависимости от количества комнат, которые будут сняты.

В зависимости от принятого решения – количество комнат в гостинице

$$x_i = 20, 30, 40, 50$$

и количества снятых комнат

$$S_k = 0, 10, 20, 30, 40, 50,$$

которое зависит от множества случайных факторов и неизвестно фирме. Получают следующую таблицу ежегодных прибылей (в условных единицах):

Таблица 1.

$x_i \setminus S_j$	0	10	20	30	40	50
20	-121	62	245	245	245	245
30	-168	14	198	380	380	380
40	-216	-33	150	332	515	515
50	-264	-81	101	284	468	650

Наиболее подходящее количество комнат в гостинице определим по рассмотренным критериям.

Критерий Вальда:

$$\max_{x_i} \min_{S_k} U(x_i, S_k) = \max_i \min_k L_{ik} = -121,$$

$$\max_i \min_k L_{ik} = -121, \quad x_{ОПТ} = 20.$$

Судя по результату, критерий Вальда неприменим, так как в этом случае от постройки гостиницы следует отказаться.

Критерий Лапласа:

$$\max_{x_i} \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 L_{ik} = \max_{x_i} \bar{L}_i = \max\{153, 198, 210, 193\} = 210,$$

где $\bar{L}_i$ - среднее арифметическое по каждой строке таблицы.

$$x_{ОПТ} = 40.$$

Критерий Гурвица:

$$\max_{x_i} [\alpha \cdot \max_k U(x_i, S_k) + (1 - \alpha) \cdot \min_k U(x_i, S_k)].$$

Для разных α можно построить таблицу доходов по критерию Гурвица $\mathbf{H} = \|h_{i,\alpha}\|$, где

$$h_{i,\alpha} = [\alpha \cdot \max_k L_{ik} + (1 - \alpha) \cdot \min_k L_{ik}].$$

Например, для $i = 1$

$$\max_k L_{1k} = 245, \quad \min_k L_{1k} = -121,$$

и при $\alpha = 0.1$

$$h_{1,0.1} = (0.1 \cdot 245 + 0.9 \cdot (-121)) = -84.4 \approx -84.$$

В совокупности получим:

$x_i \setminus \alpha$	0.1	0.2	0.5	0.9
20	-84	-47	63	206
30	-114	-59	108	325
40	-143	-70	150	442
50	-172	-81	193	560

Тогда оптимальное количество комнат в гостинице в зависимости от α :

α	0.1	0.2	0.5	0.9
$x_{ОПТ}$	20	20	50	50

Таким образом, будет выбрано 20 комнат, если заказчик пессимист, и 50 комнат, если оптимист.

Критерий Сэвиджа:

Опираясь на таблицу 1,

$x_i \setminus S_j$	0	10	20	30	40	50

20	-121	62	245	245	245	245
30	-168	14	198	380	380	380
40	-216	-33	150	332	515	515
50	-264	-81	101	284	468	650

строят матрицу сожалений:

$x_i \setminus S_j$	0	10	20	30	40	50
20	0	0	0	-135	-270	-405
30	-47	-48	-47	0	-135	-275
40	-95	-95	-95	-48	0	-135
50	-145	-143	-144	-96	-47	0

$$\max_{x_i} \min_{S_k} U_c(x_i, S_k) = \max\{-405, -275, -135, -145\} = -135,$$

таким образом, $x_{\text{ОПТ}} = 40$.

Какое из решений предпочтительнее, определяется выбором критерия.

Выбор критерия принятия решения является наиболее сложным и ответственным этапом в исследовании операций. При этом не существует каких-либо общих рекомендаций или советов. Выбор критерия должен производить заказчик на самом высоком уровне и в максимальной степени согласовывать этот выбор с конкретной спецификой задачи, а также со своими целями.

В частности, если даже минимальный риск недопустим, то следует применять критерий Вальда. Если наоборот, определенный риск вполне приемлем и заказчик намерен вложить в некоторое предприятие столько средств, чтобы потом не сожалеть, что вложил слишком мало, то выбирают критерий Сэвиджа.

При отсутствии достаточной информации для выбора того или иного критерия возможен альтернативный подход, который может быть связан с вычислением шансов на успех или неуспех на основе прошлого опыта.

1.9. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЙ ИЛИ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

В отличие от задач принятия решений в условиях определенности, риска и неопределенности, в которых внешняя среда (природа) предполагалась пассивной, *конфликтные ситуации* предполагают наличие, по крайней мере, *двух противодействующих сторон, интересы которых противоположны*.

Упрощенная математическая модель конфликтных ситуаций представляет собой игру.

Игра может быть определена следующим образом:

- Имеются n конфликтных сторон (лиц), принимающих решения, интересы которых не совпадают.
- Заданы правила, определяющие выбор допустимых стратегий и известные игрокам.
- Существует точно определенный набор конечных состояний, которыми заканчивается игра (например, выигрыш, ничья, проигрыш).
- Заранее определены и известны всем игрокам платежи, соответствующие каждому возможному конечному состоянию. Обычно они заданы в виде некоторой матрицы $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$.

Практические задачи, в которых встречаются игровые аспекты, чрезвычайно разнообразны.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

2.1. ВВЕДЕНИЕ

Теория игр есть теория моделей принятия решений, она не занимается этими решениями как психологическими, волевыми актами. Не занимается она и вопросами их практической реализации. В рамках теории игр принимаемые решения выступают как достаточно упрощенные и идеализированные схемы реальных явлений.

Наши представления об играх связаны с карточными или “салонными” играми, шахматами, шашками.

Такие игры начинаются *из некоторого данного положения* и состоят из последовательности *личных ходов*, при каждом из которых один из игроков совершает выбор среди нескольких возможностей. Некоторые ходы могут, кроме того, быть *случайными*. В шахматах, например, характер ходов определяется, в основном, искусством, а в рулетке – случайностью.

В шахматной игре каждый игрок знает любой ход, который был сделан до этого момента, а в бридже – это знание у игрока обычно весьма неполно. На практике это означает, что в момент хода игрок не знает точной позиции и должен делать ход с учетом того, что имеется несколько возможных позиций.

В конце игры игроки получают какой-либо *выигрыш*, который зависит от протекания игры и окончательной позиции. Это примеры *позиционных* игр.

Таким образом, наше представление об игре определяется наличием 3-х элементов:

- 1) Чередованием ходов, которые могут быть как личными, так и случайными.
- 2) Возможной недостаточностью информации.
- 3) Наличием функции выигрыша.

С позиционной игрой связывают понятие топологического дерева или дерева игры, представляющего собой конечную совокупность узлов, называемых вершинами, соединенных ребрами, притом так, что получается связанная фигура, не содержащая простых замкнутых фигур.

Определение. Под позиционной игрой n лиц понимают следующее:

1. Топологическое дерево Γ с выделенной вершиной A , называемой начальной позицией игры.
2. Функция выигрыша, которая ставит в соответствие каждый окончательной позиции дерева некоторый n -мерный вектор (для n игроков).
3. Разбиение множества всех неокончательных позиций (т.е. неокончательных вершин) дерева Γ на $n+1$ множество $S_0, S_1, \dots, S_n$, которые называют множествами очередности. Множество S_0 соответствует

- началу (может быть связано со случайностью), S_1 – множество очередности для 1-го игрока (1-ый уровень от A - см. рис. 2.1), и т.д.
4. Вероятное распределение для каждой позиции из S_0 на множестве непосредственно следующих за ней позиций (т.е. из каждой позиции S_0 следуют варианты позиций с некоторой вероятностью).
 5. Подразбиение множества S_i для каждого $i = \overline{1, n}$ на подмножества S_i^j , называемые *информационными множествами*; при этом позиции из одного и того же информационного множества имеют одинаковое число непосредственно следующих за ними позиций, т.е., альтернатив, и никакая позиция не может следовать за другой позицией из того же самого информационного множества.
 6. Для каждого информационного множества S_i^j задано множество индексов I_i^j , взаимно однозначно отображающее множество альтернатив (возможных ходов) для каждой позиции из S_i^j .

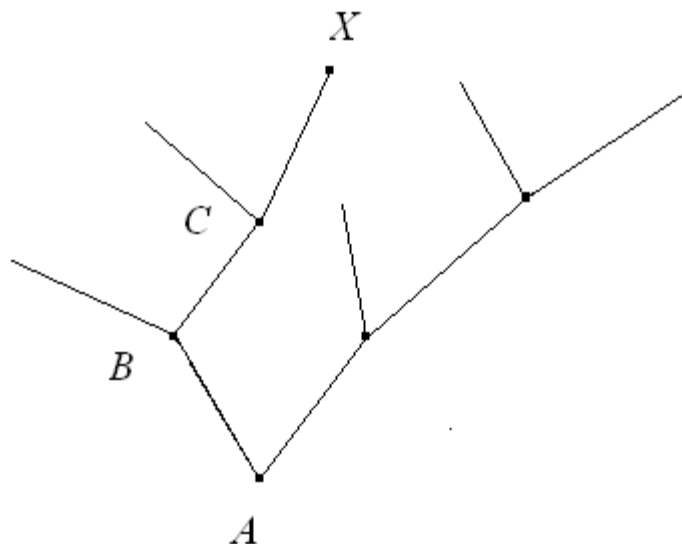


Рис. 2.1. Дерево игры: A – начальная вершина (позиция), B, C – промежуточные вершины (позиции), X – окончательная

В этом определении перечислены все элементы игры. Условие (1) устанавливает, что имеется начальная позиция. Условие (2) задает функцию выигрыша. Условие (3) разделяет множество неокончательных позиций на позиции с ходом случая (S_0) и личные позиции, соответствующие каждому из n игроков ($S_1, \dots, S_n$). Из позиции множества S_i очередь хода принадлежит игроку i . Условие (4) задает схему рандомизации в каждой позиции случая. Условие (5) разбивает позиции каждого игрока на *информационные множества* (игрок знает лишь, в каком информационном множестве он находится, но не знает, в какой именно позиции этого множества).

Поясним понятие информационного множества. Когда игрок выбирает свой ход, он может не знать, в какой позиции игры он находится, так как не знает какой ход или ходы были сделаны раньше. Все такие неразличимые для него позиции объединяются в одно информационное множество. В некотором смысле для игрока это одна и та же позиция, хотя реально они различаются, и дальнейшая эволюция игры зависит от той конкретной позиции, в которой он находится. Но если игрок не может различать позиции, относящиеся к одному информационному множеству, то и возможные ходы в этих позициях должны быть в определенном смысле одинаковыми. Множество индексов I_i^j как раз определяет возможные ходы.

Такая форма задания игры называется *развернутой формой*.

Пример 2.1. *Игра в Орлянку.* 1-ый игрок выбирает “решку” – “р” или орла – “о”. Игрок 2, не зная выбора игрока 1, также выбирает “р” или “о”. Если оба противника совершают одинаковый выбор, то игрок 2 выигрывает у 1-го игрока “очко”, в противном случае игрок 1 выигрывает очко у игрока 2.

На рисунке 2.2 приведено дерево игры. Векторы при окончательных позициях представляют функцию выигрыша, римские I, II при остальных позициях означают игрока, которому принадлежит очередь хода в этой позиции. Затененная область охватывает позиции из одного информационного множества.

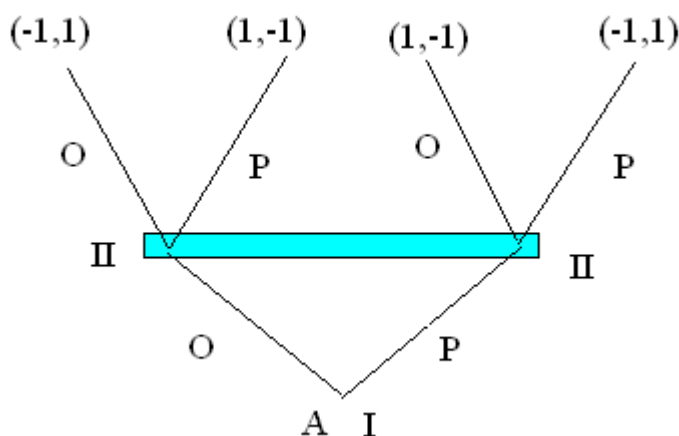


Рис. 2.2. Дерево игры в Орлянку

Определение. Игра называется парной, если количество сторон (игроков) равно 2.

Определение. Игра называется игрой с нулевой суммой, если проигрыш одного игрока равен выигрышу другого. В противном случае она называется игрой с ненулевой суммой.

Определение. Игра называется игрой с полной информацией, если результаты случайных ходов и предыдущих личных ходов полностью известны каждому игроку.

В соответствии с определением развернутой формы игры это может быть сформулировано следующим образом:

Говорят, что i -й игрок имеет полную информацию в игре Γ или, что игра Γ есть игра с полной информацией для этого игрока, если каждое его информационное множество S_i^j состоит из одного элемента.

Например, шахматы, шашки – это игры с полной информацией, а карты – с неполной.

2.2. СТРАТЕГИИ. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ИГРЫ

В интуитивном понимании стратегия есть некоторый план развертывания игры. Можно считать, что игрок говорит себе: “Если случится то-то и то-то, то я буду действовать так-то и так-то”.

Определение. Стратегия i -го игрока есть некоторая функция, которая ставит в соответствие каждому информационному множеству S_i^j этого игрока некоторый индекс из I_i^j .

Будем обозначать множество всех стратегий i -го игрока через Σ_i .

Вообще говоря, игрок принимает решение о своем ходе в игре обычно в тот момент, когда надо делать этот ход. Однако с чисто теоретической точки зрения можно абстрагироваться от такого практического ограничения и предполагать, что уже до начала игры каждый игрок решил, что он будет делать в каждом случае. Т.е. предполагаем, что каждый игрок выбрал некоторую стратегию уже до начала игры.

Поскольку это так, то остается лишь произвести случайные ходы. Более того, все случайные ходы можно объединить в один ход, результат которого вместе с выбранными стратегиями определяет исход игры.

Нас, как и игроков, интересует, какие из стратегий являются наилучшими с точки зрения максимизации доли каждого игрока в выигрыше: i -й игрок стремится максимизировать i -ю компоненту функции выигрыша.

Так как результаты случайных ходов известны только в вероятностном смысле, то естественно рассматривать математическое ожидание функции выигрыша, определенное в случае, когда игроки используют данный n -набор стратегий, т.е. данную *ситуацию*. Поэтому для описания математического ожидания функции выигрыша при условии, что i -й игрок применяет стратегию $x_i \in \Sigma_i$, можно использовать следующее обозначение:

$$\pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\pi_1(x_1, \dots, x_n), \pi_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \pi_n(x_1, \dots, x_n))$$

Функцию $\pi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на множестве всех возможных значений $x_1, \dots, x_n$ можно выразить либо в форме соотношения, либо в виде n -мерной таблицы n -мерных векторов. В случае $n=2$ эта запись сводится к матрице,

элементами которой являются пары вещественных чисел. Такая n -мерная таблица называется *нормальной формой игры*.

Пример 2.2. Для игры в “Орлянку” нормальной формой игры является матрица

	“Р”	“О”
“Р”	(-1, 1)	(1, -1)
“О”	(1, -1)	(-1, 1)

Здесь каждая строка соответствует стратегии игрока **1**, а столбец – стратегии игрока **2**.

Пример 2.3. Рассмотрим следующую игру. Случайно выбирается целое число z с возможными значениями 1, 2, 3, 4, каждое с вероятностью $1/4$. Игрок **I**, не зная результата этого хода, выбирает целое число x . Игрок **II**, не зная ни z , ни x , выбирает целое число y .

Выигрыш определяется следующим образом:

$$(|y - z| - |x - z|, |x - z| - |y - z|),$$

т.е. целью является выбор числа, по наиболее близкого к z .

В этой игре каждый игрок имеет 4 стратегии: 1, 2, 3, 4, так как от других чисел мало проку. Если игрок **I** выбирает 1, а игрок **II** – 3, то выигрыш будет равен (2, -2) с вероятностью $1/4$, (0,0) - с вероятностью $1/4$ и (-2, 2) с вероятностью $1/2$. Ожидаемый выигрыш тогда равен:

$$\pi(1,3) = \frac{1}{4}(2,-2) + \frac{1}{4}(0,0) + \frac{1}{4}(-2,2) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Подсчитав все значения, получим таблицу:

	1	2	3	4
1	(0, 0)	(-1/2, 1/2)	(-1/2, 1/2)	(0, 0)
2	(1/2, -1/2)	(0, 0)	(0, 0)	(1/2, -1/2)
3	(1/2, -1/2)	(0, 0)	(0, 0)	(1/2, -1/2)
4	(0, 0)	(-1/2, 1/2)	(-1/2, 1/2)	(0, 0)

Определение. Игра называется конечной, если число стратегий всех игроков является конечным. *Или.* Игра называется конечной, если ее дерево содержит только конечное число вершин.

2.3. СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ

Определение. Пусть дана игра G . Говорят, что ситуация (т.е. какой-нибудь n -набор стратегий) $(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$ *равновесна*, или, что она является

ситуацией равновесия, если для любого $i = \overline{1, n}$ и для любого $x_i \in \Sigma_i$ имеет место неравенство

$$\pi_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \leq \pi_i(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*).$$

Другими словами – ситуация равновесна, если не один игрок не имеет никаких разумных оснований для изменения своей стратегии при условии, что все остальные игроки собираются придерживаться своих стратегий. В этом случае, если каждый игрок знает, как будут играть остальные, он имеет основания придерживаться той стратегии, которая соответствует этой ситуации равновесия. Тем самым игра становится весьма устойчивой.

Пример 2.4. Для игры в нормальной форме

	β_1	β_2
α_1	(2,1)	(0,0)
α_2	(0,0)	(1,2)

как (α_1, β_1) , так и (α_2, β_2) являются ситуациями равновесия.

К сожалению, не каждая игра обладает ситуациями равновесия. Например, игра в “Орлянку” такой ситуации не имеет.

	“Р”	“О”
“Р”	(-1, 1)	(1, -1)
“О”	(1, -1)	(-1, 1)

Вообще говоря, если игра не имеет ситуаций равновесия, то обычно некоторые игроки пытаются отгадать стратегии остальных игроков, сохраняя собственные стратегии в тайне. Это наводит на мысль, что *в играх с полной информацией ситуации равновесия существуют* (в конечных играх).

Действительно, справедлива следующая теорема:

Теорема: Любая конечная игра n лиц с полной информацией имеет ситуацию равновесия.

2.4. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ. ИГРЫ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Определение. Игра называется игрой с нулевой суммой, если в каждой окончательной позиции функция выигрыша $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, где p_i – выигрыш i -го игрока в этой позиции, удовлетворяет условию:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 0. \quad (1)$$

Вообще говоря, игра с нулевой суммой представляет собой замкнутую систему: все то, что кто-нибудь выиграл, должно быть кем-то проиграно.

Игры двух лиц с нулевой суммой называются *антагонистическими*, или *строго конкурентными*.

В случаях антагонистической игры можно просто задавать первую компоненту вектора выигрышей, тогда вторая компонента равна первой с противоположным знаком. Т.е. первая компонента называется просто *выигрышем*, это означает, что второй игрок отдает эту сумму первому.

В антагонистических играх нет никаких оснований для переговоров между игроками, так как если один выигрывает, то другой проигрывает. Этим антагонистические игры отличаются от всех остальных.

Теорема: Пусть (σ_1, σ_2) и (τ_1, τ_2) – две ситуации равновесия антагонистической игры. Тогда

- 1) (σ_1, τ_2) и (τ_1, σ_2) также являются ситуациями равновесия и
- 2) $\pi(\sigma_1, \sigma_2) = \pi(\tau_1, \tau_2) = \pi(\tau_1, \sigma_2) = \pi(\sigma_1, \tau_2)$. (2)

Доказательство. Ситуация (σ_1, σ_2) равновесна. Следовательно $\pi(\sigma_1, \sigma_2) \geq \pi(\tau_1, \sigma_2)$. Т.е. выбор любой другой стратегии первым игроком, при условии, что второй сохранит стратегию σ_2 , приводит к худшему результату.

С другой стороны, ситуация (τ_1, τ_2) также равновесна. Поэтому $\pi(\tau_1, \sigma_2) \geq \pi(\tau_1, \tau_2)$. Т.е., так как ситуация равновесна, то выбранная вторым игроком стратегия σ_2 увеличивает его проигрыш (следовательно увеличивается выигрыш первого). Таким образом

$$\pi(\sigma_1, \sigma_2) \geq \pi(\tau_1, \sigma_2) \geq \pi(\tau_1, \tau_2).$$

Но, аналогично получится, если отправиться от ситуации (τ_1, τ_2) :

$$\pi(\tau_1, \tau_2) \geq \pi(\sigma_1, \tau_2) \geq \pi(\sigma_1, \sigma_2).$$

Из этих двух систем неравенств следует справедливость утверждения (2).

Далее, для любого $\hat{\sigma}_1$

$$\pi(\hat{\sigma}_1, \sigma_2) \leq \pi(\sigma_1, \sigma_2) = \pi(\tau_1, \sigma_2)$$

и для любого $\hat{\sigma}_2$

$$\pi(\tau_1, \hat{\sigma}_2) \geq \pi(\tau_1, \tau_2) = \pi(\tau_1, \sigma_2).$$

Следовательно, (τ_1, σ_2) является ситуацией равновесия. Аналогично, равновесна и ситуация (σ_1, τ_2) .

Эта теорема не имеет места для других игр (т.е., только для антагонистических игр с нулевой суммой).

2.5. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Нормальная форма конечной антагонистической игры сводится к некоторой матрице $\mathbf{A}$ с числом строк, равным числу стратегий игрока 1 и с числом столбцов, равным числу стратегий игрока 2:

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{m \times n},$$

где a_{ij} – величина выигрыша, если 1-й игрок выбирает стратегию i , а 2-й – стратегию j , m – число стратегий первого игрока, n – второго игрока.

Ситуация (пара стратегий) будет равновесной тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент a_{ij} является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке. Такая ситуация, если она существует, называется *седловой точкой*.

Пример 2.5. Матрица игры с седловой точкой:
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Пример 2.6. Матрица игры $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ – не имеет седловой точки.

Величина a_{ij} представляет собой выигрыш 1-го игрока при его i -й стратегии, если 2-й игрок придерживается своей j -й стратегии.

1-й игрок стремится максимизировать a_{ij} , а 2-й – минимизировать. Ни один из игроков не знает заранее стратегии противника. А это имеет большое значение для выбора собственной стратегии.

Если матрица игры имеет седловую точку, то очевидно, что 1-й игрок будет использовать эту стратегию, даже, если 2-й игрок её узнает. Иллюстрацией может служить пример *.

То есть, если игра с седловой точкой, то её нахождение уже есть решение игры, так как 1-й если игрок выберет эту стратегию, то неважно, знает ли это 2-й игрок.

2.6. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

Предположим, что мы играем в игру без седловой точки. Например, игра с матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что мы – 1-й игрок. А второй игрок всегда угадывает нашу стратегию.

В этой ситуации мы можем гарантировать *нижний выигрыш*

$$v_1' = \max_i \{ \min_j a_{ij} \}.$$

Поставим себя на место 2-го игрока, тогда в такой же ситуации (1-й всегда угадывает нашу стратегию) *верхний проигрыш* определится величиной

$$v_2' = \min_j \{ \max_i a_{ij} \}.$$

Таким образом, для матричных игр мы имеем понятия нижнего выигрыша и верхнего проигрыша. Легко доказывается, что $v_1' \leq v_2'$.

Если имеет место равенство, то получаем седловую точку. Если равенство не имеет места, то получаем игру без седловой точки. Для такой игры не определено, что же в действительности произойдет. Можно ли утверждать, что (при разумном поведении) первый игрок не должен выиграть меньше, чем v_1' , а второй не должен проиграть больше, чем v_2' ?

Если в игре без седловой точки, мы раскроем противнику свою стратегию, то максимум, на что можем рассчитывать, это v_1' – нижний выигрыш, если поставим себя на место 1-го игрока, или v_2' – верхний проигрыш, если – на место 2-го игрока.

Если же мы стремимся добиться большего, то нельзя раскрывать свои стратегии. Это трудно осуществить, т.к. если мы выбираем свою стратегию на основании каких-то рассуждений, то ничто не мешает противнику воспроизвести наши рассуждения.

Отсюда напрашивается вывод, стратегия должна (может) выбираться случайно (с использованием элементов случайности), не на основании каких-то разумных соображений. Но сама схема рандомизации (ввода случайности) должна выбираться разумно. В этом и состоит идея использования смешанных стратегий.

Определение. Смешанная стратегия игрока есть вероятностное распределение на множестве его чистых стратегий.

В случае, когда игрок имеет только конечное число m чистых стратегий, смешанная стратегия представляет собой m -мерный вектор $x = (x_1, \dots, x_m)$, удовлетворяющий условиям:

$$x_i \geq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1. \tag{2}$$

Обозначим множество всех смешанных стратегий игрока 1 через X , а множество всех смешанных стратегий игрока 2 – через Y .

Предполагаем, что игроки участвуют в игре с матрицей A . Если 1-й игрок выбирает смешанную стратегию x , а 2-й – y , то ожидаемый выигрыш будет равен

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j. \quad (3)$$

Или в матричных обозначениях

$$A(x, y) = xAy^T. \quad (4)$$

Как и прежде, игрок **1** должен опасаться того, что игрок **2** раскроет его выбор стратегии. Если бы это случилось, то игрок **2** выбрал бы y так, чтобы минимизировать $A(x, y)$, т.е. нижний выигрыш игрока **1**, при условии, что он выберет стратегию x

$$v(x) = \min_{y \in Y} xAy^T. \quad (5)$$

Величину xAy^T можно рассматривать как взвешенное среднее ожидаемых выигрышей для игрока **1**, когда он использует x против чистых стратегий игрока **2**. Таким образом, этот минимум будет достигаться на некоторой чистой стратегии j :

$$v(x) = \min_j xA^j \quad (6)$$

где A^j – j -й столбец матрицы A .

Поэтому игрок **1** должен выбрать x так, чтобы максимизировать $v(x)$, т.е. что бы получить

$$v_1 = \max_{x \in X} \min_j xA^j. \quad (7)$$

Такая стратегия x называется максиминной стратегией игрока **1**.

Аналогично, если игрок **2** выбирает стратегию y , он будет иметь ожидаемый верхний проигрыш.

$$v(y) = \max_i A_i y^T, \quad (8)$$

где A_i – i -я строка матрицы A , и должен выбрать y так, что бы иметь

$$v_2 = \min_{y \in Y} \max_i A_i y^T \quad (9)$$

Такая стратегия y называется минимаксной стратегией игрока **2**. Числа v_1 и v_2 называются значениями игры для игроков **1** и **2** соответственно.

2.7. ТЕОРЕМА О МИНИМАКСЕ

Для любой функции $F(x, y)$, определенной на произвольном декартовом произведении $X \times Y$, имеет место неравенство

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) \quad (1)$$

Отсюда следует, что $v_1 \leq v_2$.

Нижний выигрыш игрока **1** не может превышать верхнего проигрыша игрока **2**.

Теорема о минимаксе утверждает, что $v_1 = v_2$.

Эта важнейшая теорема доказана многими способами. Используем доказательство фон Неймана и Моргенштерна. Для доказательства теоремы рассмотрим сначала две леммы.

Лемма1. (Теорема об опорной гиперплоскости) Пусть B – замкнутое выпуклое множество в n -мерном евклидовом пространстве, а $x = (x_1, \dots, x_n)$ – некоторая точка, не принадлежащая B . Тогда существуют такие числа $p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$, что

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = p_{n+1} \quad (2)$$

и

$$\sum_{i=1}^n p_i y_i > p_{n+1}, \quad \forall y \in B. \quad (3)$$

Геометрически это означает, что через точку x можно провести гиперплоскость так, что B будет лежать целиком «выше» этой гиперплоскости.

Доказательство. Пусть z – такая точка из B , расстояние которой от x минимально (такая точка существует, т.к. B замкнуто). Положим

$$p_i = z_i - x_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$p_{n+1} = \sum_{i=1}^n z_i x_i - \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Очевидно, что равенство (2) выполняется, поскольку

$$\sum_{i=1}^n (z_i - x_i) x_i = \sum_{i=1}^n z_i x_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 = p_{n+1}.$$

Необходимо показать, что имеет место (3). Мы имеем

$$\sum_{i=1}^n p_i z_i = \sum_{i=1}^n z_i^2 - \sum_{i=1}^n z_i x_i$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^n p_i z_i - p_{n+1} = \sum_{i=1}^n z_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n z_i x_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (z_i - x_i)^2 > 0.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^n p_i z_i > p_{n+1}.$$

Допустим, что существует $y \in B$, для которого

$$\sum_{i=1}^n p_i y_i \leq p_{n+1}.$$

Так как B выпукло, то отрезок, соединяющий y с z , должен целиком содержаться в B , т.е. точки этого отрезка

$$w_r = ry + (1-r)z \in B, \quad \forall 0 \leq r \leq 1.$$

Квадрат расстояния от x до w_r имеет вид

$$\rho^2(x, w_r) = \sum_{i=1}^n (x_i - ry_i - (1-r)z_i)^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^2}{\partial r} &= 2 \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)(x_i - ry_i - (1-r)z_i) = \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (z_i - x_i)y_i - 2 \sum_{i=1}^n (z_i - x_i)z_i + 2 \sum_{i=1}^n r(z_i - y_i)^2 = \\ &= 2 \sum_{i=1}^n p_i y_i - 2 \sum_{i=1}^n p_i z_i + 2r \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2. \end{aligned}$$

При $r = 0$ (то есть, при $w_r = z$) имеем

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial r} \Big|_{r=0} = 2 \sum_{i=1}^n p_i y_i - 2 \sum_{i=1}^n p_i z_i.$$

Здесь первое слагаемое по предположению не превосходит $2p_{n+1}$, а второе больше $2p_{n+1}$. Поэтому $\frac{\partial \rho^2}{\partial r} \Big|_{r=0} < 0$.

Отсюда следует, что для r , достаточно близких к нулю

$$\rho(x, w_r) < \rho(x, z).$$

Но это противоречит выбору z . Следовательно, для любых $y \in B$ условие (3) должно выполняться.

Лемма 2. (Теорема об альтернативах для матриц). Пусть $A = \{a_{ij}\}$, матрица $m \times n$. Тогда справедливо либо утверждение 1, либо утверждение 2.

1. Точка $\bar{0}$ (в m -мерном пространстве) содержится в выпуклой оболочке $m + n$ точек

$$a_1 = (a_{11}, \dots, a_{m1})$$

.....

$$a_n = (a_{1n}, \dots, a_{mn})$$

и

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

.....

$$e_m = (0, 0, \dots, 1).$$

2. Существуют числа $x_1, \dots, x_m$, удовлетворяющие условиям

$$x_i > 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1, \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i > 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Доказательство. Предположим, что **1** неверно. То есть, точка $\bar{0}$ не содержится в выпуклой оболочке этих $m + n$ точек.

На основании леммы 1 существуют такие числа $p_1, \dots, p_{m+1}$, что

$$\sum_{i=1}^m 0 \cdot p_i = p_{m+1}.$$

Отсюда следует, что $p_{m+1} = 0$ и $\sum_{i=1}^m p_i y_i > 0$ для всех y в указанном выпуклом множестве. В частности это выполняется, если y является любым из $m+n$ векторов a_j, e_i . Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i &> 0 \quad \forall j, j = \overline{1, n}, \\ p_i &> 0 \quad \forall i, i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Так как $p_i > 0$, получаем $\sum_{i=1}^m p_i > 0$, и можно положить $x_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^m p_i}$.

Следовательно, $\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i > 0, x_i > 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы о минимаксе ($v_1 = v_2$)

Это соответствует тому, что $\max_{x \in X} \min_j x A^j = \min_{y \in Y} \max_i A_i y^T$, где A^j – столбец, а A_i – строка матрицы A .

Доказательство. Пусть A – матричная игра. По лемме 2 имеет место либо утверждение (1), либо утверждение (2).

Если верно (1), то $\bar{0}$ является выпуклой линейной комбинацией $m+n$ векторов. Поэтому существуют такие $S_1, \dots, S_{m+n}$, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+n} S_j a_{ij} + S_{n+i} &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ S_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m+n; \quad \sum_{j=1}^{m+n} S_j = 1. \end{aligned}$$

Если бы все числа $S_1, \dots, S_n$ были равны нулю, то $\bar{0}$ оказывался бы выпуклой линейной комбинацией m единичных векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$, что, очевидно, невозможно, т.к. они линейно независимы. Следовательно, по крайней мере, одно из чисел $S_1, \dots, S_n$ положительно и $\sum_{j=1}^n S_j > 0$.

$$\text{Тогда можно положить } y_j = \frac{S_j}{\sum_{j=1}^n S_j},$$

и мы получаем

$$y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = \frac{-S_{n+i}}{\sum_{j=1}^n S_j} \leq 0, \quad \forall i.$$

Значит, $v(y) = \max_i A_i y^T \leq 0$ и $v_2 \leq 0$.

Предположим теперь, что верно утверждение (2):

$$x_i > 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i > 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тогда, $v(x) = \min_j x A^j = \min_{y \in Y} x A y^T > 0$, так что $v_1 > 0$.

Следовательно, неравенство $v_1 \leq 0 < v_2$ не может иметь места. Предположим теперь, что мы изменили игру A , заменив её на игру $B = \{b_{ij}\}$, где $b_{ij} = a_{ij} + k$.

Ясно, что для любых x, y $x B y^T = x A y^T + k$. Поэтому

$$v_1(B) = v_1(A) + k,$$

$$v_2(B) = v_2(A) + k.$$

Так как неравенство

$$v_1(B) < 0 < v_2(B)$$

не может иметь места, то неравенство

$$v_1(A) < -k < v_2(A)$$

также не выполняется. Но k – произвольно. Значит, неравенство $v_1 < v_2$ невозможно. Так как $v_1 \leq v_2$, то

$$v_1 = v_2,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы видим, что при использовании смешанных стратегий нижний выигрыш игрока **1** в точности равен верхнему проигрышу игрока **2**. Общая величина V этих двух чисел называется значением игры.

Мы видим, что стратегия x , удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^m x_i a_{ij} \geq v, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

является оптимальной для игрока **1** в том смысле, что не существует стратегии, которая дала бы ему больший ожидаемый выигрыш, чем v , против каждой стратегии игрока **2**.

Обратно, если y удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq v, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5)$$

то y является оптимальной для игрока **2** в том же смысле.

Далее, очевидно, что $xAy^T = v$, т.к. если бы правая часть этого равенства была меньше левой, то это противоречило бы (5), а если бы она была больше левой – это противоречило бы (4). Следовательно, оптимальные стратегии x и y являются также оптимальными одна против другой, а также против любой иной оптимальной стратегии.

Будем называть любую пару оптимальных стратегий (x, y) – решением игры.

2.8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ

Теорема о минимаксе гарантирует, что каждая антагонистическая игра имеет оптимальные стратегии. Она даёт существование, но не определяет, как искать эти оптимальные стратегии.

1. Простейшим является тот случай, когда существует *седловая точка*, т.е. когда существует элемент a_{ij} , являющийся максимальным в своём столбце и минимальным в своей строке. Тогда чистые стратегии i и j (или, что равносильно, смешанные стратегии x и y , для которых $x_i=1$, $y_j=1$, а все остальные компоненты равны нулю) будут оптимальными стратегиями для игроков **1** и **2** соответственно.

2. Доминирование. Пусть дана матрица A . Будем говорить, что i -я строка доминирует k -ю строку, если $a_{ij} \geq a_{kj}$, $\forall j$ и $a_{ij} > a_{kj}$ по крайней мере для одного j .

Аналогично, будем говорить, что j -й столбец доминирует l -й столбец, если $a_{ij} \leq a_{il}$, $\forall i$ и $a_{ij} < a_{il}$ по крайней мере для одного i .

Короче говоря, одна чистая стратегия (представленная своей строкой или столбцом) доминирует другую чистую стратегию, если выбор первой (доминирующей) стратегии, по крайней мере, не хуже выбора второй (доминируемой) стратегии, а в некоторых случаях и лучше.

Отсюда следует, что игрок всегда может обойтись без доминируемых стратегий и использовать только недоминируемые стратегии.

Теорема. (Без доказательства) Пусть A – матричная игра, и пусть строки $i_1, i_2, \dots, i_k$ матрицы доминируются. Тогда игрок 1 имеет такую оптимальную стратегию x , что $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = \dots = 0$. Кроме того, любая оптимальная стратегия для игры, получающейся в результате удаления доминируемых строк, будет также оптимальной стратегией для первоначальной игры.

Аналогичная теорема справедлива и для доминирования столбцов. Общий результат этих теорем состоит в том, что все доминируемые строки и столбцы могут быть отброшены, а это позволяет иметь дело с игрой с меньшей матрицей.

Пример 2.7. Рассмотрим игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Второй столбец доминирует 4-й. Следовательно, игрок 2 никогда не будет использовать свою 4-ю стратегию. Поэтому на неё можно не обращать внимания и рассматривать матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В ней 3-я строка доминирует 1-ю. Удаляя 1-ю строку, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В ней 3-й столбец доминируется 2-м. Следовательно, исходная игра сводится к игре с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

И нужно искать оптимальные стратегии для игры 2×2 .

3. Игры (2×2). Пусть дана матричная игра 2×2 с платежной матрицей $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Если есть седловая точка, то всё определено. Если нет, то оптимальные стратегии $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ имеют положительные компоненты $x_i > 0, y_i > 0$.

Если значение игры – v , это для оптимальных стратегий $xAy^T = v$, т.е.

$$a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 = v.$$

Преобразуем

$$x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2) + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2) = v \quad (*)$$

Так как y оптимальная стратегия, то должно выполняться:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \leq v,$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq v.$$

Допустим, что одно из выражений меньше v :

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 < v$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq v.$$

Так как $x_1 > 0, x_1 + x_2 = 1$, то левая часть (*) будет меньше правой. Отсюда следует, что должно быть

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v,$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v.$$

Аналогично можно показать:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v,$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v.$$

Из этих уравнений, с учётом того, что $x_1 + x_2 = 1, y_1 + y_2 = 1$ легко найти стратегии обоих игроков.

4. Симметричные игры. Квадратичная матрица A называется кососимметрической, если $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$. Матричная игра называется симметричной, если её матрица кососимметрическая.

Теорема. Значение симметричной игры равно нулю. Кроме того, если x есть оптимальная стратегия для игрока 1, то x есть также оптимальная стратегия для игрока 2.

Доказательство: Пусть A – матрица игры и x – произвольная стратегия. Легко видеть, что $A = -A^T$.

Следовательно,

$$xAx^T = -xA^T x^T = -(xAx^T)^T = -xAx^T.$$

Поэтому $xAx^T = 0$.

Отсюда следует, что для любого $x \min_y xAy^T \leq 0$, так что значение игры неположительно. В то же время $\max_y yAx^T \geq 0$, так что значение игры неотрицательно. Следовательно, значение игры равно нулю.

Далее, если x – оптимальная стратегия игрока 1, то

$$xA \geq \bar{0}$$

(из $xA \geq \bar{v}$).

Но отсюда $x(-A^T) \geq \bar{0}$, так что $xA^T \leq \bar{0}$.

Значит, стратегия x оптимальна также и для игрока 2.

5. Решение антагонистических игр в общем случае. На основании теоремы о минимаксе мы знаем, что стратегия x , удовлетворявшая условию

$$\sum_{i=1}^m x_i a_{ij} \geq v, \quad j = \overline{1, n}; \quad \text{где } v - \text{значение игры, является оптимальной}$$

для 1-го игрока. Т.е. не существует другой стратегии, которая дала бы ему больший ожидаемый выигрыш, чем v , против каждой стратегии игрока 2.

Таким образом, игру с точки зрения 1-го игрока можно записать как задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} v &\rightarrow \max; \\ \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} &\geq v, \quad j = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1; \quad x_i \geq 0; \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Причём v рассматривается как $m+1$ -я переменная, неограниченная по знаку (свободная).

С другой стороны, 2-й игрок стремится минимизировать значение игры:

$$\begin{aligned} v &\rightarrow \min; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j &\leq v, \quad i = \overline{1, m}; \\ \sum_{j=1}^n y_j &= 1; \quad y_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Причём обе эти задачи представляют собой пару двойственных задач линейного программирования:

$v \rightarrow \max;$ $-\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i + v \leq 0, j = \overline{1, n};$ $\sum_{i=1}^m x_i = 1; x_i \geq 0; i = \overline{1, m}.$ $v - \text{свободная переменная.}$	$v \rightarrow \min;$ $-\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j + v \geq 0, i = \overline{1, m};$ $\sum_{j=1}^n y_j = 1; y_j \geq 0; j = \overline{1, n}.$ $v - \text{свободная переменная.}$
--	--

Таким образом, решив одну из двойственных задач, мы определим оптимальные стратегии 1-го и 2-го игроков и значение игры.

2.9. ИГРЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрим игру, в которой допускаются не все смешанные стратегии. Обычно для этого имеются определённые практические основания. Предположим, что смешанные стратегии x и y соответственно должны выбираться из некоторых выпуклых многогранников.

Если матрица игры $A = \{a_{ij}\}$, то задача игрока 1 состоит в том, чтобы найти

$$\max_{x \in X} \{ \min_{y \in Y} xAy^T \}, \quad (1)$$

где два множества X и Y определяются соответственно неравенствами

$$xB \leq C,$$

$$x \geq 0$$

и

$$yE^T \geq F,$$

$$y \geq 0.$$

Аналогично задача 2-го игрока состоит в том, чтобы найти

$$\min_{y \in Y} \{ \max_{x \in X} xAy^T \} \quad (2)$$

при тех же ограничениях на стратегии игроков.

В выражении (1) величина в скобках, очевидно, является функцией x . Точнее она является значением задачи линейного программирования, целевая функция которой имеет коэффициенты, зависящие от x . По теоремам двойственности, если эта задача допустима и ограничена, то две задачи

$$\left. \begin{array}{l} \min_y xAy^T \\ yE^T \geq F, \\ y \geq 0, \end{array} \right\} \quad (3)$$

и двойственная к ней

$$\left. \begin{array}{l} \max_z zF^T \\ zE \leq xA, \\ z \geq 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

будут иметь одно и то же значение целевой функции. Значит, задача игрока **1** сводится просто к задаче максимизации

$$\left. \begin{array}{l} \max zF^T \\ zE - xA \leq 0, \\ xB \leq c, \\ z, x \geq 0. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Аналогично, можно показать, что задача (2) игрока **2** сводится к задаче минимизации:

$$\left. \begin{array}{l} \min Cs^T \\ sB^T - yA^T \geq \bar{0}, \\ yE^T \geq F, \\ s, y \geq \bar{0}. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Задачи (5) и (6) являются двойственными друг к другу. Если эти задачи допустимы, то выражения (1) и (2) будут равны и, таким образом, игра с ограничениями будет иметь решение в смешанных стратегиях.

2.10. БЕСКОНЕЧНЫЕ ИГРЫ

Рассмотрим в первую очередь игры со счётным множеством стратегий. Пусть, как и в конечных играх a_{ij} – выигрыш, получаемый **1**-м игроком, при условии, что он выбирает i -ю чистую стратегию, а **2**-й игрок, j -ю чистую стратегию.

Смешанной стратегией игрока **1** будет последовательность $(x_1, x_2, \dots)$, для которой

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1, \quad (1)$$

$$x_i \geq 0. \quad (2)$$

Смешанная стратегия игрока **2** – $(y_1, y_2, \dots)$.

Функция выигрыша при смешанных стратегиях (x, y)

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i a_{ij} y_j \quad (3)$$

при условии, что ряд абсолютно сходится.

Игры со счётным множеством стратегий обладают рядом нежелательных свойств, которых нет у конечных игр. Во-первых, ряд (3) не обязательно сходится и может случиться, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i a_{ij} y_j \quad (4)$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ij} y_j \quad (5)$$

существуют, но различны. Во-вторых, множества смешанных стратегий не компактны и, таким образом, максимумы и минимумы не будут существовать.

2.11. ИГРЫ НА КВАДРАТЕ

В таких играх каждый игрок имеет континуум чистых стратегий, обычно представляемых точками интервала $[0,1]$. Тогда чистая стратегия каждого игрока – число из этого интервала, а функция выигрыша $A(x, y)$ определена на единичном квадрате.

Смешанная стратегия представляет собой вероятностное распределение на множестве чистых стратегий. Оно может быть представлено функцией распределения:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, \quad F(1) = 1, \\ F(x) &\geq F(x'), \text{ если } x > x', \\ F(x) &= F(x+0), \text{ если } x \neq 0. \end{aligned}$$

Если игрок 1 использует чистую стратегию x , а игрок 2 – смешанную стратегию $G(y)$, то ожидаемый выигрыш равен интегралу Стильтьеса:

$$E(x, G) = \int_0^1 A(x, y) dG(y). \quad (1)$$

Если же игрок 2 использует чистую стратегию y , а игрок 1 смешанную стратегию F , то ожидаемый выигрыш

$$E(F, y) = \int_0^1 A(x, y) dF(x). \quad (2)$$

Наконец, если игрок 1 использует F , а игрок 2 использует G , то имеем

$$E(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 A(x, y) dF(x) dG(y). \quad (3)$$

В каждом случае считаем, что интегралы существуют. Разумеется тогда

$$E(F, G) = \int_0^1 E(F, y) dG(y) = \int_0^1 E(x, G) dF(x). \quad (4)$$

Если можно определить два числа

$$v_1 = \sup_F \inf_y E(F, y) \quad (5)$$

и

$$v_2 = \inf_G \sup_x E(x, G), \quad (6)$$

то возникают два вопроса:

- 1) Будет ли выполняться равенство $v_1 = v_2$?
- 2) Можно ли $\sup \inf$ и $\inf \sup$ заменить на $\max \min$ и $\min \max$ соответственно?

Если ответ на оба эти вопроса положителен, то оптимальные смешанные стратегии существуют. Если эти стратегии можно найти, то игра определена столь же хорошо, как и конечные игры.

Если утвердительно можно ответить только на 1-й вопрос, то игра имеет общее значение v_1 и v_2 , но не имеет оптимальных стратегий. Тем не менее, она будет иметь ε -оптимальные стратегии: т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие смешанные стратегии F и G игроков 1 и 2 соответственно, что

$$E(F, y) > v - \varepsilon ;$$

$$E(x, G) > v + \varepsilon$$

для любого x и y из $[0, 1]$.

Таким образом, хотя бесконечная игра определена не столь хорошо, как конечные игры, она обладает известной устойчивостью.

2.12. ИГРЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ЯДРОМ

Для игр с непрерывным ядром оптимальные стратегии существуют.

Теорема 1. Если ядро $A(x, y)$ – непрерывная функция, то $\sup \inf$ и $\inf \sup$ могут быть заменены на $\max \min$ и $\min \max$ соответственно.

Доказательство. Известно, что функция $A(x, y)$ непрерывна. Поэтому для любой F функция

$$E(F, y) = \int_0^1 A(x, y) dF(x)$$

непрерывна по y . Так как интервал $[0,1]$ компактен, $E(F, y)$ в некоторой его точке будет достигать минимума. Таким образом, $\sup_F \inf_y E(F, y)$ можно заменить на $\sup_F \min_y E(F, y)$.

По определению v_1 для любого n существует такое распределение F_n , что

$$\min_y E(F_n, y) > v_1 - \frac{1}{n}.$$

Заметим теперь, что из любой последовательности функций распределения $(F_1, F_2, \dots)$ на $[0,1]$ можно извлечь некоторую поточечно сходящуюся подпоследовательность. Пусть F_0 – предел этой подпоследовательности. Ясно, что F_0 удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} F_0(0) &= 0, \quad F_0(1) = 1, \\ F_0(x) &\geq F_0(x'), \text{ если } x > x', \end{aligned}$$

так как им удовлетворяет каждая из функций F_n . С другой стороны, функция F_0 не обязательно удовлетворяет условию $F_0(x) = F_0(x+0)$, если $x \neq 0$, потому что это свойство не сохраняется при предельном переходе. Определим функцию $\overline{F}_0$ следующим образом:

$$\overline{F}_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ F_0(x+0), & \text{если } 0 < x < 1; \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Легко видеть, что $\overline{F}_0$ является стратегией (т. е. функцией распределения.). Функции F_0 и $\overline{F}_0$ отличаются только в точках разрывов. Но так как эти функции монотонны, точки их разрывов образуют счётное множество и поэтому для любого y

$$\int_0^1 A(x, y) d\overline{F}_0(x) = \int_0^1 A(x, y) dF_0(x).$$

Функция $A(x, y)$ непрерывна и, следовательно, равномерно непрерывна. Ввиду того, что F_0 является пределом подпоследовательности из F_n , мы имеем

$$\int_0^1 A(x, y) dF_0(x) = \lim_n \int_0^1 A(x, y) dF_n(x).$$

Но последний предел не меньше v_1 для каждого значения y . Таким образом:

$$\min_y E(\overline{F}_0, y) \geq v_1$$

и на $\overline{F_0}$ достигается требуемый максимум.

Аналогично можно показать, что $\inf \sup$ можно заменить на $\min \max$.

Теорема 2. Если ядро $A(x, y)$ непрерывно, то $v_1 = v_2$.

Доказательство. Для любого целого числа n рассмотрим матрицу $A_n = \{a_{ij}^n\}$ размерности $(n+1) \times (n+1)$, где $a_{ij}^n = A(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$; $i, j = \overline{0, n}$.

Игра с матрицей выигрыша A_n имеет значение w_n и оптимальные стратегии $r_n = (r_0^n, \dots, r_n^n)$ и $s_n = (s_0^n, \dots, s_n^n)$ игроков **1** и **2** соответственно.

Функция $A(x, y)$ непрерывна. Так как квадрат компактен, то $A(x, y)$ равномерно непрерывна. Таким образом, для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < \delta,$$

то

$$|A(x, y) - A(x', y')| < \varepsilon.$$

Возьмём n столь большим, чтобы $\frac{1}{n} < \delta$. Определим стратегию $F_n(x)$ равенством

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^{[nx]} r_i^n,$$

где $[nx]$ – целая часть числа nx .

Для любого y положим $j = [ny]$. Ясно, что

$$E(F_n, \frac{j}{n}) = \sum_{i=0}^n a_{ij}^n r_i^n > w_n,$$

и так как

$$\begin{aligned} \left| y - \frac{j}{n} \right| &< \delta, \\ \left| A(x, y) - A(x, \frac{j}{n}) \right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

имеем

$$\left| \int_0^1 A(x, y) dF_n(x) - \int_0^1 A(x, \frac{j}{n}) dF_n(x) \right| < \int_0^1 \varepsilon dF_n(x) = \varepsilon,$$

то есть

$$|E(F_n, y) - E(F_n, \frac{j}{n})| < \varepsilon.$$

Следовательно, для любого y

$$E(F_n, y) \geq w_n - \varepsilon$$

и поэтому $v_1 > w_n - \varepsilon$.

Аналогично можно показать, что $v_2 < w_n + \varepsilon$.

Из 2-х последних неравенств получаем, что $v_1 - v_2 > -2\varepsilon$. Но из того, что $v_1 \leq v_2$ и произвольности ε , следует, что $v_1 = v_2$.

Из доказательств этой теоремы следует, что, во-первых,

$$V = \lim_n w_n.$$

И, во-вторых, что стратегии F_n аппроксимируют оптимальную стратегию сколь угодно точно. В этом смысле матричные игры аппроксимируют непрерывную игру $A(x, y)$. Если ядро очень гладкое, то может оказаться, что уже при очень небольшом n аппроксимация будет достаточно хорошей.

С другой стороны, если ядро слишком нерегулярно, то для хорошей аппроксимации требуются большие значения n .

2.13. ВОГНУТО-ВЫПУКЛЫЕ ИГРЫ

Определение. Говорят, что игра на квадрате вогнуто-выпукла, если её ядро $A(x, y)$ вогнуто по x при каждом значении y и выпукло по y при каждом значении x .

Вогнуто-выпуклая игра должна иметь седлообразное ядро, и, по-видимому, седловую точку в чистых стратегиях.

Теорема. Пусть вогнуто-выпуклая игра $A(x, y)$ непрерывна. Тогда она имеет оптимальные чистые стратегии.

Доказательство. Так как игра непрерывна, она имеет непрерывные стратегии. Пусть для игроков 1 и 2 это будут соответственно $F(x)$ и $G(y)$.

Теперь положим

$$x_0 = \int_0^1 x dF(x), \quad (1)$$

$$y_0 = \int_0^1 y dG(y). \quad (2)$$

Так как функция $A(x, y)$ вогнута по x , то для любой заданной y существует такое α , что функция

$$B_y(x) = A(x, y) - \alpha x$$

достигает своего максимального значения (при фиксированном y) в точке x_0 . Мы имеем

$$\begin{aligned} E(F, y) &= \int_0^1 (B_y(x) + \alpha x) dF(x), \\ E(F, y) &= \int_0^1 B_y(x) dF(x) + \alpha \int_0^1 x dF(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Функция B_y достигает максимума в x_0 , следовательно, первый интеграл в (3) не превосходит $B_y(x_0)$ (т.к. $\int dF(x) = 1$). Поэтому

$$E(F, y) \leq B_y(x_0) + \alpha x_0 = A(x_0, y), \quad (4)$$

откуда следует, что x_0 не хуже F против любой y . Аналогично можно показать, что y_0 не хуже G против любой стратегии x . Таким образом, x_0 и y_0 – оптимальные чистые стратегии.

Пример 2.8. Рассмотрим игру с ядром

$$A(x, y) = -2x^2 + y^2 + 3xy - x - 2y.$$

Так как $A''_{xx} = -4 < 0$, $A''_{yy} = 2 > 0$, то игра действительно вогнуто-выпуклая. Видим, что

$$A'_x = -4x + 3y - 1.$$

Полагая

$$A'_x = -4x + 3y - 1 = 0,$$

найдем

$$x = \frac{3y-1}{4}.$$

Это значение x максимизирует A . Однако оно не всегда лежит в единичном интервале, будучи отрицательным при $y < 1/3$. В последнем случае получаем максимум, полагая $x = 0$. Следовательно,

$$\psi(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq \frac{1}{3}; \\ \frac{3y-1}{4}, & \text{если } y \geq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Аналогично находим

$$A'_y = 2y + 3x - 2,$$

откуда находим, приравняв ее 0, с учетом того, что величина $\frac{2-3x}{2}$ не всегда лежит на единичном интервале

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2-3x}{2}, & \text{если } x \leq \frac{2}{3}; \\ 0, & \text{если } x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Теперь легко найти оптимальные стратегии и значение игры.

$$\bar{x} = \frac{4}{17}, \quad \bar{y} = \frac{11}{17}, \quad v = -\frac{13}{17}.$$

2.14. ИГРЫ С ВЫБОРОМ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ

Как показано ранее, *непрерывные игры всегда имеют оптимальные стратегии*. Но общих аналитических методов их вычисления нет.

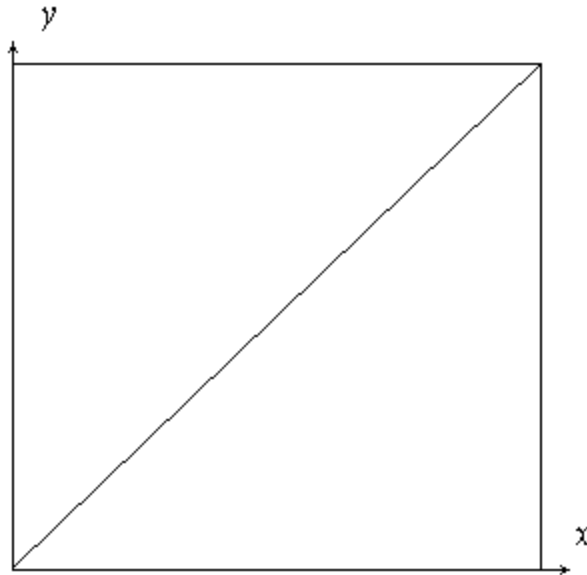
Если игра с разрывным ядром, то мы не можем быть уверены, что она имеет оптимальные стратегии. Но в некоторых случаях именно разрывность позволяет находить оптимальные стратегии (если они существуют) аналитическими методами.

Рассмотрим один тип игр на квадрате, называемый *играми с выбором момента времени*. Прототипом такой игры является игра, в которой каждый игрок может сделать только одно действие в течение данного интервала времени. Порядок, в котором игроки действуют, чрезвычайно важен. Этот факт является причиной разрыва ядра вдоль диагонали $x = y$ квадрата.

Рассмотрим игру с ядром $A(x, y)$ вида

$$A(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & x < y, \\ \varphi(x), & x = y, \\ L(x, y), & x > y, \end{cases} \quad (1)$$

где функция $K(x, y)$ определена и непрерывна на множестве $0 \leq x \leq y \leq 1$, а функция $L(x, y)$ на множестве $0 \leq y \leq x \leq 1$, а функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, 1]$.



Нельзя быть уверенным, что оптимальные стратегии в этой игре существуют. Тем не менее, мы можем определить некоторые свойства оптимальных стратегий в предположении, что они существуют.

Пусть F – смешанная стратегия игрока 1. Для $y \in [0, 1]$ мы имеем

$$E(F, y) = \int_0^y K(x, y) dF(x) + \varphi(y)[F(y) - F(y - 0)] + \int_y^1 L(x, y) dF(x). \quad (2)$$

Если F – непрерывная функция, то можем опустить среднее выражение и получим

$$E(F, y) = \int_0^y K(x, y) dF(x) + \int_y^1 L(x, y) dF(x). \quad (3)$$

Предположим, что F и G – оптимальные стратегии игроков 1 и 2 и что обе они являются непрерывными функциями распределения.

Известно, что если F и G оптимальны, а y_0 – точка (чистая стратегия против смешанной F), в которой

$$G'(y_0) > 0, \quad (4)$$

то

$$E(F, y_0) = v, \quad (5)$$

где v – значение игры.

Теперь, если G' положительна в точке y_0 , то она положительна и в некоторой окрестности y_0 . Поэтому для любого y , достаточно близкого к y_0 , мы будем иметь $E(F, y) = v$.

Но это значит, что

$$\frac{\partial E(F, y)}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

На основании правила Лейбница

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{U(\lambda)}^{V(\lambda)} f(x, \lambda) dx = \int_{U(\lambda)}^{V(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) dx + f(V(\lambda), \lambda) \frac{dV}{d\lambda} - f(U(\lambda), \lambda) \frac{dU}{d\lambda}$$

уравнение (6) можно переписать в виде

$$[L(y, y) - K(y, y)]F'(y) = \int_0^y K_y(x, y)F'(x)dx + \int_y^1 L_y(x, y)F'(x)dx. \quad (7)$$

Выражение (7) представляет собой интегральное уравнение относительно F' , которое иногда довольно легко решать.

Предположим теперь, что нам дана игра с ядром вида (1). Мы не можем гарантировать существование оптимальных стратегий. Мы даже не знаем, будут ли они непрерывными, дискретными или частично непрерывными и частично дискретными распределениями. Однако довольно естественно считать, что оптимальные стратегии F и G являются непрерывными распределениями, а их производные F' и G' положительны на интервалах (a, b) и (c, d) соответственно и равны нулю вне этих интервалов. Теперь имеем несколько соотношений, связывающих функции F и G и числа a, b, c, d и v :

$$E(F, y) = v \text{ для } y \in (c, d); \quad (8)$$

$$E(F, y) \geq v \text{ для любого } y; \quad (9)$$

$$E(x, G) = v \text{ для } x \in (a, b); \quad (10)$$

$$E(x, G) \leq v \text{ для любого } x; \quad (11)$$

$$[L(y, y) - K(y, y)]F'(y) = \int_0^y K_y(x, y)F'(x)dx + \int_y^1 L_y(x, y)F'(x)dx, \quad (12)$$

для $y \in (c, d)$;

$$[K(x, x) - L(x, x)]G'(x) = \int_0^x K_x(x, y)G'(y)dy + \int_x^1 L_x(x, y)G'(y)dy, \quad (13)$$

для $x \in (a, b)$.

Здесь $0 \leq a \leq b \leq 1$, $0 \leq c \leq d \leq 1$ и, кроме того, F и G должны быть стратегиями. Если вся система имеет решение, то это решение даст нам оптимальные стратегии, а также значение игры. Если решения нет, то игра либо не имеет оптимальных стратегий, либо, если она их имеет, то они не такого типа, как предполагалось выше (непрерывные).

Иногда ядро кососимметрично, т.е.

$$L(x, y) = -K(y, x), \quad (14)$$

$$\varphi(x) = 0. \quad (15)$$

Если это так, то значение игры, если оно существует, должно равняться нулю, а оптимальные стратегии, если они существуют, должны быть одинаковы для обоих игроков. Таким образом, будем иметь:

$$F = G, \quad a = c, \quad b = d, \quad v = 0,$$

и соотношения (8 – 13) примут вид

$$E(F, y) = 0 \quad \text{для } y \in (a, b); \quad (16)$$

$$E(F, y) \geq 0 \quad \text{для любого } y; \quad (17)$$

$$[L(y, y) - K(y, y)]F'(y) = \int_a^y K_y(x, y)F'(x)dx + \int_y^b L_y(x, y)F'(x)dx, \quad (18)$$

для $y \in (a, b)$.

Эта система вместе с обычными ограничениями даст решение игры, если такое решение существует.

Пример 2.9. Рассмотрим следующую дуэль. Два дуэлянта (игрока) в момент $t = 0$ начинают идти навстречу друг другу. Они встретятся (если ничто не помешает) в момент $t = 1$. Каждый имеет пистолет только с одной пулей и может выстрелить в любой момент, когда пожелает. Если ему удалось поразить противника, а сам он невредим, то дуэль немедленно прекращается, и тот, кто выстрелил успешно, является победителем. Если оба дуэлянта промахнулись, то дуэль оканчивается вничью. Если оба стреляли одновременно, и каждый поразил другого, то дуэль также считается окончившейся вничью.

Сделаем два предположения. 1) Меткость выстрела при сближении игроков возрастает таким образом, что если какой-либо игрок выстрелил в момент t , то вероятность поражения противника равна t . 2) Дуэль является бесшумной, т.е. игрок не знает, что его противник выстрелил (если конечно тот промахнулся).

Найдем ядро этой игры. Если игрок 1 выбирает момент x , а игрок 2 – момент $y > x$, то игрок 1 с вероятностью x попадет в противника (в этом случае его выигрыш равен $+1$). Если он промахнулся (с вероятностью $1 - x$), то он будет поражен с вероятностью y (получит выигрыш -1).

Таким образом, мы имеем

$$K(x, y) = x \cdot 1 + (1 - x) \cdot y \cdot (-1) = x - y + xy. \quad (19)$$

Очевидно, что эта игра симметрична, поэтому

$$L(x, y) = -(y - x + yx) = x - y + xy \quad (20)$$

и

$$\varphi(x) = 0.$$

Далее, мы имеем также

$$K_y(x, y) = -1 + x, \quad (21)$$

$$L_y(x, y) = -1 - x \quad (22)$$

и

$$L(y, y) - K(y, y) = -2y^2 \quad (23)$$

Предположим теперь, что оптимальная стратегия является непрерывной функцией распределения F с положительной производной в интервале (a, b) . Тогда по формуле (18)

$$-2y^2 F'(y) = \int_a^y (-1 + x) F'(x) dx + \int_y^b (-1 - x) F'(x) dx. \quad (24)$$

Это интегральное уравнение (относительно F) может быть преобразовано в дифференциальное уравнение дифференцированием обеих частей, что даст:

$$-4yF' - 2y^2 F'' = (y - 1)F' + (y + 1)F' = 2yF',$$

или, упростив,

$$yF'' = -3F'. \quad (25)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$F'(y) = ky^{-3}. \quad (26)$$

Теперь нужно найти a , b и k . Предположим, что $b < 1$. Мы знаем, что для всех $y \in (a, b)$

$$E(F, y) = 0.$$

Но функция $E(F, y)$ непрерывна по y , откуда следует, что

$$E(F, b) = 0.$$

Следовательно,

$$E(F, b) = \int_a^b K(x, b) dF(x) = \int_a^b (x - b + bx) dF(x) = 0.$$

Но если $b < 1$, то

$$\int_a^b (x-1+x)dF(x) < 0,$$

и поэтому $E(F,1) < 0$, что противоречит условию (17). Таким образом

$$b=1. \quad (27)$$

Так как $b=1$, то $E(F,1) = 0$. Ввиду этого

$$\begin{aligned} k \int_a^1 (2x-1)x^{-3}dx &= 0, \\ k \int_a^1 (2x^{-2} - x^{-3})dx &= k(-2x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2}) \Big|_a^1 = \\ &= k(-\frac{3}{2} + \frac{2}{a} - \frac{1}{2a^2}) = \frac{k}{2a^2}(-3a^2 + 4a - 1). \end{aligned}$$

Откуда следует

$$3a^2 - 4a + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения: $a=1$ и $a=\frac{1}{3}$. Ясно, что значение $a=1$ невозможно, следовательно,

$$a = \frac{1}{3}. \quad (28)$$

Так как F – стратегия, то

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 F'(x)dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 kx^{-3}dx = 1,$$

поэтому

$$k = \frac{1}{4}.$$

Это дает нам оптимальную стратегию для каждого из двух игроков. Она является непрерывной функцией распределения, определенной следующим образом из

$$F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{4}x^{-3}, & \text{если } x > \frac{1}{3}, \end{cases}$$

что даст оптимальную стратегию 2-х игроков в виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{4} \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2x^2} \right), & \text{если } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

3. ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

3.1. ВВЕДЕНИЕ

Наиболее изучены задачи целочисленного линейного программирования.

Задача является задачей полностью целочисленного программирования, если требование целочисленности наложено на все переменные задачи: x_j – целые для $j = \overline{1, n}$, где n – размерность задачи.

Имеем задачу частично целочисленного программирования, когда требование целочисленности наложено на часть переменных x_j для $j = \overline{1, n_1}$, причём $n_1 < n$.

Дискретные задачи, в которых областью допустимых значений переменных является не множество целых неотрицательных чисел, а некоторое заданное конечное множество, могут быть формально сведены к целочисленным.

Дискретные задачи математического программирования образуют обширный класс нерегулярных задач вида:

$$\begin{aligned} Q(\bar{x}) &\rightarrow \max \\ \bar{q}(\bar{x}) &\leq \bar{0}, \\ \bar{x} &\geq \bar{0}, \\ x_j &\text{ – целые (дискретные), } j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Задача называется регулярной, если она отвечает следующим условиям:

1. Для каждой точки $\bar{x} \in D$ можно определить некоторым образом понятие непустой окрестности $D_{\bar{x}} \subset D$.
2. Можно указать достаточно эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия локальной оптимальности. На основе этих условий локальный оптимум целевой функции на множестве D может быть найден при помощи конечного (или бесконечно сходящегося) процесса.
3. Локальный оптимум целевой функции совпадает с глобальным.

Допустимая область в дискретных задачах, задаваемая “регулярными условиями” и условиями дискретности, является несвязной и невыпуклой. Это делает невозможным применение стандартных приёмов перемещения по вершинам многогранника или по градиенту в окрестности данной точки.

Прямой перебор для задач с конечным множеством решений не может быть реализован, т.к. число точек, удовлетворяющих допустимым ус-

ловиям $\geq 2^n$. Отбрасывание условий целочисленности и решение линейной задачи с последующим округлением компонент оптимального плана до ближайших целых чисел очень часто не приводит к нужному результату.

Пример (Корбут и Финкельштейн).

$$\begin{aligned} Q(\bar{x}) &= x_1 - 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 4 \\ 4x_1 - 3x_2 &\leq 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 3 \\ \bar{x} &\geq \bar{0} \\ x_j &- \text{целые, } j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

Если игнорировать целочисленность, то получаем оптимальный план

$$\bar{x}^* = \left(\frac{1}{2}, 0, 4\frac{1}{2} \right)^T$$

и никакие варианты его округления не дадут допустимого решения! Оптимальное решение $\bar{x}^* = (2, 2, 5)^T$.

А вообще, принцип регуляризации лежит в основе построения методов “отсечения”.

Можно выделить следующие основные классы задач дискретного программирования.

1. Задачи с неделимостями.
2. Экстремальные комбинаторные задачи.
3. Задачи с неоднородной разрывной целевой функцией.
4. Задачи на неклассических областях.
5. Некоторые многоэкстремальные задачи.

При решении задач дискретного программирования можно выделить три группы принципиально отличающихся методов.

I. Отбрасывается условие дискретности, т.е. область допустимых решений погружается в объемлющую её выпуклую область. Затем к полученной задаче применяются стандартные методы. Если полученное решение удовлетворяет требованиям целочисленности, то задача решена. В противном случае требуется дальнейший переход к целочисленному решению. Простым округлением, вообще говоря, этот переход достигнут быть не может.

Если в результате первого шага получаем нецелочисленный план, то к ограничениям исходной задачи добавляется новое линейное ограничение, обладающее двумя свойствами:

- 1) полученный нецелочисленный план ему не удовлетворяет;
- 2) любой целочисленный план ему заведомо удовлетворяет.

Затем решается полученная расширенная задача, в случае необходимости добавляется ещё одно ограничение, и т.д. Процесс продолжается до получения решения, удовлетворяющего условиям целочисленности.

Геометрически добавление каждого неравенства отвечает проведению гиперплоскости, отсекающей от многогранника решений “регуляризованной” задачи старую оптимальную точку с дробными координатами, но не затрагивающей ни одной целочисленной точки (Это метод отсечений).

Вопросы, которые при этом приходится выяснять:

- 1) Как формировать дополнительные ограничения?
- 2) Необходимо доказать конечность соответствующего процесса отсечения.
- 3) Как бороться с чрезмерным увеличением размерности задачи?

II. Комбинаторные методы. Примером является метод ветвей и границ.

III. Метод случайного поиска и другие приближённые методы.

3.2. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В МЕТОДАХ ОТСЕЧЕНИЯ

В дальнейшем будут необходимы следующие понятия.

1. Говорят, что вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ лексикографически положителен

$$\bar{x} \succ \bar{0},$$

если

$$\bar{x} \neq (0, 0, \dots, 0)^T = \bar{0}$$

и

$$x_k > 0,$$

где

$$k = \min\{j \mid x_j \neq 0\}.$$

2. Говорят, что вектор $\bar{x}$ лексикографически неотрицателен, если

$$\bar{x} \succ \bar{0}, \text{ или } \bar{x} = \bar{0}.$$

3. Говорят, что вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ лексикографически больше вектора $\bar{y}$

$$\bar{x} \succ \bar{y},$$

если

$$(\bar{x} - \bar{y}) \succ \bar{0}.$$

Лексикографически не меньше, $\bar{x} \succcurlyeq \bar{y}$, если

$$(\bar{x} - \bar{y}) \succ = \bar{0}.$$

Лексикографически отрицателен, $\bar{x} \prec \bar{0}$, если
 $-\bar{x} \succ \bar{0}$.

Пусть имеем задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Под расширенным планом задачи линейного программирования (ЗЛП) понимают план

$$\tilde{X} = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T.$$

Определение. План $\bar{X}^*$ (расширенный план $\tilde{X}^*$) ЗЛП называется лексикографически оптимальным (или лексикографическим оптимумом), если для всех расширенных планов $\tilde{X}$ имеет место соотношение

$$(x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*)^T = \tilde{X}^* \geq \tilde{X} = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T.$$

Говорят, l – оптимальный план.

Приведем 3 теоремы без доказательств.

Теорема 1. Если множество оптимальных планов задачи ЛП (1) не пусто и ограничено, то существует лексикографическим оптимумом $\bar{X}^*$ задачи (1). Например, из двух оптимальных планов $(6, 3, 4, 5) \succ = (6, 2, 5, 5)$

Теорема 2. Если $\bar{X}^*$ лексикографически оптимальный план задачи (1), то $\bar{X}^*$ – опорный план.

Пусть $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ – вектора условий, задающие базис опорного плана $\bar{X}$;

$B = \{j_1, \dots, j_k\}$ – индексы базисных переменных;

$N = \{1, \dots, n\} \setminus B$ – индексы небазисных переменных;

$Q^n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$;

$N^0 = \{0\} \cup N$ – множество индексов всех небазисных переменных + 0.

Определение. Симплексная таблица

$$\|x_{ij}\|, \quad i \in Q^n, \quad j \in N^0,$$

называется лексикографически нормальной, если все её столбцы, соответствующие небазисным переменным лексикографически положительны

$$R_j = \begin{pmatrix} x_{0j} \\ x_{1j} \\ \dots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \succ \bar{0}, \quad \forall j \in N.$$

Говорят, l – нормальная симплексная таблица.

Теорема 3. Для того чтобы опорный план $\bar{x}^*$ задачи (1) был l -оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашёлся такой базис B , что симплексная таблица

$$\|x_{ij}\|, \quad i \in Q^n, \quad j \in N^0$$

является l -нормальной.

Определение. Псевдоплан $\bar{x}$ (расширенный псевдоплан $\tilde{x}$) задачи (1) называется лексикографически положительным, если соответствующая симплексная таблица является l -нормальной. (l -псевдоплан, расширенный l -псевдоплан).

Вспомним общее понятие псевдоплана и метод последовательного уточнения оценок.

3.3. ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКАЯ МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНОК

Здесь вместо исходной задачи (1) решается её лексикографический вариант. Требуется найти лексикографический максимум расширенного плана

$$\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n c_j x_j, x_1, \dots, x_n \right)$$

при

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Система ограничений определяет допустимый многогранник L . Задачу (1) будем обозначать как (L, C) , где C – вектор целевой функции (не скалярное умножение). А задачу лексикографической максимизации или l -задачу – $(\bar{L}, \bar{C})$. Соответствующая модификация метода последовательного уточнения оценок – l -метод.

Общая итерация l -метода описывается следующим образом. Пусть имеется l -псевдоплан $\bar{x}^r$. Ему соответствуют:

B_r – множество индексов базисных переменных;

N_r – множество индексов небазисных переменных;
 T_r – симплексная таблица.

	1	x_{j_1}	...	$-x_l x_l$	...	$-x_{j_k}$
x_0	x_{00}	x_{0j_1}	...	x_{0l}	...	x_{0j_k}
x_1	x_{10}	...	...	...	...	...
x_2	x_{20}	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
x_k	x_{k0}	...	...	x_{kl}	...	x_{kj_k}
...	...	...	...	...	...	...
x_n	x_{n0}	...	...	x_{nl}	...	x_{nj_k}

$\{j_1, \dots, l, \dots, j_k\} = N_r$, все $x_{0j} \geq 0$, $j \in N_r$. Столбцы таблицы T_r обозначим через R_j^r , $j \in N_r^0$, $N_r^0 = \{0\} \cup N_r$.

Проверяем, является ли таблица T_r допустимой, т.е. выполнено ли условие

$$x_{i0}^r \geq 0, i = \overline{1, n}.$$

Если является, то $\bar{x}^r$ – l -оптимальный план. Если нет, то ищем переменную x_k , выводимую из базиса, по правилу

$$k = \min\{i \mid i = \overline{1, n}; x_{i0} < 0\}.$$

Затем отыскивается переменная x_l , вводимая в базис, по правилу

$$\frac{R_l}{|x_{kl}|} = \text{lex min} \left\{ \frac{R_j}{|x_{kj}|} \mid j \in N_r; x_{kj} < 0 \right\}.$$

Если среди чисел x_{kj} ($j \in N_r$) нет отрицательных, то задача неразрешима.

Если такие числа есть, то переходим к новому l -псевдоплану $\bar{x}^{r+1}$, которому соответствует

$$\begin{aligned} B_{r+1} &= (B_r \cup \{l\}) \setminus \{k\}, \\ N_{r+1} &= (N_r \cup \{k\}) \setminus \{l\}. \end{aligned}$$

Элементы новой таблицы T_{r+1} получаются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x_{ik}^{r+1} &= -\frac{x_{il}^r}{x_{kl}^r}, i = \overline{0, n}, \quad (\text{столбец делится}) \\ x_{ij}^{r+1} &= x_{ij}^r - \frac{x_{ki}^r}{x_{kl}^r} x_{il}^r, \quad \forall j \in (N_r \setminus \{l\}) \cup \{0\}, i = \overline{0, n}. \end{aligned}$$

Другими словами, столбец, в котором находится направляющий элемент x_{kl}^r , делится на этот элемент и умножается на (-1) . Чтобы полу-

читать любой другой столбец новой таблицы, надо к соответствующему старому столбцу прибавить вновь полученный, умноженный на элемент, стоящий на пересечении направляющей строки и искомого столбца.

Затем повторяется общая итерация.

Способ получения l -нормальной таблицы. Ищется такое число

$$\sum_{j \in N} x_j \leq M,$$

вводят переменную $x_{n+1} \geq 0$; $x_{n+1} = M + \sum_{j \in N} 1(-x_j)$ и добавляют соответствующую строку к таблице. Из базиса выводят x_k , $k = n+1$, вводят x_l из условия

$$R_l = \text{lexmin}\{R_j \mid j \in N\},$$

производят пересчёт и получают l -нормальную таблицу.

3.4. ПЕРВЫЙ АЛГОРИТМ ГОМОРИ

Все алгоритмы Гомори представляют собой реализацию метода отсечений. Каждый дает свое правило построения отсечений.

Пусть (L^u, C) – некоторая задача целочисленного программирования и опорный оптимальный план $\bar{x}(L, C)$ соответствующей задачи линейного программирования не удовлетворяет условию целочисленности

$$\bar{x}(L, C) \notin L^u.$$

Определение. Неравенство

$$\sum_{j=1} a_j x_j \leq \beta \quad \text{или} \quad (a^T x \leq \beta) \quad (*)$$

называется правильным отсечением, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- I. Условие отсечения. $x(L, C)$ не удовлетворяет неравенству (*), т.е.

$$a^T \bar{x}(L, C) > \beta.$$

- II. Условие правильности. Если x – план задачи (L^u, C) , то x удовлетворяет неравенству (*), т.е.

$$L^u \subset \{\bar{x} \mid a^T \bar{x} \leq \beta\}.$$

Первый алгоритм Гомори предназначен для решения полностью целочисленных задач линейного программирования

$$x_0 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$x_j - \text{целые}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Пусть $x(L, C)$ – оптимальный опорный план задачи (L, C) (1)-(3). Выразим целевую функцию x_0 и все переменные x_j ($j \in N$), соответствующие оптимальному опорному плану $x(L, C)$.

$$x_i = x_{i0} + \sum_{j \in N} x_{ij}(-x_j), \quad i = \overline{0, n}. \quad (5)$$

Пусть x – вещественное число. Целой частью x называется наибольшее целое число, не превышающее x . Целая часть x обозначается $[x]$. Дробной частью x называется число

$$\{x\} = x - [x].$$

Пример: $x = -5\frac{1}{3}, \quad [x] = -6, \quad \{x\} = \frac{2}{3}.$

Теорема. Пусть

$$1) \quad z_i \equiv z_i(x) = -\{x_{i0}\} + \sum_{j \in N} (-\{x_{ij}\})(-x_j), \quad i = \overline{0, n}; \quad (6)$$

$$2) \quad x - \text{план задачи } (L^y, C) \text{ (1-4).}$$

Тогда

$$z_i - \text{целое}, \quad (7)$$

$$z_i \geq 0. \quad (8)$$

Доказательство. Из (5) получаем

$$x_i = [x_{i0}] + \{x_{i0}\} + \sum_{j \in N} ([x_{ij}] + \{x_{ij}\})(-x_j).$$

Отсюда и из (6) получаем

$$-\{x_{i0}\} + \sum_{j \in N} (-\{x_{ij}\})(-x_j) = -x_i + [x_{i0}] + \sum_{j \in N} [x_{ij}](-x_j),$$

$$z_i = -x_i + [x_{i0}] + \sum_{j \in N} [x_{ij}](-x_j).$$

Из определения целой части следует $[x_{i0}], [x_{ij}] \quad \forall j \in N$ – целые. Из условия 2) теоремы следует x_i и x_j – целые ($j \in N$). Следовательно, z_i – целое число.

Теперь, допустим, что $z_i < 0$. Тогда из (6) получаем

$$-\{x_{i0}\} + \sum_{j \in N} \{x_{ij}\}x_j < 0.$$

Но из определения дробной части следует, что

$$1 > \{x_{ij}\} \geq 0,$$

а из условия 2) (x – план задачи (L^u, C)), что $x_j \geq 0$ ($j \in N$), откуда получаем (левую часть)

$$-1 < -\{x_{i0}\} + \sum_{j \in N} \{x_{ij}\} x_j < 0,$$

или, что то же самое

$$-1 < z_i < 0.$$

То есть, z_i не целое, а это противоречит уже доказанному. Следовательно, $z_i \geq 0$.

Теорема доказана.

Замечание. Если все c_j целые числа, то условия теоремы распространяются на случай $i = 0$.

Следствие. Пусть $x(L, C)$ не удовлетворяет условию целочисленности (4), так что для некоторого i ($1 \leq i \leq n$)

$$x_{i0} - \text{нецелое.} \quad (**)$$

Тогда соотношения (6), (8) задают правильное отсечение.

$$z_i = -\{x_{i0}\} + \sum_{j \in N} (-\{x_{ij}\})(-x_j) \geq 0, \\ z_i \geq 0.$$

Если гарантируется целочисленность целевой функции x_0 , то $0 \leq i \leq n$.

Доказательство.

1) Непосредственно из условий (6) и (8) теоремы следует правильность отсечения, т.е. все планы задачи (L^u, C) удовлетворяют (6) и (8).

2) Проверим условие отсечения. Подставим в (6) нецелочисленный оптимальный план задачи $x(L, C)$, и, учитывая, что ($j \in N$) $x_j(L^u, C) = 0$, получаем, используя (**),

$$z_i(x(L, C)) = -\{x_{i0}\} + 0 < 0,$$

что противоречит (8).

Следовательно, условие отсечения выполнено.

Схема метода отсечений выглядит следующим образом. Имеется задача (1-4) (L^u, C) . На начальном этапе отыскивается оптимальный план задачи (L_0, C) , которая получается отбрасыванием условия целочисленности, $\bar{x}(L_0, C)$.

Если этот план не является решением (L^u, C) , то строится правильное отсечение, отбрасывающее этот план, и решается задача (L_1, C) , на втором этапе (L_2, C) и т.д. ... (L_r, C) . Оптимальный план вспомогательной задачи линейного программирования (L_r, C) определяются неоднозначно, т.к. (L_r, C) может иметь много решений. Поэтому Гомори предложил вместо

задачи (L_r, C) решать l -задачу $(\overline{L}, \overline{C})$. А l -оптимальный план $\bar{x}(\overline{L}, \overline{C})$ определяется единственным образом.

Вычисления в методе Гомори проводятся в соответствии с l -методом.

Основной проблемой при использовании методов отсечений является рост числа ограничений. Гомори предложил приём, ограничивающий размеры расширенных симплексных таблиц до величины $(n+2) \times (k+1)$, где n – количество переменных в задаче (L_0, C) , а k – число небазисных переменных в ней.

Этот приём основан на том, что дополнительные ограничения (правильные отсечения)

$$a_r^T \bar{x} \leq \beta_r$$

интересует нас не сами по себе, а только как способ отсечения нецелочисленного оптимума $\bar{x}(L_r, C)$ и перехода от задачи (L_r, C) к задаче (L_{r+1}, C) .

Дополнительная переменная x_{n+r+1} ($r \geq 0$), связанная с правильным отсечением, выводится из базиса сразу же после введения ограничения

$$x_{n+r+1} \geq 0,$$

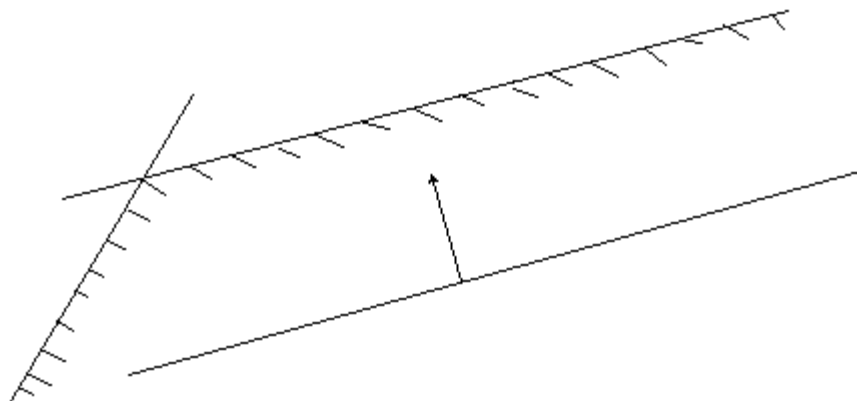
$$x_{n+r+1} = \beta_r - a_r^T x.$$

Идея Гомори заключается в следующем:

- Сразу же после вывода $x_{n+r+1} \geq 0$ из базиса ($r \geq 0$) соответствующая строка вычёркивается из расширенной симплексной таблицы.
- Если в ходе дальнейших вычислений x_{n+r+1} снова попадает в базис, то соответствующая строка в симплексной таблице не восстанавливается и в дальнейших вычислениях x_{n+r+1} не участвует.

Таким образом, число столбцов в таблице не превышает $k+1$ (равно), а число строк – $n+2$, где $n+1$ строка соответствует $x_0, x_1, \dots, x_n$ и одна – x_{n+r+1} в момент её включения.

Необходимо отметить, что алгоритм Гомори неприменим, если задача (L, C) имеет решение, но не имеет решения l -задача $(\overline{L}, \overline{C})$, т.е. множество оптимальных планов (L, C) не пусто, то и не ограничено (см. рис. 3.1).



Блок-схема алгоритма

1. Начальная итерация. Решаем l -задачу $(\overline{L}, \overline{C}) \equiv (\overline{L_0}, \overline{C})$. Если она неразрешима, то неразрешима и задача (L_0^y, C) . Если $(\overline{L_0}, \overline{C})$ разрешима и l -оптимальный план $\overline{x}(\overline{L_0}, \overline{C})$ удовлетворяет условию целочисленности, то $\overline{x}(\overline{L_0}, \overline{C})$ является оптимальным планом задачи (L_0^y, C) . Если $\overline{x}(\overline{L_0}, \overline{C})$ не удовлетворяет условию целочисленности, то переходим к общей итерации.

2. r -я общая итерация ($r \geq 0$). Пусть $\overline{x}(L_r, C)$ не удовлетворяет условию целочисленности. Мы ищем нормальную и допустимую симплексную таблицу $T_r = \|x_{ij}\|$, $i \in Q^n$, $j \in N_r^0$, из которой

$$x_i = x_{i0}^r + \sum_{j \in N} x_{ij}^r (-x_j), \quad i = \overline{0, n}.$$

Выберем наименьшую (по номеру) строку, которой соответствует нецелочисленная компонента

$$k = \min\{i \mid i = \overline{1, n}; \quad x_{i0}^r - \text{не целое}\}$$

(если целочисленность целевой функции гарантирована, то $i = \overline{0, n}$) и строится соответствующее правильное отсечение

$$x_{n+r+1} = -\{x_{k0}^r\} + \sum_{j \in N_r} (-\{x_{kj}^r\})(-x_j), \quad (*)$$

$$x_{n+r+1} \geq 0,$$

$$x_{n+r+1} - \text{целое}.$$

Строка приписывается снизу к таблице $T_r = \|x_{ij}\|$. Получается недопустимая (только по строке x_{n+r+1} !) и l -нормальная таблица, к которой применим l -метод. Причём после вывода x_{n+r+1} из базиса соответствующая строка вычёркивается, а после введения в базис x_l ($l \geq n+1$) соответствующая строка не восстанавливается.

Если в итоге получаем симплексную таблицу, которой соответствует неразрешимая задача ЛП, то и задача (L_0^y, C) неразрешима.

Если же получим допустимую и l -нормальную таблицу T_{r+1} , то проверяем соответствующий l -оптимальный опорный на целочисленность ($\overline{x}(L_{r+1}, C)$). Если $\overline{x}(L_{r+1}, C)$ удовлетворяет условию целочисленности, то он является оптимальным решением (L_0^y, C) , если нет, то переходим к $(r+1)$ -й итерации.

Пример 3.1. Решить следующую задачу целочисленного линейного программирования, используя первый алгоритм Гомори:

$$x_0 = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

при

$$2x_1 + 11x_2 \leq 38,$$

$$x_1 + x_2 \leq 7,$$

$$4x_1 - 5x_2 \leq 5,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2.$$

Решение:

Правильные отсечения в этом алгоритме строятся по правилу:

$$k = \min\{i \mid i \in \overline{1, n}; \quad x_{i0} - \text{не целое}\}$$

$$x_{n+r+1} = -\{x_{k0}^r\} + \sum_{j \in N_r} (-\{x_{kj}^r\})(-x_j).$$

0.

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_0 =$	0	-1	-1
$x_1 =$	0	-1	0
$x_2 =$	0	0	-1
$x_3 =$	38	2	11
$x_4 =$	7	1	1
$x_5 =$	5	4	-5

3.

	1	$-x_4$	$-x_6$
$x_0 =$	7	1	0
$x_1 =$	4	0	1
$x_2 =$	3	1	-1
$x_3 =$	-3	-11	9
$x_4 =$	0	-1	0
$x_5 =$	4	5	-9

1.

	1	$-x_4$	$-x_2$
$x_0 =$	7	1	0
$x_1 =$	7	1	1
$x_2 =$	0	0	-1
$x_3 =$	24	-2	9
$x_4 =$	0	-1	0
$x_5 =$	-23	-4	-9

4.

	1	$-x_3$	$-x_6$
$x_0 =$	74/11	1/11	9/11
$x_1 =$	4	0	1
$x_2 =$	30/11	1/11	-2/11
$x_3 =$	0	-1	0
$x_4 =$	3/11	-1/11	-9/11
$x_5 =$	29/11	5/11	-51/11
$x_7 =$	-8/11	-1/11	-9/11

2.

	1	$-x_4$	$-x_5$
$x_0 =$	7	1	0
$x_1 =$	40/9	5/9	1/9
$x_2 =$	23/9	4/9	-1/9
$x_3 =$	1	-6	1
$x_4 =$	0	-1	0
$x_5 =$	0	0	-1
$x_6 =$	-4/9	-5/9	-1/9

Отсечение по строке x_0 .

Отсечение по строке x_1 .

5.

	1	$-x_7$	$-x_6$
$x_0 =$	6	1	0
$x_1 =$	4	0	1
$x_2 =$	2	1	-1
$x_3 =$	8	-11	9
$x_4 =$	1	-1	0
$x_5 =$	-1	5	-9

6.

	1	$-x_7$	$-x_5$
$x_0 =$	6	1	0
$x_1 =$	35/9	5/9	1/9
$x_2 =$	19/9	4/9	-1/9
$x_3 =$	7	-6	1
$x_4 =$	1	-1	0
$x_5 =$	0	0	-1
$x_8 =$	-8/9	-5/9	-1/9

Отсечение строилось по строке x_1 .

7.

	1	$-x_7$	$-x_8$
$x_0 =$	6	1	0
$x_1 =$	3	0	1
$x_2 =$	3	1	-1
$x_3 =$	-1	-11	9
$x_4 =$	1	-1	0
$x_5 =$	8	5	-9

8.

	1	$-x_3$	$-x_8$
$x_0 =$	65/11	1/11	9/11
$x_1 =$	3	0	1
$x_2 =$	32/11	1/11	-2/11
$x_3 =$	0	-1	0
$x_4 =$	12/11	-1/11	-9/11
$x_5 =$	83/11	5/11	-54/11
$x_9 =$	-10/11	-1/11	-9/11

Отсечение по строке x_0 .

9.

	1	$-x_9$	$-x_8$
$x_0 =$	5	1	0
$x_1 =$	3	0	1
$x_2 =$	2	1	-1
$x_3 =$	10	-11	9
$x_4 =$	2	-1	0
$x_5 =$	3	5	-9

l -нормальная симплексная таблица с целочисленным планом.

Ответ: $L_{\min} = 5$; $x = (3, 2)^T$.

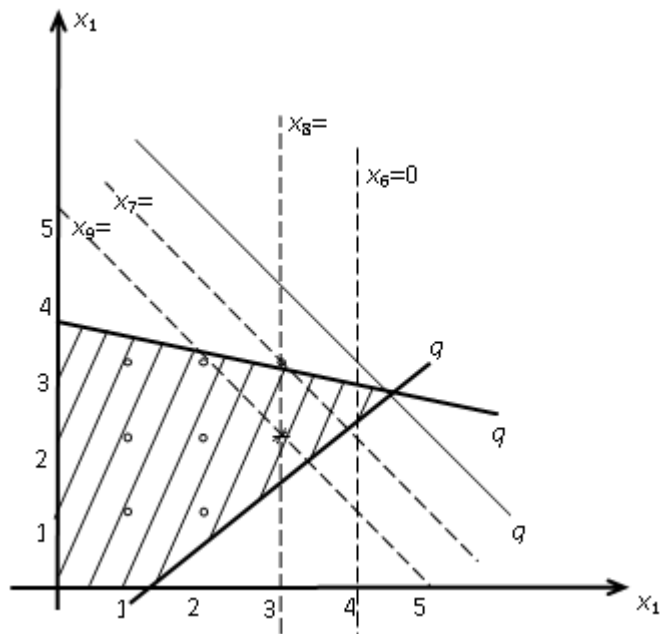


Рис. 3.2. Построение отсечений в задаче

На рисунке 3.2. продемонстрировано построение отсечений, последовательно отсекающих от допустимой области полученные нецелочисленные планы.

3.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОНЕЧНОСТИ ПЕРВОГО АЛГОРИТМА ГОМОРИ

Предполагается, что множество оптимальных планов задачи (L, C) ограничено.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) гарантирована целочисленность целевой функции $x_0 \equiv c^T x$ (например все c_j – целые, $j = 0, 1, 2, \dots, n$) и x_0 учитывается при выборе строки для построения правильного отсечения;
- 2) по крайней мере одно из следующих двух утверждений верно:
 - а) целевая функция x_0 ограничена снизу на L_0 ; (отсюда и из ограниченности множества оптимальных планов следует, что L_0 — многогранник).
 - б) задача (L_0^q, C) имеет хотя бы один план $\tilde{x}'$;

Тогда первый алгоритм Гомори требует лишь конечного числа больших итераций (итераций с построением отсечений).

Сначала 3 леммы.

Пусть $\tilde{x}(\overline{L_r}, \overline{C}) = \tilde{x}^r = (x_0^r, x_1^r, \dots, x_n^r)$ – l -оптимальный план задачи (L_r, C) . Обозначим $\hat{x}_r$ – псевдоплан, соответствующий таблице $\hat{T}_r$, которая

получается после вывода из базиса x_{n+r+1} и вычёркивания соответствующей строки.

Лемма 1. $\tilde{x}^r \succ \hat{x}^r \succ = \tilde{x}^{r+1}$.

Доказательство вытекает из правил l -метода (можно посмотреть по примеру).

Лемма 2. Числа x_i^r ($i = \overline{0, n}$) ограничены снизу.

Доказательство. При $i = \overline{1, n}$, это следует из $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$.

При $i = 0$ это следует из условия 2 теоремы. Если выполнено а), то лемма тривиально верна. Если же выполнено б), то заведомо

$$x^r \succ = x',$$

так что

$$x_0^r > x'_0$$

и лемма верна.

Лемма 3. Если $\bar{x}_r$ не удовлетворяет условию целочисленности и $x_p^r \equiv x_{p0}^r$ — не целое, то

$$(x_0^r, x_1^r, \dots, x_{p-1}^r, [x_p^r]) \succ = (x_0^r, x_1^r, \dots, x_p^r)$$

(следующая таблица после отсечения).

Доказательство. Пусть

$$k = \min\{i \mid i \in \{0, 1, \dots, n\}; \quad x_{i0}^r - \text{не целое}\}.$$

Тогда

$$k \leq p.$$

Далее, пусть

$$\frac{R_l^r}{\{x_{kl}^r\}} = \text{lex min} \left\{ \frac{R_j^r}{\{x_{kl}^r\}} \mid j \in N_r; \quad \{x_{kj}^r\} \neq 0 \right\}$$

(по существу выбор разрешающего столбца при переходе к $\hat{T}_r$) и

$$h(R_l^r) = \min\{i \mid i \in \{0, 1, \dots, n\}; \quad x_{il}^r \neq 0\}$$

(номер первой не нулевой компоненты столбца; R_l^r — разрешающий столбец и в нём элементы выше h равны 0, т.е. переходим к таблице $\hat{T}_r$, отсюда следует $\hat{x}_{i0}^r = x_{i0}^r$).

Так как $\{x_{kl}^r\} \neq 0$, то и $x_{kl}^r \neq 0$, и, следовательно,

$$h(R_l^r) \leq k \leq p.$$

Возможны два случая

$$1) h(R_l^r) \equiv q < p,$$

$$2) h(R_l^r) \equiv q = p.$$

В случае 1) $\hat{x}_q^r < x_q^r$ в силу правил l -метода

$$\begin{array}{rcl} x_0^r & = & \hat{x}_0^r \\ x_1^r & = & \hat{x}_1^r \\ \dots & & \dots \\ x_q^r & > & \hat{x}_q^r \\ \dots & & \dots \\ [x_p^r] & \geq & [\hat{x}_p^r] \end{array}$$

и лемма доказана.

В случае 2) $x_{pl}^r > 0$, так как таблица l -нормальна и $h(R_l^r) \leq k$, то $k = p$. В силу правил l -метода получаем.

$$\hat{x}_{i0}^r = x_{i0}^r \text{ при } i < k \text{ (выше } p \text{ в } R_l^r \text{ нули)}$$

$$\hat{x}_{k0}^r = x_{k0}^r - \frac{\{x_{kp}^r\}}{\{x_{kl}^r\}} x_{kl}^r.$$

Но так как $x_{kl}^r = x_{pl}^r > 0$, то $x_{kl}^r \geq \{x_{kl}^r\}$ и $\hat{x}_{k0}^r \leq x_{k0}^r - \{x_{k0}^r\} = [x_{k0}^r]$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы: Пусть последовательность

$$\bar{x}^0, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^r, \dots \quad (1)$$

бесконечна. Тогда (в силу лемм 1 и 2) найдётся такое число i_0 ($0 \leq i_0 \leq n$), такое число r_0 ($r_0 \geq 0$) и такая бесконечная последовательность

$$r_1 < r_2 < \dots < r_v < \dots \quad (r_1 \geq r_0), \quad (2)$$

что

$$x_i^{r+1} = x_i^r, \quad r \geq r_0, \quad 0 \leq i \leq i_0 - 1, \quad (3)$$

(перестала меняться)

$$x_{i_0}^{r_v+1} < x_{i_0}^{r_v}, \quad v = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Из леммы 1 и формулы (3) получается

$$x_{i_0}^{r+1} \leq x_{i_0}^r, \quad r \geq r_0 \quad (5)$$

(так как $x^{r+1} \preceq x^r$, а $x_i^{r+1} = x_i^r$, $r \geq r_0$, $0 \leq i \leq i_0 - 1$).

Из (4), (5) и леммы 2 (ограниченности чисел x_i^r) следует существование такого числа $r' \geq r_0$ и таких целых чисел z_0 и $z_0 + 1$, что

$$z_0 < x_{i_0}^r < z_0 + 1, \quad r \geq r'. \quad (6)$$

Из (3), (6) и леммы 3 получаем

$$x_{i_0}^{r+1} \leq \hat{x}_{i_0}^r \leq [x_{i_0}^r] = z_0,$$

а это противоречит (6) ($x_{i_0}^{r+1} \leq z_0$, а по (6) должно быть $x_{i_0}^{r+1} > z_0$).

Следовательно, последовательность планов не бесконечна и теорема доказана.

3.6. ВТОРОЙ АЛГОРИТМ ГОМОРИ

Он имеет дело с более широким классом задач. Рассматривается частично целочисленная задача линейного программирования.

$$\begin{cases} x_0 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_j - \text{целое}, \quad j = 1, \dots, n_1, \quad n_1 \leq n. \end{cases}$$

Теорема: Пусть последовательность $x(L_r, C) = x^r$ – оптимальный опорный план задачи (L_r, C) и

$$T_r = \|x_{ij}^r\|, \quad i \in Q^n, \quad j \in N_r,$$

(где $Q^n = \{0, 1, \dots, n\}$, $N_r = \{\text{индексы небазисных переменных}\}$) – соответствующая симплексная таблица, $1 \leq i \leq n_1$, x_{i0}^r – не целое.

Тогда неравенство

$$\sum_{j \in N_r} \gamma_j x_j \geq \gamma_0, \quad (1)$$

или, что то же самое,

$$z = -\gamma_0 + \sum_{j \in N_r} \gamma_j x_j, \quad (2)$$

$$z \geq 0 \quad (3)$$

является правильным отсечением. Здесь

$$\gamma_0 = \{x_{i0}^r\}, \quad (4)$$

$$\gamma_j = \begin{cases} \{x_{ij}^r\}, & j \leq n_1, \quad \{x_{ij}^r\} \leq \{x_{i0}^r\}, \\ \frac{\{x_{i0}^r\}}{1 - \{x_{ij}^r\}} (1 - \{x_{ij}^r\}), & j \leq n_1, \quad \{x_{ij}^r\} > \{x_{i0}^r\}, \\ x_{ij}^r, & j \geq n_1 + 1, \quad x_{ij}^r \geq 0, \\ \frac{\{x_{i0}^r\}}{1 - \{x_{ij}^r\}} (-x_{ij}^r), & j \geq n_1 + 1, \quad x_{ij}^r < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Доказательство:

1) Проверим условие отсечения. Действительно

$$\sum_{j \in N_r} \gamma_j x_j^r = \sum_{j \in N_r} \gamma_j \cdot 0 = 0 \not\equiv \gamma_0 = \{x_{i_0}^r\}$$

(не удовлетворяется) и условие отсечения выполнено.

2) Проверяем условие правильности (если $\bar{x}$ – план задачи (L_0^u, C) – то он удовлетворяет неравенству). Выпишем разложение x_i по небазисным переменным x_j

$$x_i = x_{i_0}^r + \sum_{j \in N_r} x_{ij}^r (-x_j).$$

Пусть

$$x_{ij}^r = \begin{cases} x'_{ij}, & j \in N_r, \quad j \geq n_1 + 1, \\ x'_{ij} + y_{ij}, & j \in N_r, \quad j \leq n_1, \end{cases}$$

где y_{ij} – некоторые целые числа, величины которых будут выбраны позже. Тогда

$$\begin{aligned} x_i - [x_{i_0}^r] + \sum_{\substack{j \in N_r \\ j \leq n_1}} y_{ij} x_j &= \{x_{i_0}^r\} + \sum_{j \in N_r} x'_{ij} (-x_j), \\ \{x_{i_0}^r\} + \sum_{j \in N_r} x'_{ij} (-x_j) &= z_i(\bar{x}), \\ z_i(x) &\text{— целое.} \end{aligned}$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned} N_r^+ &= \{j | j \in N_r; \quad -x'_{ij} > 0\} \equiv \{j | j \in N_r; \quad x'_{ij} < 0\} \\ N_r^- &= \{j | j \in N_r; \quad -x'_{ij} \leq 0\} \equiv \{j | j \in N_r; \quad x'_{ij} \geq 0\} \\ S^+(\bar{x}) &= \sum_{j \in N_r^+} (-x'_{ij}) x_j, \\ S^-(\bar{x}) &= \sum_{j \in N_r^-} (-x'_{ij}) x_j. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$S^+(x) \geq 0, \tag{6}$$

$$S^-(x) \leq 0. \tag{7}$$

(Это из того, что x – план задачи).

Эти неравенства можно переписать в следующем виде.

$$\frac{\{x_{i_0}^r\}}{1 - \{x_{i_0}^r\}} S^+(\bar{x}) \geq 0, \tag{8}$$

$$-S^-(x) \geq 0. \tag{9}$$

Далее получаем

$$\{x_{i_0}^r\} + S^+(\bar{x}) + S^-(\bar{x}) = z_i(\bar{x}), \quad z_i(x) \text{ — целое.}$$

Возможны два случая:

$$1) \quad S^+(\bar{x}) + S^-(\bar{x}) \geq 0,$$

$$2) S^+(\bar{x}) + S^-(\bar{x}) < 0.$$

Случай 1°.

$$S^+(\bar{x}) + S^-(\bar{x}) \geq 0.$$

Тогда

$$z_i(\bar{x}) \geq \{x_{i_0}^r\}$$

и в силу нецелочисленности $\{x_{i_0}^r\}$

$$z_i(\bar{x}) > 0,$$

а в силу целочисленности $z_i(x)$,

$$z_i(x) \geq 1,$$

так что

$$S^+(\bar{x}) + S^-(\bar{x}) \geq 1 - \{x_{i_0}^r\}$$

или из (9)

$$S^+(\bar{x}) \geq 1 - \{x_{i_0}^r\}$$

(т.к. $S^-(x) \leq 0$).

Это неравенство можно записать в следующем виде (умножить и поделить)

$$\frac{\{x_{i_0}^r\}}{1 - \{x_{i_0}^r\}} S^+(\bar{x}) \geq \{x_{i_0}^r\}. \quad (10).$$

Случай 2°.

$$S^+(\bar{x}) + S^-(\bar{x}) < 0.$$

Имеем

$$z_i(\bar{x}) < \{x_{i_0}^r\},$$

а в силу целочисленности $z_i(x)$,

$$z_i(x) \leq 0,$$

так что

$$\{x_{i_0}^r\} + S^+(\bar{x}) + S^-(\bar{x}) \leq 0.$$

Отсюда и из (6) ($S^+(\bar{x}) \geq 0$) получаем

$$-S^-(\bar{x}) \geq \{x_{i_0}^r\}. \quad (11)$$

Объединив в случае 1° неравенства (10) и (9), а в случае 2° – неравенства (11) и (8) получим

$$\frac{\{x_{i_0}^r\}}{1 - \{x_{i_0}^r\}} S^+(\bar{x}) - S^-(\bar{x}) \geq \{x_{i_0}^r\}$$

или, что то же самое,

$$\sum_{j \in N_r^+} \frac{\{x_{i_0}^r\}}{1 - \{x_{i_0}^r\}} (-x_{ij}') x_j + \sum_{j \in N_r^-} x_{ij}' x_j \geq \{x_{i_0}^r\}. \quad (12)$$

Неравенство (12) имеет вид

$$\sum_{j \in N_r} \gamma_j x_j \geq \{x_{i_0}^r\},$$

где $\gamma_j \geq 0$, причём $\gamma_j = \gamma_j(y_{ij})$ ($i \leq n_1$), а правая часть $\{x_{i_0}^r\}$ не зависит от выбора y_{ij} . Следовательно, каждое из чисел y_{ij} следует выбирать так, чтобы $\gamma_j(y_{ij})$ было наименьшим – в этом случае будет “отсечена” как можно большая часть многогранника.

Так как $x_{ij}' = x_{ij}^r - y_{ij}$, $j \in N_r$, $j \leq n_1$, так что

$$\gamma_j(y_{ij}) = \begin{cases} \frac{\{x_{i_0}^r\}}{1 - \{x_{i_0}^r\}} (y_{ij} - x_{ij}^r), & \text{если } y_{ij} - x_{ij}^r > 0, \\ x_{ij}^r - y_{ij}, & \text{если } x_{ij}^r - y_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Сразу можно выделить случай, когда x_{ij}^r – целое число. Можно положить $y_{ij} = x_{ij}^r$ и тогда

$$\gamma_j = \gamma_j(y_{ij}) = 0.$$

Это минимум $\gamma_j(y_{ij})$, т.к. $\gamma_j(y_{ij}) \geq 0$. Теперь допустим, что x_{ij}^r – не целое. Тогда

$$\min \left\{ \frac{\{x_{i_0}^r\}}{1 - \{x_{i_0}^r\}} (y_{ij} - x_{ij}^r) \mid y_{ij} - x_{ij}^r > 0 \right\} = \frac{\{x_{i_0}^r\}}{1 - \{x_{i_0}^r\}} (1 - \{x_{ij}^r\}),$$

$$\min \{x_{ij}^r - y_{ij} \mid x_{ij}^r - y_{ij} \geq 0\} = \{x_{ij}^r\}$$

(напомним, y_{ij} — целые). Какое из этих γ_j надо выбрать? Естественно, минимальное. Учитывая условие минимальности, получаем

$$\gamma_j = \min \left\{ \frac{\{x_{i_0}^r\}}{1 - \{x_{i_0}^r\}} (1 - \{x_{ij}^r\}), \{x_{ij}^r\} \right\}.$$

Рассмотрим линейную функцию

$$q(x) = \frac{\{x_{i_0}^r\}}{1 - \{x_{i_0}^r\}} (1 - x), \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$q(0) = \frac{\{x_{i_0}^r\}}{1 - \{x_{i_0}^r\}} > \{x_{i_0}^r\},$$

$$q(\{x_{i_0}^r\}) = \{x_{i_0}^r\},$$

$$q(1) = 0 < 1,$$

$$\text{т.е. } \min\{q(x), x\} = \begin{cases} x, & x \leq \{x_{i_0}^r\}, \\ q(x), & x > \{x_{i_0}^r\}, \end{cases}$$

Таким образом

$$\gamma_j(y_{ij}) = \begin{cases} \{x_{ij}^r\}, & \{x_{ij}^r\} \leq \{x_{i_0}^r\}, \\ \frac{\{x_{i_0}^r\}}{1 - \{x_{i_0}^r\}} (1 - \{x_{ij}^r\}), & \{x_{ij}^r\} > \{x_{i_0}^r\}. \end{cases}$$

Окончательно получаем:

$$\gamma_j = \begin{cases} \{x_{ij}^r\}, & j \leq n_1, \quad \{x_{ij}^r\} \leq \{x_{i_0}^r\}, \\ \frac{\{x_{i_0}^r\}}{1 - \{x_{i_0}^r\}} (1 - \{x_{ij}^r\}), & j \leq n_1, \quad \{x_{ij}^r\} > \{x_{i_0}^r\}, \\ x_{ij}^r, & j \geq n_1 + 1, \quad x_{ij}^r \geq 0, \\ \frac{\{x_{i_0}^r\}}{1 - \{x_{i_0}^r\}} (-x_{ij}^r), & j \geq n_1 + 1, \quad x_{ij}^r < 0. \end{cases}$$

Правило построения правильного отсечения: Пусть $\overline{x(L_r, C)}$ не удовлетворяет условию целочисленности и $\|x_{ij}^r\|$ – соответствующая ему симплексная таблица.

Выбираем

$$k = \min\{i \mid i \in \{1, \dots, n\}; \quad x_{i_0}^r - \text{не целое}\}$$

($i \in \{1, \dots, n_1\}$) и $i \in \{0, 1, \dots, n_1\}$ если гарантирована целочисленность целевой функции) и строим правильное отсечение

$$x_{n+r+1} \geq 0; \\ x_{n+r+1} = -\gamma_0 + \sum_{j \in N_r} (-\gamma_j)(-x_j).$$

γ_0 и γ_j определяется по (4) и (5) при $i = k$.

Что важно, не требуется, чтобы x_{n+r+1} было целым.

С помощью второго алгоритма можно решать и полностью целочисленные задачи ($n = n_1$). Но в этом случае нельзя сравнивать его по эффективности с первым.

Пример. Тот же пример (при всех целых)

$$x_0 = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

при

$$2x_1 + 11x_2 \leq 38,$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$4x_1 - 5x_2 \leq 54,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2.$$

x_i – целые.

Третья таблица:

	1	$-x_4$	$-x_5$
$x_0 =$	7	1	0
$x_1 =$	40/9	5/9	1/9
$x_2 =$	23/9	4/9	-1/9
$x_3 =$	1	-6	1
$x_4 =$	0	-1	0
$x_5 =$	0	0	-1
$x_6 =$	-20/45	-16/45	-5/45

Переменные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – целые. На x_6 и последующие переменные, связанные с построенными отсечениями, требование целочисленности не накладывается.

Отсечение строится по строке для x_1 :

$$\gamma_0 = \{x_{10}^3\} = \frac{4}{9} = \frac{20}{45};$$

$$\gamma_4 = \frac{\{x_{10}^3\}}{1 - \{x_{10}^3\}} (1 - \{x_{14}^3\}) = \frac{4/9}{1 - 4/9} (1 - 5/9) = \frac{16}{45};$$

$$\gamma_5 \Rightarrow \{x_{15}^3 = 1/9 \leq 4/9 = x_{10}^3\} \Rightarrow \gamma_5 = \frac{1}{9} = \frac{5}{45}.$$

	1	$-x_4$	$-x_6$
$x_0 =$	7	1	0
$x_1 =$	4	1/5	1
$x_2 =$	3	4/5	-1
$x_3 =$	-3	-46/5	9
$x_4 =$	0	-1	0
$x_5 =$	4	16/5	-9

	1	$-x_3$	$-x_6$
$x_0 =$	307/46	5/46	45/46
$x_1 =$	184/46	1/46	55/46
$x_2 =$	63/23	2/23	-5/23
$x_3 =$	0	-1	0
$x_4 =$	15/46	-5/46	-45/46
$x_5 =$	68/23	8/23	-135/23
$x_7 =$	-31/46	-5/46	-45/46

Отсечение строится по строке x_0 . Так как $5/46 < 31/46$, $\gamma_3 = \{x_{03}\} = \frac{5}{46}$. На

x_6 не наложено требование целочисленности, следовательно,

$$\gamma_6 = x_{06} = \frac{45}{46}.$$

	1	$-x_7$	$-x_6$
$x_0 =$	6	1	0
$x_1 =$	19/5	1/5	1
$x_2 =$	11/5	4/5	-1
$x_3 =$	31/5	-46/45	9
$x_4 =$	1	-1	0
$x_5 =$	4/5	16/5	-9
$x_8 =$	-4/5	-1/5	-1

Отсечение строится по строке x_1 . На x_6 и x_7 не наложено требование целочисленности.

	-1	$-x_7$	$-x_8$
$x_0 =$	6	1	0
$x_1 =$	3	0	1
$x_2 =$	3	1	-1
$x_3 =$	-1	-11	9
$x_4 =$	1	-1	0
$x_5 =$	8	5	-9

Таблица недопустима.

	1	$-x_3$	$-x_8$
$x_0 =$	65/11	1/11	9/11
$x_1 =$	3	0	1
$x_2 =$	32/11	1/11	-2/11
$x_3 =$	0	-1	0
$x_4 =$	12/11	-1/11	-9/11
$x_5 =$	83/11	5/11	-54/11
$x_9 =$	-10/11	-1/11	-9/11

Так как $1/11 < 10/11$, $\gamma_3 = \{x_{03}\} = \frac{1}{11}$. На x_8 не наложено требование целочисленности: $9/11 > 0$.

	1	$-x_9$	$-x_8$
$x_0 =$	5	1	0
$x_1 =$	3	0	1
$x_2 =$	2	1	-1
$x_3 =$	10	-11	9
$x_4 =$	2	-1	0
$x_5 =$	3	5	-3

Найден оптимальный план.

3.7. ТРЕТИЙ АЛГОРИТМ ГОМОРИ

Программная реализация 1-го и 2-го алгоритмов Гомори может привести к неправильному результату из-за ошибок округления или ошибок при подсчёте дробных частей.

Третий алгоритм Гомори свободен от влияния ошибок округления. Он предназначен для решения полностью целочисленной задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned}x_0 &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max ; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i ; \quad i = 1, 2, \dots, m ; \\ x_j &\geq 0 ; \quad j = 1, 2, \dots, n ; \quad x_j - \text{целые}.\end{aligned}$$

Схема 3-го алгоритма Гомори аналогична схемам, рассмотренным ранее. Отправляясь от начальной l -нормальной таблицы T_0 , с помощью итераций l -метода получают последовательность таблиц $T_0, T_1, \dots, T_s$, последняя из которых является допустимой.

Третий алгоритм называют ещё полностью целочисленным. Начальная таблица T_0 строится полностью целочисленной, а затем отыскивается целочисленное правильное отсечение. Дробные числа в следующей таблице получаются из-за присутствия в формулах преобразования операции деления. В этом случае целочисленность новой таблицы может быть гарантирована, если только разрешающий элемент будет равен (-1) . Это и делается в 3-ем алгоритме Гомори при построении отсечения. Его строят так, чтобы разрешающий элемент был равным (-1) .

Формулировка целочисленного правильного отсечения звучит следующим образом.

Пусть $T' = \|x'_{ij}\|_{i \in Q^n, j \in N^0}$ – недопустимая целочисленная таблица, l -нормальная. Тогда

$$z(\bar{x}) = r_0 + \sum_{j \in N} r_j (-x_j)$$

должно удовлетворять следующим условиям:

1. Условию целочисленности: r_j – целое, $\forall j \in N^0$.
2. Условию отсечения: $z(\bar{x}) = r_0 < 0$.
3. Условию правильности. Для любого плана $\bar{x}$ задачи (L^u, C) выполняется неравенство $z(\bar{x}) \geq 0$.

4. Условию сохранения целочисленности. Если среди чисел r_j ($j \in N$) есть отрицательные и $R_j = \begin{Bmatrix} x_{0j} \\ x_{1j} \\ \dots \\ x_{nj} \end{Bmatrix}$ - столбец матрицы T_i ($j \in N$) и $\frac{R_l}{|r_l|} = \text{lex} \min_{j \in N; r_j < 0; |r_j|} \frac{R_j}{|r_j|}$, то $r_j = -1$.

Это означает, что если строка $z(\bar{x})$ выбирается в качестве направляющей, то направляющий элемент равен (-1) .

Алгоритм определения оптимального плана можно выразить следующим образом. Начинают с исходной недопустимой таблицы T_0 . Затем, построив правильное целочисленное отсечение, удовлетворяющее условиям 1-4, переходят к таблице T_1 , затем к T_2 , и т.д. пока не получают допустимую таблицу. Как и прежде используются итерации l -метода. Ограничения, полученные из сформированного отсечения, приписываются снизу к соответствующей таблице. Вся последовательность таблиц, формируемая в процессе решения, является целочисленной и l -нормальной.

3.7.1. Построение целочисленного правильного отсечения для 3-го алгоритма гомори

Главным для 3-го алгоритма является построение отсечения, гарантирующего целочисленность следующей симплексной таблицы. Необходимо подчеркнуть, что 3-й алгоритм применяется к таблице T_0 (исходной), если она l -нормальна и целочисленна, т.е. все её коэффициенты целые. Следовательно, предварительно необходимо получить такую таблицу.

Целочисленное правильное отсечение строится на основании следующей теоремы.

Теорема: Пусть $\lambda > 0$, $y_0 = \alpha_0 + \sum_{j \in M} \alpha_j (-y_j)$, где M – конечное множество, $y_j \geq 0$, $j \in \{0\} \cup M$, y_j – целое, $j \in M$. Тогда $z \geq 0$; z – целое.

$$z = \left\lfloor \frac{\alpha_0}{\lambda} \right\rfloor + \sum_{j \in M} \left\lfloor \frac{\alpha_j}{\lambda} \right\rfloor (-y_j), \quad (*)$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – означает целую часть числа; $y_j \geq 0$, $j \in \{0\} \cup M$, y_j – целое, $j \in M$. Тогда $z \geq 0$; z – целое.

Доказательство. Целочисленность z получается прямо из выражения для него (*), где справа только целые величины и нет операций деления (y_j - целые, а $[\bullet]$ означает целую часть числа). Необходимо показать неотрицательность.

Допустим, что $z < 0$, тогда из целочисленности z следует, что $z \leq -1$. С другой стороны,

$$\frac{y_0}{\lambda} = \frac{\alpha_0}{\lambda} + \sum_{j \in M} \frac{\alpha_j}{\lambda} (-y_j),$$

а это можно представить в следующем виде:

$$\frac{y_0}{\lambda} + \sum_{j \in M} \left\{ \frac{\alpha_j}{\lambda} \right\} y_j = \left\{ \frac{\alpha_0}{\lambda} \right\} + z,$$

где $\{\bullet\}$ – дробная часть. Из этого и из того, что $z \leq -1$, получаем:

$$\frac{y_0}{\lambda} + \sum_{j \in M} \left\{ \frac{\alpha_j}{\lambda} \right\} y_j \leq \left\{ \frac{\alpha_0}{\lambda} \right\} - 1 < 0,$$

а это невозможно, так как $\lambda > 0$; $y_j \geq 0$, $j \in \{0\} \cup M$ и $\left\{ \frac{\alpha_j}{\lambda} \right\}$ – всегда неотрицательна.

Теорема доказана.

Используя теорему, можно построить целочисленное правильное отсечение, удовлетворяющее условиям (1-4).

Пусть задана целочисленная, недопустимая и l -нормальная таблица.

$$T = \|x_{ij}\|_{i \in Q^n; j \in N^0}$$

и пусть для некоторого k ($1 \leq k \leq n$)

$$x_{k0} < 0.$$

Положим $M=N$, $\alpha_j = x_{kj}$ ($j \in N^0$), $y_0 = x_k$, $y_j = x_j$ ($j \in N$),

$$\lambda > \max_{j \in N_0} |\alpha_j|,$$

так что

$$\left[\frac{\alpha_j}{\lambda} \right] = \begin{cases} 0, & \alpha_j \geq 0, \\ -1, & \alpha_j < 0, \end{cases}$$

и получим целочисленное правильное отсечение:

$$z \equiv z_k(\lambda, \bar{x}) = -1 + \sum_{\substack{j \in N \\ x_{kj} < 0}} (-1)(-x_j),$$

$$z \geq 0; \quad z - \text{целое.}$$

3.7.2. Построение начальной l -нормальной целочисленной симплексной таблицы

Мы уже говорили, что исходная таблица должна быть целочисленной и l -нормальной. Допустим, что построили таблицу T_0' для задачи целочисленного ЛП:

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ x_j - \text{целое}, \quad j = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Если T_0' l -нормальна, то можно переходить к итерациям алгоритма Гомори. Если нет, то можно воспользоваться следующим приёмом для получения l -нормальной целочисленной симплексной таблицы.

При условиях (**) ищут $\max \sum_{j=1}^n x_j$ и находят $\max \sum_{j=1}^n x_j = M'$.

Очевидно, что для всех шагов задачи (1) выполняется

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq [M'] \equiv M.$$

Следовательно, можно ввести новую переменную

$$x_{n+1} = M + \sum_{j=1}^n 1 \cdot (-x_j),$$

$$x_{n+1} \geq 0; \quad x_{n+1} - \text{целое}.$$

Строку x_{n+1} приписываем снизу к таблице T_0' и берём в качестве направляющей. Направляющим столбцом выбираем

$$R'_l = \text{lex} \min_{j \in \{1, \dots, n\}} R'_j.$$

где R'_l – столбец таблицы T_0' , соответствующий небазисной переменной.

Делаем одну итерацию l -метода, вычёркиваем строку x_{n+1} и получаем полностью целочисленную и l -нормальную таблицу T_0 . В дальнейшем, если переменная x_{n+1} вводится в базис, то соответствующая строка не восстанавливается.

3.7.3. Алгоритм

Итерация 0. Строится исходная таблица T_0 : $T_0 = \|x_{ij}\|_{i \in Q^n; j \in N^0}$, целочисленная и l -нормальная. Если T_0 является допустимой, то расширенный l -псевдоплан $\tilde{x}^0 = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0) = (x_{00}^0, x_{10}^0, \dots, x_{n0}^0)$ является расширенным оптимальным планом задачи (L^y, C) . Если T_0 не является допустимой, то переходим к 1-й итерации.

Итерация p ($p \geq 1$). Задана целочисленная и l -нормальная, но недопустимая таблица $T_{p-1} = \|x_{ij}^{p-1}\|_{i \in Q^n; j \in N_{p-1}^0}$. Столбцы T_{p-1} обозначаем

$$R_j^{p-1} = \begin{Bmatrix} x_{0j}^{p-1} \\ x_{1j}^{p-1} \\ \dots \\ x_{nj}^{p-1} \end{Bmatrix}.$$

Находим первую по номеру компоненту x_{i0}^{p-1} , нарушающую допустимость таблицы T_{p-1} ,

$$k = \min\{i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}; x_{i0}^{p-1} < 0\}. \quad (1)$$

Если числа $x_{kj}^{p-1} \geq 0, \forall j \in N_{p-1}$, то задача (L^y, C) неразрешима. Если же среди чисел x_{kj}^{p-1} есть отрицательные, то выбираем ведущий столбец R_l^{p-1}

$$R_l^{p-1} = \underset{j \in N_{p-1}; x_{kj} < 0}{\text{lex min}} R_j^{p-1} \quad (2)$$

и строим целочисленное правильное отсечение

$$x_{n+p} = \left\lfloor \frac{x_{k0}^{p-1}}{\lambda} \right\rfloor + \sum_{j \in N_{p-1}} \left\lfloor \frac{x_{kj}^{p-1}}{\lambda} \right\rfloor (-x_j); \quad (3)$$

$$x_{n+p} \geq 0, x_{n+p} - \text{целое.}$$

Строка x_{n+p} приписывается снизу к таблице, принимается за направляющую и осуществляется одна итерация l -метода.

Переменная x_{n+p} – выводится из базиса, а x_l – вводится. Стока x_{n+p} вычёркивается. Если $l \geq n+1$, то строку x_l не восстанавливаем. Получаем новую таблицу:

$$T_p = \|x_{ij}^p\|_{i \in Q^n; j \in N_p^0}$$

целочисленную и l -нормальную, $N_p = [N_{p-1} \setminus \{l\}] \cup \{(n+p)\}$.

Если таблица T_p окажется допустимой, то вектор $\bar{x}^p = (x_{00}^p, x_{10}^p, \dots, x_{n0}^p)$ является расширенным оптимальным планом задачи (L^q, C) . Если T_p – недопустима, то переходим к $(p+1)$ итерации.

3.7.4. Выбор λ

При выборе λ соблюдаются следующие условия.

1. Направляющий элемент должен быть равен (-1) :

$$\left[\frac{x_{kl}^{p-1}}{\lambda} \right] = -1. \quad (4)$$

2. Следующая таблица T_p должна быть l -нормальной:

$$R_j^p = R_j^{p-1} + \left[\frac{x_{kj}^{p-1}}{\lambda} \right] R_l^{p-1} \succ \bar{0}. \quad (5)$$

$\forall j \in \setminus \{(n+p)\} = N_{p-1} \setminus \{l\}$ – все остальные столбцы.

3. Столбец R_0^p должен быть l -минимальным:

$$R_0^p = R_0^{p-1} + \left[\frac{x_{k0}^{p-1}}{\lambda} \right] R_l^{p-1} \rightarrow \text{lex min}. \quad (6)$$

Замечание. Так как направляющий элемент равен (-1) и $R_l^{p-1} \succ \bar{0}$, то $R_{n+p}^p = R_l^{p-1} \succ \bar{0}$. Из п.1 следует положительность λ , т. к. $x_{kl}^{p-1} < 0$.

Как найти λ из условий (4-6)? Условие 4 можно переписать следующим образом

$$-1 \leq \frac{x_{kl}^{p-1}}{\lambda} < 0,$$

или

$$\lambda \geq -x_{kl}^{p-1}. \quad (4')$$

Условие (5) также можно упростить. Если $x_{kj}^{p-1} \geq 0$, то

$$\left[\frac{x_{kj}^{p-1}}{\lambda} \right] R_l^{p-1} \succ \bar{0}$$

и условие (5) выполняется при любом (положительном) λ .

Таким образом, достаточно рассматривать те $j \in N_{p-1} \setminus \{l\}$, для которых $x_{kj}^{p-1} < 0$. Теперь, пусть $\forall j \in N_{p-1}$

$$h(j) = \min \{ i \mid x_{ij}^{p-1} > 0 \}.$$

Из (2) (то есть, из того, что R_l – l -минимальный столбец) следует:

$$h(l) = \max\{h(j) \mid j \in N_{p-1}; x_{kj}^{p-1} < 0\}.$$

Если $h(j) < h(l)$, то, очевидно, что при любом λ

$$R_j^{p-1} + \left[\frac{x_{kj}^{p-1}}{\lambda} \right] R_l^{p-1} \succ \bar{0}.$$

Следовательно, достаточно рассмотреть лишь те $j \in N_{p-1} \setminus \{l\}$, для которых $x_{kj}^{p-1} < 0$ и $h(j) = h(l)$.

Обозначим множество таких j через N'_{p-1} :

$$N'_{p-1} = \{j \mid j \in N_{p-1} \setminus \{l\}; x_{kj}^{p-1} < 0; h(j) = h(l)\}.$$

Теперь условие (5) можно переписать следующим образом:

$$R_j^p \equiv R_j^{p-1} + \left[\frac{x_{kj}^{p-1}}{\lambda} \right] R_l^{p-1} \succ \bar{0}, \quad \forall j \in N'_{p-1}. \quad (5')$$

Если множество N'_{p-1} пусто, то условие (5') не накладывает никаких ограничений на (положительное) λ . Допустим, что множество N'_{p-1} не пусто. Тогда для каждого $j \in N'_{p-1}$ можно найти такое натуральное число z_j , что

$$R_j^{p-1} - (z_j + 1)R_l^{p-1} \prec \bar{0} \prec R_j^{p-1} - z_j R_l^{p-1}.$$

Заметим, что $R_j^{p-1} \neq zR_l^{p-1}$ ни при каком z . Действительно, если $R_j^{p-1} = zR_l^{p-1}$, то

$$\det \|x_{ij}^{p-1}\|_{i \in N^0; j \in N_{p-1}} = 0.$$

Но это невозможно, поскольку направляющие элементы у нас все время равны (-1) . Поэтому получим

$$\begin{aligned} \det \|x_{ij}^{p-1}\|_{i \in N_0; j \in N_{p-1}} &= \det \|x_{ij}^{p-2}\|_{i \in N_0; j \in N_{p-2}} = \\ &= \dots = \det \|x_{ij}^0\|_{i \in N_0; j \in N_0} = \det \begin{vmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Возможны четыре случая:

1) $x_{h(l)j}^{p-1} = x_{h(l)l}^{p-1}$. В этом случае $z_j = 1$.

2) $x_{h(l)j}^{p-1} = qx_{h(l)l}^{p-1} + r$, здесь q и r – натуральные числа, $r < x_{h(l)l}^{p-1}$.

В этом случае: $z_j = q$.

3) $x_{ij}^{p-1} = qx_{il}^{p-1}$, $i = h(l), h(l)+1, \dots, h(l)+t = s-1$, $x_{sj}^{p-1} > qx_{sl}^{p-1}$. Здесь натуральное $q \geq 2$. В этом случае $z_j = q$;

4) $x_{ij}^{p-1} = qx_{il}^{p-1}$, $i = h(l), h(l)+1, \dots, h(l)+t = s-1$, $x_{sj}^{p-1} < qx_{sl}^{p-1}$. Здесь натуральное $q \geq 2$. В этом случае $z_j = q-1$.

Вычислив z_j , можно переписать (5') следующим образом:

$$-\left[\frac{x_{kj}^{p-1}}{\lambda}\right] \leq z_j, \quad \forall j \in N'_{p-1},$$

или

$$\frac{x_{kj}^{p-1}}{\lambda} \geq -z_j, \quad \lambda \geq -\frac{x_{kj}^{p-1}}{z_j},$$

$$\max_j \left(-\frac{x_{kj}^{p-1}}{z_j} \mid j \in N'_{p-1} \right) = \theta \leq \lambda. \quad (5'')$$

И, наконец, так как $\lambda > 0$, $x_{k0}^{p-1} < 0$ и $R_l^{p-1} \succ \bar{0}$, то условие (6) можно переписать следующим образом:

$$\lambda \rightarrow \min. \quad (6')$$

Из (4'), (5''), (6') получаем:

$$\lambda = \max\{-x_{kl}^{p-1}, \theta\}. \quad (7)$$

Таким образом, целочисленное правильное отсечение строим по соотношению

$$x_{n+p} = \left[\frac{x_{k0}^{p-1}}{\lambda}\right] + \sum_{j \in N_{p-1}} \left[\frac{x_{kj}^{p-1}}{\lambda}\right] (-x_j); \quad (3)$$

$$x_{n+p} \geq 0, \quad x_{n+p} - \text{целое.}$$

А λ выбираем из условия:

$$\lambda = \max\{-x_{kl}^{p-1}, \theta\}. \quad (7)$$

где

$$\theta = \max_j \left(-\frac{x_{kj}^{p-1}}{z_j} \mid j \in N'_{p-1} \right). \quad (5'')$$

Пример. Применение 3-го алгоритма Гомори.

$$x_0 = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9,$$

$$-4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4,$$

$$5x_1 - 6x_2 + x_5 = 6,$$

$$x_i \geq 0, \quad x_i - \text{целые.}$$

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_0 =$	0	-1	-1
$x_1 =$	0	-1	0
$x_2 =$	0	0	-1
$x_3 =$	9	1	1
$x_4 =$	4	-4	7
$x_5 =$	6	5	-6

Выбрав в строке x_3 направляющий элемент, получим l -нормальную целочисленную, но недопустимую таблицу:

	1	$-x_3$	$-x_2$
$x_0 =$	9	1	0
$x_1 =$	9	1	1
$x_2 =$	0	0	-1
$x_3 =$	0	-1	0
$x_4 =$	40	4	11
$x_5 =$	-39	-5	-11
$x_6 =$	-4	-1	-1

Строим отсечение по строке x_5 . Лексикографически минимальный столбец:

$$\min_{x_{5j} < 0} R_j \rightarrow R_2.$$

$h(3)=0$, $h(2)=1$, $l=2$, $h(3)<h(2)$, следовательно, множество $N'_{p-1} = \emptyset$ и $\lambda = -x_{kl} = 11$,

$$x_6 = \left[-\frac{39}{11} \right] + \left[-\frac{5}{11} \right](-x_3) + \left[-\frac{11}{11} \right](-x_2) = -4 - 1(-x_3) - 1(-x_2).$$

	1	$-x_3$	$-x_6$
$x_0 =$	9	1	0
$x_1 =$	5	0	1
$x_2 =$	4	1	-1
$x_3 =$	0	-1	0
$x_4 =$	-4	-7	11
$x_5 =$	5	6	-11
$x_7 =$	-1	-1	1

Строим отсечение по строке x_4 . Лексикографически минимальный столбец:

$$\min_{x_{4j} < 0} R_j \rightarrow R_3.$$

Остальные $x_{kj} \geq 0$, следовательно, $\lambda = -x_{kl} = 7$, отсечение

$$x_7 = \left[-\frac{4}{7} \right] + \left[-\frac{7}{7} \right](-x_3) + \left[\frac{11}{7} \right](-x_6).$$

	1	$-x_7$	$-x_6$
$x_0 =$	8	1	1
$x_1 =$	5	0	1
$x_2 =$	3	1	0
$x_3 =$	1	-1	-1
$x_4 =$	3	-7	4
$x_5 =$	-1	6	-5
$x_8 =$	-1	1	-1

Строим отсечение по строке x_5 . Лексикографически минимальный столбец:

$$\min_{x_{5j} < 0} R_j \rightarrow R_6.$$

$$\lambda=5, \quad x_8 = \left[-\frac{1}{5} \right] + \left[\frac{6}{5} \right](-x_7) + \left[-\frac{5}{5} \right](-x_6)$$

	1	$-x_7$	$-x_8$
$x_0 =$	7	2	1
$x_1 =$	4	1	1
$x_2 =$	3	1	0
$x_3 =$	2	-2	-1
$x_4 =$	-1	-3	4
$x_5 =$	4	1	-5
$x_9 =$	-1	-1	1

$$\lambda=3, \quad x_9 = \left[-\frac{1}{3} \right] + \left[-\frac{3}{3} \right](-x_7) + \left[\frac{4}{3} \right](-x_8)$$

	1	$-x_9$	$-x_8$
$x_0 =$	5	2	3
$x_1 =$	3	1	2
$x_2 =$	2	1	1
$x_3 =$	4	-2	-3
$x_4 =$	2	-3	1
$x_5 =$	3	1	-4

План *допустим* и, следовательно, *оптимален*.

3.8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОНЕЧНОСТИ ТРЕТЬЕГО АЛГОРИТМА ГОМОРИ

Пусть задана полностью целочисленная задача линейного программирования (L^u, C)

$$x_0 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$x_j - \text{целые}, \quad j = \overline{1, n}.$$

И ее условия определяются целочисленной l -нормальной таблицей T_0 .

Теорема. Если существует план $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ задачи (L^u, C) , то третий алгоритм Гомори конечен.

Доказательство. По-прежнему обозначаем симплексную таблицу на шаге p :

$$T_p = \|x_{ij}^p\|_{i \in Q^n; j \in N_p^0};$$

где $N_p^0 = \{0\} \cup N_p$, а N_p – множество индексов небазисных переменных, $\tilde{x}^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$ – расширенный l -псевдоплан, соответствующий таблице T_p .

Далее, пусть $k_{p-1} = \min\{i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}; x_{i0}^{p-1} < 0\}$. Обозначим через l_{p-1} номер направляющего столбца на p -й итерации:

$$R_{l_{p-1}}^{p-1} = \text{lex} \min_{j \in N_{p-1}; x_{k_{p-1}, j}^{p-1} < 0} R_j.$$

Очевидно, что в силу правил l -метода:

$$x^0 \succ x^1 \succ x^2 \dots \succ x^p \succ \dots \succ x'. \quad (1)$$

Отсюда следует, что

$$x_0^p \geq x'_0, \quad p = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Далее, существует такое p_0 , что

$$x_0^{p-1} \geq x_0^p, \quad \text{при } p \geq p_0. \quad (3)$$

Это, действительно, так, потому что x_0^p – целое при любом p , а следовательно, целое и

$$(x_0^{p-1} - x_0^p) \geq 0.$$

А это значит, что количество итераций p , для которых

$$(x_0^{p-1} - x_0^p) \geq 0,$$

не превышает $x_0^0 - x'_0$, отсюда и следует (3) (т.к. на каждой итерации x_0 меняется).

Допустим теперь, что количество итераций бесконечно. Тогда найдутся такие $d_1 \geq 1$ и $p_1 \geq 1$, что:

$$1) \ x_i^{p-1} = x_i^p, \quad p \geq p_1, \quad i = 0, 1, \dots, d_1 - 1 \quad (4)$$

(i -е компоненты перестают меняться);

2) найдется сколь угодно большое p , для которого

$$x_{d_1}^{p-1} \neq x_{d_1}^p, \quad p \geq p_1. \quad (5)$$

Из (1), (4) и (5) имеем

$$x_{d_1}^{p-1} \geq x_{d_1}^p, \quad p \geq p_1. \quad (6)$$

Следовательно, найдется такое $p_2 \geq p_1$, что

$$x_i^{p-1} = x_i^p, \quad p \geq p_2, \quad i = 0, 1, \dots, d_1 - 1, \quad (7)$$

$$x_{d_1}^{p-1} < 0, \quad p \geq p_2. \quad (8)$$

Рассмотрим q -ю итерацию при $q \geq p_2$. Из (8) следует, что:

$$x_{d_1}^{q-1} < 0, \quad (9)$$

$$k_{q-1} \leq d_1, \quad (10)$$

а отсюда в силу отрицательности $x_{k_{q-1}l_{q-1}}^{q-1}$ и лексикографической положительности $R_{l_{q-1}}^{l-1}$ получаем:

$$h(l_{q-1}) = \min \{ i \mid i \in \{0, 1, \dots, n\}; x_{il_{q-1}}^{q-1} > 0 \} \leq d_1 - 1. \quad (11)$$

Из (11) следует, что

$$x_{h(l_{q-1})}^q \leq x_{h(l_{q-1})}^{q-1} - 1, \quad \text{где } h(l_{q-1}) \leq d_1 - 1, \quad q \geq p_2 \quad (12)$$

(в силу целочисленности отсечений соответствующий элемент в новой таблице хотя бы на 1 меньше).

Сравнивая (7) и (12), получаем противоречие. Следовательно, конечность третьего алгоритма доказана.

Третий алгоритм Гомори может оказаться не конечным, если множество планов задачи (L'', C) пусто или пусто даже множество планов задачи (L, C) . Финкельштейном предложена небольшая и естественная модификация, гарантирующая конечность при соблюдении следующих условий:

1. Построена исходная целочисленная и l -нормальная таблица T_0 .
2. Множество D планов задачи (L, C) ограничено. В силу ограниченности множества D можно методами линейного программирования найти $\min_{\bar{x} \in D} x_0 = M$.

Если задача минимизации x_0 на D неразрешима, то неразрешима и задача (L'', C) .

Если же эта задача разрешима, то для любого плана задачи (L'', C) получаем $x'_0 = x_0 -]M[\geq 0$, где $]M[$ – наименьшее целое число, не меньшее M . В исходной таблице T_0 x_0 заменяется на x'_0 (компоненты исходного оптимального плана от этого не изменятся). Теперь при проверке допустимости таблицы T_p начинают с неотрицательности числа x_{00}^p . Если окажется при этом, что $x_{00}^p < 0$, то задача (L'', C) неразрешима (т.к. все элементы в 0-строке не отрицательны в столбцах небазисных переменных).

4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

Задача формулируется следующим образом. Необходимо найти точку $\bar{x}_0$, в которой целевая функция достигает **min** или **max** на заданном множестве значений $D \subset R^n$, т.е.

$$\left. \begin{aligned} Q(\bar{x}) &\rightarrow \min(\max) \\ \text{при } \varphi_i(\bar{x}) &= \varphi_i^*, i = \overline{1, m}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Допустимое множество, на котором определен критерий

$$D = \{\bar{x} \mid \varphi_i(\bar{x}) = \varphi_i^*, i = \overline{1, m}\}.$$

Структура его зависит от соотношения числа уравнений m и числа неизвестных n . Соотношение $d = n - m$ называют дефектом системы.

При $d = 0$, если система уравнений $\varphi_i(\bar{x}) = \varphi_i^*$ является совместной, то D представляет собой совокупность корней данной системы уравнений. В этом случае для решения задачи (1) достаточно просмотреть эту совокупность и выбрать ту точку, в которой $Q(x)$ достигает оптимального значения. Если система линейна, то она имеет единственный корень. Если нелинейна, то число корней может быть сколь угодно большим. Например, см. рисунки 4.1-4.2.

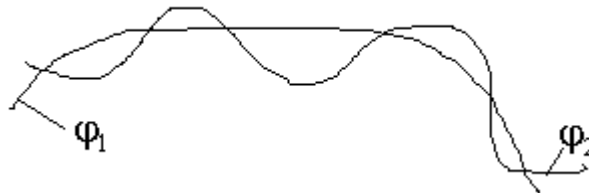


Рис. 4.1. Некоторое множество изолированных корней



Рис. 4.2. Бесконечное множество корней

При положительном дефекте в случае линейной системы $\varphi_i(\bar{x}) = \varphi_i^*$ и $d = 1$ множество D представляет собой прямую, в случае $d = 2$ – плоскость, при $d = 3$ – многогранник типа конуса и т.д.

В случае нелинейной системы при $d = 1$ множество D представляет собой некоторую кривую, при $d = 2$ – поверхность, при $d = 3$ и более – конус.

Вообще говоря, задачу (1) можно решать и приближенно, переходя к задаче с ограничениями в виде неравенств

$$\left. \begin{array}{l} Q(\bar{x}) \rightarrow \min(\max) \\ npu \quad |\varphi_i(\bar{x}) - \varphi_i^*| \leq \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, m}. \end{array} \right\}$$

При $d > 0$ для решения задачи (1) обычно, если это удастся, поступают следующим образом. Пусть имеется задача (1) с системой ограничений

$$\varphi_i(\bar{x}) = \varphi_i^*, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

причем $d > 0$, т.е. $m < n$. Система ограничений совместна и лишних ограничений нет. Тогда часть переменных, а именно m , выразим в явном виде из (2) через другие $n - m$, т.е.

[illegible]

В критерий $Q(x)$ вместо переменных $x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n$ подставляем выражения из (3)

$$Q(\bar{x}) = Q(x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), \dots, \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_{n-m})).$$

В результате получаем задачу безусловной оптимизации меньшей размерности

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), \dots, \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_{n-m})) \rightarrow \min(\max).$$

92

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial Q(\cdot)}{\partial x_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial Q(\cdot)}{\partial x_{n-m}} = 0 \end{array} \right\}. \quad (4)$$

4.2. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Самое сложное при рассмотренном подходе – разрешить систему ограничений, представив ее в виде (3). Далеко не всегда удастся получить разрешение в форме (3) в элементарных функциях. Вопрос о том, когда функции $\psi_i()$ существуют, дает **теорема о неявных функциях**.

Пусть все функции $\varphi_i(\bar{x}) \in C^1$. Рассмотрим первые частные производные этих функций. Эти производные можно рассматривать как элементы прямоугольной матрицы размерности $m \times n$

$$\Phi = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right]_{m \times n}.$$

Из нее можно выделить $n! / m!(n-m)!$ различных подматриц порядка m . Например,

$$\mathbf{J}_{\bar{x}}(j_1, j_2, \dots, j_m) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{j_1}} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{j_m}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{j_1}} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{j_m}} \end{bmatrix}.$$

Эта матрица называется якобианом функций $\varphi_i(\bar{x})$ по переменным $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$. Индекс $\bar{x}$ указывает на точку, в которой вычислены элементы якобиана.

Пусть $k_1, k_2, \dots, k_{n-m}$ множество индексов из числа $1, 2, \dots, n$, не принадлежащих множеству $j_1, j_2, \dots, j_m$.

Теорема о неявных функциях. Пусть $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T \in E_n$ обладает следующими свойствами:

- 1) в некоторой δ -окрестности точки x^0 функции $\varphi_i(\bar{x}) \in C^1$, $i = \overline{1, m}$;
- 2) $\varphi_i(\bar{x}^0) = 0$, $i = \overline{1, m}$;
- 3) матрица $\mathbf{J}_{x^0}(j_1, j_2, \dots, j_m)$ – неособенная.

Тогда существует ε -окрестность ($\varepsilon > 0$) точки $\hat{x}^0 = (x_{k_1}^0, x_{k_2}^0, \dots, x_{k_{n-m}}^0)^T$ из E_{n-m} такая, что для любой точки $\hat{x} = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_{n-m}})^T$ из этой ε -

окрестности существуют однозначные и непрерывные в точке $\hat{x}^0$ функции $\psi_1(\hat{x}), \psi_2(\hat{x}), \dots, \psi_m(\hat{x})$, обладающие свойствами:

А) $x_{j_i}^0 = \psi_i(\hat{x}_0), i = \overline{1, m}$;

Б) при любом $\hat{x}$ из ε -окрестности x^0 значения $\hat{x}_{j_i}, i = \overline{1, m}$, вычисленные по $x_{j_i} = \psi_i(\hat{x})$ вместе с компонентами вектора $\hat{x}$ образуют вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий $\varphi_i(\bar{x}) = 0, i = \overline{1, m}$;

В) в ε -окрестности $\hat{x}^0$ функции $\psi_i(\hat{x})$ дифференцируемы и при данных $k_r, r = \overline{1, (n-m)}$, производные $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_{k_r}}$ являются единственным решением системы уравнений

$$\sum_{u=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{j_u}} \frac{\partial \psi_u}{\partial x_{k_r}} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{k_r}}, i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Выведем необходимые условия, которым должна удовлетворять точка x^0 , доставляющая $Q(x)$ относительный максимум или минимум на множестве

$$D = \left\{ \bar{x} \mid \varphi_i(\bar{x}) = \varphi_i^*, i = \overline{1, m} \right\}.$$

Для того чтобы в дальнейшем найти абсолютный максимум или минимум, необходимо вычислить все относительные оптимумы и выбрать наилучший.

Рассмотрим для начала функцию двух переменных с одним ограничением. Пусть имеем $Q(x_1, x_2), \varphi(x_1, x_2) \in C^1$. Найдем необходимые условия, которым должна удовлетворять точка $\bar{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^T$, если в ней достигается относительный максимум (или минимум) при $\varphi(x_1, x_2) = \varphi^*$.

Допустим, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ или $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ не равна нулю в точке $\bar{x}^0$. Пусть

$\frac{\partial \varphi(\bar{x}_0)}{\partial x_2} \neq 0$. Тогда по теореме о неявных функциях существует ε -окрестность точки x_1^0 ($\hat{x}^0$), в которой можем разрешить $\varphi(x_1, x_2) - \varphi^* = 0$ относительно x_2 так, что $x_2 = \psi(x_1)$, где $\psi()$ – непрерывно дифференцируемая функция в окрестности точки x_1^0 , и $x_2^0 = \psi(x_1^0)$.

Следовательно, мы можем исключить x_2 в $Q(x_1, x_2)$. Имеем

$$h(x_1) = Q[x_1, \psi(x_1)]$$

для $|x_1 - x_1^0| < \varepsilon$. Но если $Q(x_1, x_2)$ имеет в точке x^0 относительный максимум при $\varphi(x_1, x_2) = \varphi^*$, то должно существовать такое число ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$, что для всех x_1 в ε_0 -окрестности точки x_1^0 справедливо

$$h(x_1) \leq h(x_1^0).$$

Следовательно, h имеет безусловный максимум в точке x_1^0 . (Аналогично для минимума).

Сложная функция h дифференцируема в окрестности x_1^0 и

$$\frac{\partial h(x_1^0)}{\partial x_1} = 0. \quad (6)$$

Дифференцируя h как сложную функцию, получим

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi / \partial x_1}{\partial \varphi / \partial x_2},$$

так как по теореме о неявных функциях

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = - \frac{\partial \varphi / \partial x_1}{\partial \varphi / \partial x_2}.$$

Из (6) следует

$$\frac{\partial Q(\bar{x}^0)}{\partial x_1} - \frac{\partial Q(\bar{x}^0)}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi(\bar{x}^0) / \partial x_1}{\partial \varphi(\bar{x}^0) / \partial x_2} = 0.$$

Обозначим

$$\lambda = \frac{\partial Q(\bar{x}^0) / \partial x_2}{\partial \varphi(\bar{x}^0) / \partial x_2}.$$

Таким образом, необходимо, чтобы точка $\bar{x}^0$ удовлетворяла уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q(\bar{x}^0)}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial \varphi(\bar{x}^0)}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial Q(\bar{x}^0)}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial \varphi(\bar{x}^0)}{\partial x_2} &= 0, \\ \varphi(\bar{x}^0) &= \varphi^*. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

То есть, удовлетворяла системе 3-х уравнений с тремя неизвестными: x_1^0 , x_2^0 и λ .

Решив систему, найдем все точки, где $Q(\bar{x})$ достигает относительного максимума или минимума при $\varphi(\bar{x}) = \varphi^*$.

Необходимые условия (7) удобнее получать, составив следующую функцию

$$F(\bar{x}, \lambda) = Q(\bar{x}) + \lambda[\varphi^* - \varphi(\bar{x})] \quad (8)$$

и приравняв 0 ее частные производные по x_1 , x_2 и λ .

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial Q(\bar{x}^0)}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial \varphi(\bar{x}^0)}{\partial x_j} = 0, \quad j=1,2, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi^* - \varphi(\bar{x}^0) = 0.$$

Функцию $F(\bar{x}, \lambda)$ называют функцией Лагранжа, а λ - множителем Лагранжа.

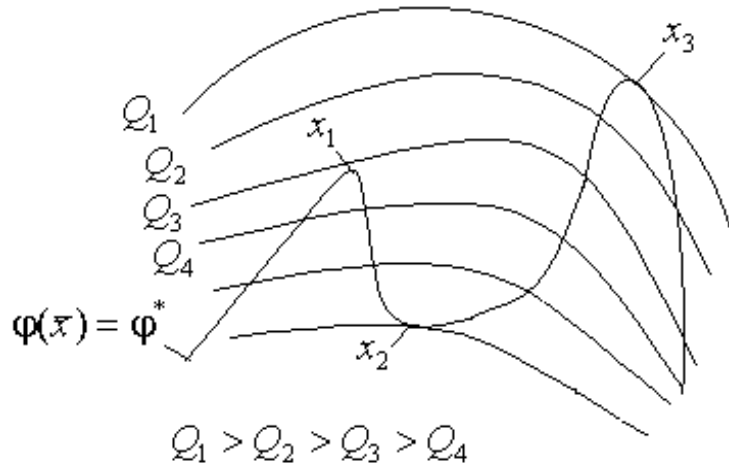


Рис. 4.4. Геометрическая иллюстрация: x_1, x_3 - относительные максимумы;

x_2 - относительный минимум

Рассмотрим общий случай с n переменными и $m < n$ ограничениями. Пусть в точке x^0 функция $Q(x)$ имеет относительный максимум или минимум для $x \in D$. Далее предположим, что в точке x^0 ранг матрицы

$$\Phi = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right]_{m \times n}$$

равен m . Для простоты будем считать, что матрица $J_{x^0}(1, 2, \dots, m)$ является неособенной (первые m столбцов).

Тогда по теореме о неявных функциях существует ε -окрестность точки $\hat{x}^0 = (x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0)^T$ такая, что для каждой точки $\hat{x}$ из этой ε -окрестности можно разрешить уравнения

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi^*, \quad i = \overline{1, m},$$

относительно $x_1, x_2, \dots, x_m$,

$$x_i = \psi_i(\hat{x}), \quad i = \overline{1, m},$$

причем функции ψ_i непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x^0 и

$$x_i^0 = \psi_i(\hat{x}^0), \quad i = \overline{1, m}.$$

Функция

$$h(\hat{x}) = Q[\psi_1(\hat{x}), \psi_2(\hat{x}), \dots, \psi_m(\hat{x}), \hat{x}]$$

имеет в точке $\hat{x}^0$ безусловный относительный максимум или минимум. Поэтому

$$\frac{\partial h(\hat{x}^0)}{\partial x_j} = 0, \quad i = \overline{(m+1), n}. \quad (9)$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{\partial Q}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial Q}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}, \quad i = \overline{(m+1), n}. \quad (10)$$

По теореме о неявных функциях производные $\partial \psi_i / \partial x_j$, $i = 1, 2, \dots, m$, для каждого j представляют собой решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

Имеем $n - m$ таких систем. Можно, конечно, решить систему (11) и результаты подставить в (10). Но поступим следующим образом. Рассмотрим набор чисел λ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, являющийся решением системы m уравнений

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(\bar{x}^0)}{\partial x_k} = \frac{\partial Q(\bar{x}^0)}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

Решение этой системы существует и единственно, так как матрица коэффициентов $\mathbf{J}_{x^0}(1, 2, \dots, m)$ по предположению неособенная. Умножим i -е уравнение из (11) на λ_i и просуммируем по i . Для каждого j , $j = m + 1, \dots, n$, получаем

$$\sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0. \quad (13)$$

Из (9) и (10) следует

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial Q(\bar{x}^0)}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_k(\bar{x}^0)}{\partial x_j} + \frac{\partial Q(\bar{x}^0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = m + 1, \dots, n. \quad (14)$$

Вычислим (13) в точке $\bar{x}^0$ и вычтем из (14), получим

$$\sum_{k=1}^m \left[\frac{\partial Q(\bar{x}^0)}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(\bar{x}^0)}{\partial x_k} \right] \frac{\partial \psi_k(\bar{x}^0)}{\partial x_j} + \frac{\partial Q(\bar{x}^0)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(\bar{x}^0)}{\partial x_j} = 0, \quad (15)$$

где $j = m + 1, \dots, n$.

Отсюда, используя (12), имеем

$$\frac{\partial Q(\bar{x}^0)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(\bar{x}^0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = m + 1, \dots, n. \quad (16)$$

Объединив (16) с (12) и ограничениями, получим, что точка $\bar{x}^0$, в которой достигается относительный максимум или минимум, должна удовлетворять следующей системе из $m + n$ уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q(\bar{x}^0)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(\bar{x}^0)}{\partial x_j} &= 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ \varphi_i(\bar{x}^0) &= \varphi_i^*, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Каждая точка $\bar{x}^0$, в которой достигается относительный максимум или минимум при $x \in D$, будет являться решением системы (17).

Необходимые условия можно получить, составив функцию Лагранжа

$$F(\bar{x}, \lambda) = Q(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [\varphi_i^* - \varphi_i(\bar{x})] \quad (18)$$

и приравняв 0 ее частные производные по всем x_j , $j = \overline{1, n}$, и по всем λ_i , $i = \overline{1, m}$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j} &= \frac{\partial Q}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} &= \varphi_i^* - \varphi_i(\bar{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \right\}$$

Построение таким образом необходимых условий называют методом множителей Лагранжа.

4.3. ТЕОРЕМА КУНА-ТАККЕРА

Пусть имеем задачу

$$Q(x) \rightarrow \min$$

при

$$\left. \begin{aligned} q_j(x) &\leq 0, \quad j = \overline{1, m}, \\ x &\geq \bar{0}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $Q(x)$ и $q_j(x)$ – выпуклые функции. Тогда эта задача называется задачей выпуклого программирования. Эту задачу кратко можно записать в виде

$$\min\{Q(\bar{x}) \mid \bar{x} \geq \bar{0}, q_j(\bar{x}) \leq 0, j = \overline{1, m}\} \quad (1^*)$$

или

$$\min\{Q(\bar{x}) \mid \bar{x} \in D\},$$

где

$$D = \{\bar{x} \mid \bar{x} \geq \bar{0}, q_j(\bar{x}) \leq 0, j = \overline{1, m}\}.$$

Задача максимизации вогнутой целевой функции

$$Q(x) \rightarrow \max$$

при

$$q_j(x) \geq 0, \quad j = \overline{1, m},$$

$$x \geq \bar{0},$$

где $q_j(x)$ – вогнутые функции, может быть представлена в виде (1), для чего достаточно умножить целевую функцию и ограничения на -1 .

Задача выпуклого программирования представляет собой наиболее благоприятный случай, так как если система ограничений совместна, то есть множество D не является пустым, то задача (1) имеет единственный экстремум.

Теорема Куна-Таккера представляет собой обобщение классического метода множителей Лагранжа, используемого для определения экстремума при наличии ограничений типа равенств, на случай, когда появляются ограничения типа неравенств.

Для задачи (1) запишем обобщенную функцию Лагранжа, которая представляет собой функцию $m + n$ переменных $(\bar{x}, \bar{\lambda})$

$$F(\bar{x}, \bar{\lambda}) = Q(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j q_j(\bar{x}). \quad (2)$$

Определение. Говорят, что функция $F(\bar{x}, \bar{\lambda})$ имеет в точке $(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0)$ седловую точку, если

$$F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}) \leq F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0) \leq F(\bar{x}, \bar{\lambda}^0) \quad (3)$$

для всех $\bar{x}$ из ε -окрестности $\bar{x}^0$ всех $\bar{\lambda}$ ε -окрестности $\bar{\lambda}^0$. Если неравенство (3) выполняется для всех $\bar{x}$ и $\bar{\lambda}$, то говорят, что $F(\bar{x}, \bar{\lambda})$ имеет в $(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0)$ глобальную седловую точку.

Теорему Куна-Таккера часто называют теоремой о седловой точке, т.к. задача минимизации функции $Q(x)$ соответствует задаче о нахождении седловой точки функции $F(\bar{x}, \bar{\lambda})$.

Теорема. Вектор $\bar{x}^0$ тогда и только тогда представляет собой решение задачи (1), когда существует вектор $\bar{\lambda}^0$ такой, что

$$\bar{x}^0 \geq \bar{0}, \quad \bar{\lambda}^0 \geq \bar{0}, \quad (4)$$

$$F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}) \leq F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0) \leq F(\bar{x}, \bar{\lambda}^0) \quad (5)$$

$$\forall \bar{x} \geq \bar{0}, \quad \bar{\lambda} \geq \bar{0},$$

Доказательство. Достаточность (4) и (5).

Пусть $\bar{x}^0 > \bar{0}$ и $\bar{\lambda}^0 > \bar{0}$ есть седловая точка функции $F(\bar{x}, \bar{\lambda})$. Подставим в (5) выражение $F(\bar{x}, \bar{\lambda})$ из (2):

$$Q(\bar{x}^0) + \sum_{j=1}^m \lambda_j q_j(\bar{x}^0) \leq Q(\bar{x}^0) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^0 q_j(\bar{x}^0) \leq Q(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^0 q_j(\bar{x}),$$

$$\forall \bar{x} \geq \bar{0}, \quad \bar{\lambda} \geq \bar{0}.$$

Так как левое неравенство должно выполняться $\forall \bar{\lambda} \geq \bar{0}$, то

$$q_j(\bar{x}) \leq 0, \quad j = \overline{1, m},$$

(т.е. $\bar{x}^0$ лежит в допустимой области) и

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j^0 q_j(\bar{x}^0) = 0.$$

Тогда правое неравенство приводится к виду

$$Q(\bar{x}^0) \leq Q(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^0 q_j(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \geq \bar{0}.$$

Отсюда, так как $\bar{\lambda}^0 > \bar{0}$, следует, что $Q(\bar{x}^0) \leq Q(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \geq \bar{0}$ таких, что $q_j(\bar{x}) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}$. Следовательно, $\bar{x}^0$ является решением задачи (1). Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Для доказательства необходимости используется предположение о регулярности допустимой области: существует по крайней мере одна допустимая точка $\bar{x}$ такая, что

$$q_j(\bar{x}) < 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (6)$$

Если $q_j(\bar{x})$ линейны, то предположение о регулярности излишне.

Пусть $\bar{x}^0 > \bar{0}$ является решением задачи (1). Покажем, что существует вектор $\bar{\lambda}^0 > \bar{0}$ такой, что $(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0)$ удовлетворяет (5). Для этого в пространстве R^{m+1} с координатами $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ построим два множества точек K^1 и K^2 :

$$K^1 = \left\{ \bar{y} \left| \begin{array}{l} y_0 \geq Q(\bar{x}), \\ y_1 \geq q_1(\bar{x}), \\ \dots, \\ y_m \geq q_m(\bar{x}), \end{array} \right. \text{ для некоторого } \bar{x} \geq \bar{0}, \right\}$$

$$K^2 = \left\{ \bar{y} \left| \begin{array}{l} y_0 < Q(\bar{x}^0), \\ y_1 < 0, \\ \dots, \\ y_m < 0. \end{array} \right. \right\}$$

Множества K^1 и K^2 , очевидно, выпуклы и в силу оптимальности $\bar{x}^0$ не пересекаются. Поэтому имеется разделяющая гиперплоскость

$$\bar{V}^T \bar{y} = \alpha, \quad \bar{V} \neq \bar{0}$$

такая, что

$$\begin{aligned} \bar{V}^T \bar{y}^1 &\geq \bar{V}^T \bar{y}^2 \\ \forall \bar{y}^1 \in K^1 \text{ и } \bar{y}^2 \in K^2. \end{aligned} \quad (7)$$

(Неравенство (7) остается справедливым и тогда, когда $\bar{y}^2$ лежит на границе K^2 .)

Так как по определению K^2 компоненты $\bar{y}^2$ могут принимать сколь угодно большие отрицательные значения, то из этого неравенства следует, что $\bar{V} \geq \bar{0}$. Выберем $\bar{y}^1$ и $\bar{y}^2$

$$\bar{y}^1 = (Q(\bar{x}), q_1(\bar{x}), \dots, q_m(\bar{x}))^T, \quad \bar{y}^2 = (Q(\bar{x}^0), 0, \dots, 0)^T.$$

Тогда получим

$$V_0 Q(x) + \sum_{j=1}^m V_j q_j(x) \geq V_0 Q(x^0), \quad \forall x \geq \bar{0}. \quad (8)$$

Отсюда $V_0 > 0$, ибо в противном случае $\forall x \geq \bar{0}$ было бы

$$\sum_{j=1}^m V_j q_j(x) \geq 0, \quad (\text{т.к. } Q(x) \geq Q(x^0)),$$

причем $V_j \geq 0$ для любого j и $V_j > 0$ по крайней мере для одного j . А

неравенство $\sum_{j=1}^m V_j q_j(x) \geq 0$ несправедливо в силу (6) хотя бы для одного $\tilde{x}$. Следовательно, $V_0 > 0$.

Разделим (8) на V_0 , положив $\lambda_j^0 = V_j/V_0$, $j = \overline{1, m}$:

$$Q(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^0 q_j(x) \geq Q(x^0) \quad (9)$$

или

$$F(x, \bar{\lambda}^0) \geq Q(x^0), \quad \forall x \geq \bar{0}, \quad (9)$$

причем $\lambda_j^0 \geq 0$. Положим в (9) $x = x^0$, тогда

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j^0 q_j(\bar{x}^0) \geq 0.$$

Но, так как $x^0 \in D$ и, следовательно, $q_j(x^0) \leq 0$, $\forall j$, то

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j^0 q_j(\bar{x}^0) = 0$$

и

$$F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0) = Q(\bar{x}^0). \quad (10)$$

Очевидно следующее неравенство

$$Q(\bar{x}^0) \geq Q(\bar{x}^0) + \sum_{j=1}^m \lambda_j q_j(\bar{x}^0) = F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}) \quad \text{для } \bar{\lambda} \geq \bar{0}. \quad (11)$$

Отсюда и из (9) получаем

$$F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}) \leq F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0) \leq F(\bar{x}, \bar{\lambda}^0) \quad \forall \bar{x} \geq \bar{0}, \bar{\lambda} \geq \bar{0}.$$

То есть получили (5). Необходимость доказана.

Если функции $Q(\bar{x})$ и $q_j(\bar{x})$ являются дифференцируемыми, то условия (4)-(5) эквивалентны следующим условиям Куна-Таккера:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0)}{\partial x_i} \geq 0, & \frac{\partial F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0)}{\partial \lambda_j} \leq 0, \\ x_i^0 \frac{\partial F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0)}{\partial x_i} = 0, & \lambda_j^0 \frac{\partial F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0)}{\partial \lambda_j} = 0, \\ x_i^0 \geq 0, & \lambda_j^0 \geq 0, \\ i = \overline{1, n}, & j = \overline{1, m}. \end{array} \right.$$

Или в векторной форме:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla_x F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0) \geq \bar{0}, & \nabla_\lambda F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0) \leq \bar{0}, \\ (\bar{x}^0)^T \nabla_x F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0) = 0, & (\bar{\lambda}^0)^T \nabla_\lambda F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0) = 0, \\ \bar{x}^0 \geq \bar{0}, & \bar{\lambda}^0 \geq \bar{0}. \end{array} \right.$$

4.4. КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

4.4.1. Условия Куна-Таккера для задачи квадратичного программирования

Задача квадратичного программирования представляет собой частный случай задачи нелинейного программирования, когда ограничения линейны, а целевая функция – сумма линейной и квадратичной форм:

$$Q(\bar{x}) = \bar{p}^T \bar{x} + \bar{x}^T C \bar{x} \rightarrow \min$$

при

$$q_j(\bar{x}) = a_j^T \bar{x} - b_j \leq 0, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\bar{x} \geq \bar{0},$$

где C - положительно полуопределенная матрица.

В отличие от линейных задач, где решение находится в угловой точке многогранника, в задаче квадратичного программирования оптимальная точка может быть на ограничении, где нормаль к гиперплоскости ограничения совпадает с направлением градиента, может быть внутри допустимой области.

Задача квадратичного программирования может быть записана в следующем виде:

$$\min \{ \bar{p}^T \bar{x} + \bar{x}^T C \bar{x} \mid A \bar{x} \leq \bar{b}, \bar{x} \geq \bar{0} \}. \quad (1)$$

Функция Лагранжа для нее имеет вид:

$$F(\bar{x}, \bar{\lambda}) = Q(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (a_j^T \bar{x} - b_j) = \bar{p}^T \bar{x} + \bar{x}^T C \bar{x} + \bar{\lambda}^T (A \bar{x} - \bar{b}). \quad (2)$$

Обозначим

$$\nabla_x F(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bar{V},$$

$$-\nabla_\lambda F(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bar{Y},$$

тогда

$$\bar{V} = \bar{p} + 2C\bar{x} + A^T\bar{\lambda} = \nabla_x F(\bar{x}, \bar{\lambda}), \quad (3)$$

$$\bar{Y} = -A\bar{x} + \bar{b} = -\nabla_{\lambda} F(\bar{x}, \bar{\lambda}). \quad (4)$$

Условия Куна-Таккера для задачи (1) будут иметь вид

$$\begin{cases} A\bar{x} + \bar{Y} = \bar{b}, \\ 2C\bar{x} - \bar{V} + A^T\bar{\lambda} = -\bar{p}, \\ \bar{x} \geq \bar{0}, \bar{V} \geq \bar{0}, \bar{Y} \geq \bar{0}, \bar{\lambda} \geq \bar{0}, \\ \bar{x}^T \bar{V} + \bar{Y}^T \bar{\lambda} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

так как

$$(\bar{x}^0)^T \nabla_x F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0) = 0,$$

$$(\bar{\lambda}^0)^T \nabla_{\lambda} F(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0) = 0.$$

Условия Куна-Таккера для задачи

$$\min\{\bar{p}^T \bar{x} + \bar{x}^T C\bar{x} \mid A\bar{x} = \bar{b}, \bar{x} \geq \bar{0}\}$$

имеют вид

$$\begin{cases} A\bar{x} = \bar{b}, \\ 2C\bar{x} - \bar{V} + A^T\bar{\lambda} = -\bar{p}, \\ \bar{x} \geq \bar{0}, \bar{V} \geq \bar{0}, \\ \bar{x}^T \bar{V} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Условия Куна-Таккера для задачи

$$\min\{\bar{p}^T \bar{x} + \bar{x}^T C\bar{x} \mid A\bar{x} \leq \bar{b}\}$$

имеют вид

$$\begin{cases} A\bar{x} + \bar{Y} = \bar{b}, \\ 2C\bar{x} + A^T\bar{\lambda} = -\bar{p}, \\ \bar{Y} \geq \bar{0}, \bar{\lambda} \geq \bar{0}, \\ \bar{Y}^T \bar{\lambda} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Допустимый n -мерный вектор $\bar{x}^0$ является решением задачи (1) в том и только в том случае, если совместно с n -мерным вектор $\bar{V}^0$ существуют два m -мерных вектора $\bar{\lambda}^0$ и $\bar{Y}^0$ такие, что $(\bar{x}^0, \bar{V}^0, \bar{\lambda}^0, \bar{Y}^0)$ является решением задачи (5).

Первые три соотношения в условиях (5) образуют линейную систему. Четвертое условие показывает, что из каждой пары переменных одна должна быть равна нулю. Таким образом, решения системы первых трех условий, которые образуют множество решений четвертого уравнения, содержат самое большее $m+n$ компонент отличных от нуля. И, таким образом, для решения системы (5), а также (6) или (7), можно воспользоваться видоизмененным симплексным методом.

4.4.2. Метод Баранкина и Дорфмана

Рассматривается задача квадратичного программирования вида:

$$\min\{\bar{p}^T \bar{x} + \bar{x}^T C \bar{x} \mid A\bar{x} \leq \bar{b}, \bar{x} \geq \bar{0}\}, \quad (1)$$

в которой C - положительно полуопределенная матрица размерности $n \times n$, A - матрица размерности $m \times n$. Условия Куна-Таккера для задачи (1) будут иметь вид

$$\begin{cases} A\bar{x} + \bar{Y} = \bar{b}, \\ 2C\bar{x} - \bar{V} + A^T \bar{\lambda} = -\bar{p}, \\ \bar{x} \geq \bar{0}, \bar{V} \geq \bar{0}, \bar{Y} \geq \bar{0}, \bar{\lambda} \geq \bar{0}, \end{cases} \quad (2)$$

и

$$\bar{x}^T \bar{V} + \bar{Y}^T \bar{\lambda} = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \nabla_x F(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bar{p} + 2C\bar{x} + A^T \bar{\lambda}, \\ \bar{Y} &= -\nabla_y F(\bar{x}, \bar{\lambda}) = -A\bar{x} + \bar{b}. \end{aligned}$$

Условие (3) может выполняться только для допустимого базисного решения системы (2), то есть для решения, в котором самое большее $N = n + m$ переменных из $2N = 2(n + m)$ переменных $\bar{x} \geq \bar{0}$, $\bar{V} \geq \bar{0}$, $\bar{Y} \geq \bar{0}$, $\bar{\lambda} \geq \bar{0}$ системы положительны.

Задача формулируется следующим образом: среди допустимых базисных решений системы (2) найти такое, которое обращает в нуль величину $\bar{x}^T \bar{V} + \bar{Y}^T \bar{\lambda}$.

Баранкин и Дорфман начинают с некоторого базисного решения системы (2), необязательно удовлетворяющего условию (3), и с помощью симплексных преобразований сводят к нулю выпуклую функцию $\bar{x}^T \bar{V} + \bar{Y}^T \bar{\lambda}$.

Алгоритм. Все переменные систем представим в виде $2N$ -мерного вектора

$$\bar{z}^T = (\bar{x}^T, \bar{Y}^T, \bar{V}^T, \bar{\lambda}^T) = (x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m, V_1, \dots, V_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

Каждому такому вектору соответствует вектор

$$\tilde{z}^T = (\bar{V}^T, \bar{\lambda}^T, \bar{x}^T, \bar{Y}^T),$$

то есть

$$\left. \begin{aligned} \tilde{z}_i &= z_{i+N} \\ \tilde{z}_{i+N} &= z_i \end{aligned} \right\} i = \overline{1, N}.$$

Очевидно,

$$\bar{x}^T \bar{V} + \bar{Y}^T \bar{\lambda} = \frac{1}{2} \bar{z}^T \bar{z},$$

и условия (2) и (3) можно записать в следующем виде

$$\begin{bmatrix} A & E & 0 & 0 \\ 2C & 0 & -E & A^T \end{bmatrix} \bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{p} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\bar{z} > \bar{0},$$

$$\bar{z}^T \bar{z} = 0. \quad (5)$$

Метод Баранкина и Дорфмана состоит в том, что исходя из некоторого базисного решения системы (4), совершают ряд симплексных преобразований, в результате каждого из которых выпуклая функция $T(\bar{z}) = \bar{z}^T \bar{z}$ уменьшается пока, наконец, не будет получено базисное решение со значением $T = 0$.

Пусть имеется некоторое допустимое базисное решение системы (4). Переменные входящие в базис обозначим z_g , независимые переменные (небазисные) $z_{v_h} = t_h$. Соответствующая симплексная таблица отразит функциональную зависимость z_g от t_h :

$$z_g = d_{g0} + \sum_{h=1}^N d_{gh} t_h. \quad (6)$$

Число таких равенств N . Их можно заменить векторным равенством, если дополнить симплексную таблицу строками для независимых переменных, в которых 1 будет стоять в столбце с этой переменной, а все остальные элементы строки – 0. Тогда переменные z_g , $g = \overline{1, 2N}$, будут входить в направляющий столбец (самый левый) в своей естественной последовательности. Таким образом в симплексной таблице для небазисных переменных $d_{gh} = 0$, $g \neq h$, $d_{hh} = 1$. В векторной форме

$$\bar{z} = \bar{d}_0 + \sum_{h=1}^N t_h \bar{d}_h,$$

где $\bar{d}_h$ – h -й столбец таблицы.

Для базисного решения, в котором независимые переменные равны нулю,

$$\bar{z} = \bar{d}_0 \geq \bar{0},$$

$$T = \bar{d}_0^T \bar{d}_0.$$

Если включить в базис, например, переменную t_j , то есть сделать ее базисной (>0), $t_j = \vartheta$, $\vartheta > 0$, сохраняя остальные t_h , $h \neq j$, небазисными и равными нулю, то вектор $\bar{z}$ изменится

$$\bar{z} = \bar{d}_0 + \vartheta \bar{d}_j.$$

Переменную t_j можно увеличивать до тех пор, пока какая-нибудь базисная переменная не обратится в нуль. Это произойдет при

$$\vartheta_j = \min \left\{ \frac{d_{g0}}{|d_{gj}|} \mid d_{gj} < 0 \right\}. \quad (7)$$

Положив $t_j = \vartheta_j$, получим новое базисное решение. Вектор $\bar{z}$ принимает следующее значение

$$\hat{z} = \bar{d}_0 + \vartheta_j \bar{d}_j, \quad (8)$$

а T – новое значение

$$T_j = T(\hat{z}) = (\bar{d}_0 + \vartheta_j \bar{d}_j)^T (\tilde{\bar{d}}_0 + \vartheta_j \tilde{\bar{d}}_j). \quad (9)$$

Так как

$$\bar{d}_j^T \tilde{\bar{d}}_0 = \sum_{i=1}^N d_{ij} d_{i+N,0} + \sum_{i=1}^N d_{i+N,j} d_{i,0} = \bar{d}_0^T \tilde{\bar{d}}_j, \quad (10)$$

то можно записать

$$T_j = \bar{d}_j^T \tilde{\bar{d}}_0 + 2\vartheta_j \bar{d}_j^T \tilde{\bar{d}}_0 + \vartheta_j^2 \bar{d}_j^T \tilde{\bar{d}}_j = T + \vartheta_j K_j, \quad (10)$$

где

$$K_j = 2\alpha_j + \vartheta_j \beta_j, \quad (11)$$

$$\alpha_j = \bar{d}_j^T \tilde{\bar{d}}_0, \quad (12)$$

$$\beta_j = \bar{d}_j^T \tilde{\bar{d}}_j. \quad (13)$$

Поскольку значение T должно уменьшаться при решении, то в базис надо вводить только такие переменные t_j , для которых $K_j < 0$. Это правило выбора. Если несколько чисел K_j отрицательны, то из них выбирают то, которому соответствует наименьшее по модулю отрицательное произведение $\vartheta_j K_j$.

Величины β_j по существу представляют собой вторые производные от T_j по t_j и в силу выпуклости T всегда неотрицательны. Поэтому K_j может быть меньше нуля, если $\alpha_j < 0$. Поэтому β_j и K_j необходимо искать лишь для j , где $\alpha_j < 0$.

Порядок вычислений. В первую очередь получают некоторое базисное решение, затем дополняют симплексную таблицу строками для небазисных переменных, упорядочивают таблицу, строят дополнительную таблицу (см. таблицу).

Таблица

	1	z_{v_1}	$\dots$	z_{v_N}
$x_1 = z_1$	d_{10}	d_{11}	$\dots$	d_{1N}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m = z_N$	d_{N0}	d_{N1}	$\dots$	d_{NN}
$v_1 = z_{N+1}$	$d_{N+1,0}$	$d_{N+1,1}$	$\dots$	$d_{N+1,N}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\lambda_m = z_{2N}$	$d_{2N,0}$	$d_{2N,1}$	$\dots$	$d_{2N,N}$
Дополнительная таблица	α_0	α_1	$\dots$	α_N
		β_1	$\dots$	β_N
		ϑ_1	$\dots$	ϑ_N
		K_1	$\dots$	K_N
		$\vartheta_1 * K_1$		$\vartheta_N * K_N$

В дополнительной таблице

$$\alpha_0 = T = \bar{d}_0^T \tilde{d}_0 = 2 \sum_{i=1}^N d_{i0} d_{i+N,0} . \quad (14)$$

Если $\alpha_0 = 0$, то таблица оптимальна и вектор $\bar{x}$ есть решение. В противном случае отыскиваем

$$\alpha_j = \bar{d}_j^T \tilde{d}_0 = \sum_{i=1}^N (d_{ij} d_{i+N,0} + d_{i+N,j} d_{i,0}) , \quad j = \overline{1, N} .$$

Для тех j , где $\alpha_j < 0$, вычисляем

$$\beta_j = \bar{d}_j^T \tilde{d}_j = 2 \sum_{i=1}^N d_{ij} d_{i+N,j} ,$$

$$\vartheta_j = \min \left\{ \frac{d_{g0}}{|d_{gj}|} \mid d_{gj} < 0 \right\} ,$$

$$K_j = 2\alpha_j + \vartheta_j \beta_j .$$

В качестве заменяющего столбца выбираем столбец с минимальным по модулю отрицательным значением $\vartheta_j K_j$. Эту переменную включаем в базис. Элемент d_{gj} , по которому определили $\vartheta_j \left(\vartheta_j = \frac{d_{g0}}{|d_{gj}|} \right)$, становится опорным элементом.

Примечание: Если все $K_j \geq 0$, а $\alpha_0 > 0$, то метод далее неприменим (невозможно перейти в другую вершину из-за увеличения T). В этом случае включаем в базис какую-нибудь переменную и пытаемся выйти из «мертвой зоны», либо выбираем в качестве начального другое базисное решение.

Если заменяющий столбец определен, дополнительная таблица больше не нужна.

Пусть опорный элемент d_{gj} . Преобразования таблицы проводятся по следующим правилам.

1. Наверху j -го столбца записываем переменную, стоящую слева в g -й строке.
2. Делим j -й столбец на d_{gj} и записываем на соответствующее место новой таблицы.
3. Для того, чтобы получить остальные столбцы новой таблицы необходимо из соответствующих столбцов старой таблицы вычесть новый j -й столбец, умноженный на коэффициент, стоящий на пересечении соответствующего столбца и g -й строки. g -я строка при этом превращается в строку, состоящую из всех нулей и одной 1.

Пример 1. Решить задачу квадратичного программирования вида:

$$\min\{\bar{p}^T \bar{x} + \bar{x}^T C \bar{x} \mid A\bar{x} \leq \bar{b}, \bar{x} \geq \bar{0}\},$$

$$\text{где } \bar{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Расширенная матрица, определяющая линейную систему

$$D = \begin{bmatrix} A & E & 0 & 0 \\ 2C & 0 & -E & A^T \end{bmatrix} \bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{p} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \bar{z} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Найдем базисное решение (опорный план), с которого продолжим решение методом Баранкина и Дорфмана. Воспользуемся для этого методом последовательного улучшения плана.

Исходная таблица:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	$-y_2$	$-V_1$	$-V_2$	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$
0=	6	2	3	1	0	0	0	0	0
0=	5	1	4	0	1	0	0	0	0
0=	1	1	0	0	0	-1	0	2	1
0=	2	0	1	0	0	0	-1	3	4

Исключаем 0-строки.

	1	$-x_2$	$-y_1$	$-y_2$	$-V_1$	$-V_2$	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$
$x_1 =$	3	1.5	0.5	0	0	0	0	0
0=	2	2.5	-0.5	1	0	0	0	0
0=	-2	-1.5	-0.5	0	-1	0	2	1
0=	2	1	0	0	0	-1	3	4

	1	$-y_1$	$-y_2$	$-V_1$	$-V_2$	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$
$x_1 =$	1.8	0.8	-0.6	0	0	0	0
$x_2 =$	0.8	-0.2	0.4	0	0	0	0
0=	-0.8	-0.8	0.6	-1	0	2	1
0=	1.2	0.2	-0.4	0	-1	3	4

	1	$-y_1$	$-y_2$	$-V_2$	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$
$x_1 =$	1.8	0.8	-0.6	0	0	0
$x_2 =$	0.8	-0.2	0.4	0	0	0
$V_1 =$	0.8	0.8	-0.6	0	-2	-1
0=	1.2	0.2	-0.4	-1	3	4

	1	$-y_1$	$-y_2$	$-V_2$	$-\lambda_2$
$x_1 =$	1.8	0.8	-0.6	0	0
$x_2 =$	0.8	-0.2	0.4	0	0
$V_1 =$	1.6	14/15	-13/15	-2/3	5/3
$\lambda_1 =$	0.4	1/15	-2/15	-1/3	4/3

Найден опорный план.

Составляем расширенную таблицу для метода Баранкина-Дорфмана.

Исходная таблица метода Баранкина-Дорфмана:

	1	y_1	y_2	V_2	λ_2
$x_1 =$	1.8	-0.8	0.6		
$x_2 =$	0.8	0.2	-0.4		
$y_1 =$	0	1			
$y_2 =$	0		1		
$V_1 =$	1.6	-0.93333	0.866667	0.666667	-1.66667
$V_2 =$	0			1	
$\lambda_1 =$	0.4	-0.06667	0.133333	0.333333	-1.33333
$\lambda_2 =$	0				1
α_0, α_j	5.76	-2.56	2.52	2	-3
β_j		1.36			0
ϑ_j		1.714286			0.3
K_j		-2.78857			-6
$\vartheta_j * K_j$		-4.78041			-1.8

При построении дополнительной таблицы вычисляем:

$$\alpha_0 = \bar{d}_0^T \tilde{d}_0,$$

$$\alpha_j = \bar{d}_j^T \tilde{d}_0,$$

$$\beta_j = \bar{d}_j^T \tilde{d}_j,$$

$$\vartheta_j = \min \left\{ \frac{d_{g0}}{|d_{gj}|} \mid d_{gj} < 0 \right\},$$

$$K_j = 2\alpha_j + \vartheta_j \beta_j.$$

Значения β_j , ϑ_j , K_j вычисляем только для столбцов, где $\alpha_j < 0$.

В качестве заменяющего столбца выбираем столбец с минимальным по модулю отрицательным значением $\vartheta_j K_j$.

	1	y_1	y_2	V_2	λ_1
$x_1 =$	1.8	-0.8	0.6	0	0
$x_2 =$	0.8	0.2	-0.4	0	0
$y_1 =$	0	1	0	0	0
$y_2 =$	0	0	1	0	0
$V_1 =$	1.1	-0.85	0.7	0.25	1.25
$V_2 =$	0	0	0	1	0
$\lambda_1 =$	0	0	0	0	1
$\lambda_2 =$	0.3	-0.05	0.1	0.25	-0.75
α_0, α_j	3.96	-2.41	2.22	1.25	2.25
β_j		1.36			
ϑ_j		1.294118			
K_j		-3.06			
$\vartheta_j * K_j$		-3.96			

Следующая таблица должна быть оптимальной, так как

$$\bar{T} = \bar{\alpha}_0 = \alpha_0 + \vartheta_1 K_1 = 3.96 - 3.96 = 0.$$

	1	V_1	y_2	V_2	λ_1
$x_1 =$	0.764706 =13/17	0.941176 =16/17	-0.05882 =-1/17	-0.23529 =-4/17	-1.17647 =-20/17
$x_2 =$	1.058824 =18/17	-0.23529 =-4/17	-0.23529 =-4/17	0.058824 =1/17	0.294118 =5/17
$y_1 =$	1.294118 =22/17	-1.17647 =-20/17	0.823529 =14/17	0.294118 =5/17	1.470588 =25/17
$y_2 =$	0	0	1	0	0
$V_1 =$	0	1	0	0	0
$V_2 =$	0	0	0	1	0
$\lambda_1 =$	0	0	0	0	1
$\lambda_2 =$	0.235294 =4/17	0.058824 =1/17	0.058824 =1/17	0.235294 =4/17	-0.82353 =-14/17
α_0	0				

Оптимальный план задачи: $x^T = (13/17, 18/17)$, $y^T = (22/17, 0)$,
 $V^T = (0, 0)$, $\bar{\lambda}^T = (0, 4/17)$.

4.4.3. Метод Франка и Вулфа

Метод предназначен для решения задачи вида:

$$\min\{\bar{p}^T \bar{x} + \bar{x}^T C \bar{x} \mid A\bar{x} \leq \bar{b}, \bar{x} \geq \bar{0}\},$$

в которой C – положительно полуопределенная матрица размерности $n \times n$, A – матрица размерности $m \times n$. Условия Куна-Таккера для этой задачи будут иметь вид

$$\begin{cases} A\bar{x} + \bar{Y} = \bar{b}, \\ 2C\bar{x} - \bar{V} + A^T \bar{\lambda} = -\bar{p}, \\ \bar{x} \geq \bar{0}, \bar{V} \geq \bar{0}, \bar{Y} \geq \bar{0}, \bar{\lambda} \geq \bar{0}, \end{cases}$$

и

$$\bar{x}^T \bar{V} + \bar{Y}^T \bar{\lambda} = 0,$$

где

$$\bar{V} = \nabla_x F(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bar{p} + 2C\bar{x} + A^T \bar{\lambda},$$

$$\bar{Y} = -\nabla_{\lambda} F(\bar{x}, \bar{\lambda}) = -A\bar{x} + \bar{b}.$$

Метод представляет собой дальнейшее развитие метода Баранкина и Дофмана. Метод действует без ограничений.

Требуется минимизировать

$$T(\bar{z}) = \bar{z}^T \tilde{\bar{z}} \tag{1}$$

при

$$B\bar{z} = \bar{d}, \tag{2}$$

$$\bar{z} > \bar{0},$$

где

$$B = \begin{bmatrix} A & E & 0 & 0 \\ 2C & 0 & -E & A^T \end{bmatrix}, \quad \bar{d} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{p} \end{bmatrix},$$

$$\bar{z}^T = (\bar{x}^T, \bar{Y}^T, \bar{V}^T, \bar{\lambda}^T) = (x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m, V_1, \dots, V_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m),$$

$$\tilde{\bar{z}}^T = (\bar{V}^T, \bar{\lambda}^T, \bar{x}^T, \bar{Y}^T).$$

Минимум $T(\bar{z})$ при ограничениях (2) достигается на некотором базисном решении (2) и равен нулю.

Вектор $\bar{x}$, составленный из компонент x_i оптимального вектора $\bar{z}^*$, является решением исходной задачи квадратичного программирования.

Работа алгоритма Франка и Вулфа начинается с некоторого базисного решения системы (2) $\bar{z}^0$ с соответствующей симплексной таблицей.

Функция $T(\bar{z}) = \bar{z}^T \tilde{\bar{z}}$ минимизируется по следующему рекуррентному правилу.

Пусть в результате k -го шага имеется некоторое допустимое базисное решение $\bar{z}^k$, удовлетворяющее системе (2), вместе с соответствующей симплексной таблицей. Пусть также имеется другое допустимое решение $\bar{w}^k$, удовлетворяющее системе (2), но не обязательно базисное, которому соответствует положительное значение функции T (на первом шаге полагаем $\bar{w}^0 = \bar{z}^0$). Исходя из базисного решения $\bar{z}^k$ симплексным методом при ограничениях (2) минимизируем линейную относительно $\bar{z}$ форму

$$\bar{z}^T \tilde{\bar{w}}^k. \quad (3)$$

В результате получим последовательность базисных решений

$$\bar{z}^0 = \bar{z}^k, \bar{z}^1, \bar{z}^2, \dots,$$

причем

$$(\bar{z}^0)^T \tilde{\bar{w}}^k > (\bar{z}^1)^T \tilde{\bar{w}}^k > (\bar{z}^2)^T \tilde{\bar{w}}^k > \dots$$

Метод обрывается, как только выполняется одно из условий:

$$1) \quad (\bar{z}^h)^T \tilde{\bar{z}}^h = 0; \quad (4)$$

$$2) \quad (\bar{z}^h)^T \tilde{\bar{w}}^k \leq \frac{1}{2} (\bar{w}^k)^T \tilde{\bar{w}}^k = \frac{1}{2} T(\bar{w}^k). \quad (5)$$

В первом случае $\bar{z}^h$ представляет собой окончательное решение $\bar{z}^*$. Во втором случае полагаем

$$\bar{z}^{k+1} = \bar{z}^h, \quad (6)$$

$$\bar{w}^{k+1} = \bar{w}^k + \mu(\bar{z}^{k+1} - \bar{w}^k), \quad (7)$$

где

$$\mu = \min \left\{ 1, \frac{(\bar{w}^k - \bar{z}^{k+1})^T \tilde{\bar{w}}^k}{(\bar{z}^{k+1} - \bar{w}^k)^T (\tilde{\bar{z}}^{k+1} - \tilde{\bar{w}}^k)} \right\}. \quad (8)$$

Франк и Вулф показали, что на каждом k -м шаге такого процесса, в конце концов, имеет место либо условие 1), либо условие 2). И что через конечное число шагов будет обязательно выполниться условие 1), так что метод приводит к решению.

$\bar{w}^{k+1}$ есть такая точка отрезка прямой между $\bar{w}^k$ и $\bar{z}^{k+1}$, в которой $T(\bar{z})$ достигает минимума на этом отрезке.

Если учесть, что

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 2\bar{z},$$

то есть в частном случае

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{z}=\bar{w}^k} = 2\bar{w}^k,$$

то видно, что линейная функция $\bar{z}^T \bar{w}^k$ получена линеаризацией функции T в точке $\bar{w}^k$ и градиенты их совпадают.

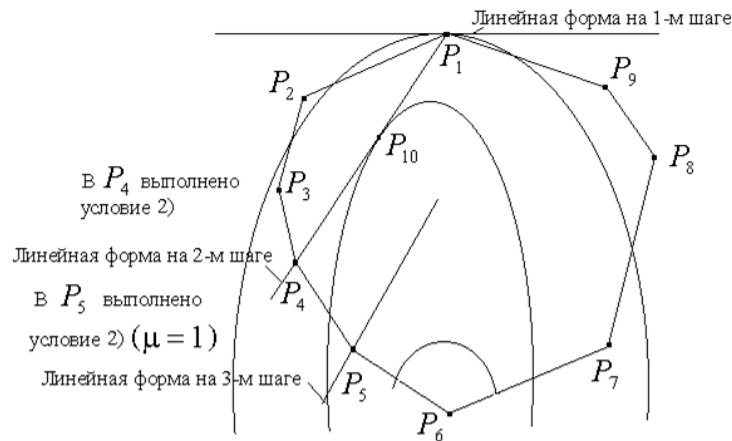


Рис. 1. Геометрическая интерпретация

Пример 2. Решить методом Фрака и Вулфа задачу квадратичного программирования вида:

$$\min \{ \bar{p}^T \bar{x} + \bar{x}^T C \bar{x} \mid A \bar{x} \leq \bar{b}, \bar{x} \geq \bar{0} \},$$

где

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} -10 \\ -20 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Решение. Точка безусловного минимума $\bar{x}^0 = -\frac{1}{2}C^{-1}\bar{p} = (2.5, 2)^T$ не принадлежит допустимой области. Расширенная матрица, определяющая линейную систему

$$D = \begin{bmatrix} A & E & 0 & 0 \\ 2C & 0 & -E & A^T \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{p} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \bar{z} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Найдем базисное решение (опорный план) системы $B\bar{z} = \bar{d}$, с которого продолжим решение методом Франка и Вулфа. Воспользуемся для этого методом последовательного улучшения плана.

Исходная таблица

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	$-y_2$	$-V_1$	$-V_2$	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$
0=	6	3	4	1	0	0	0	0	0
0=	8	5	1	0	1	0	0	0	0
0=	10	4	0	0	0	-1	0	3	5
0=	20	0	10	0	0	0	-1	4	1

Исключаем 0-строки. Из первых двух строк симплексной таблицы

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-V_1$	$-V_2$	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$
$y_1 =$	6	3	4	0	0	0	0
$y_2 =$	8	5	1	0	0	0	0
0=	10	4	0	-1	0	3	5
0=	20	0	10	0	-1	4	1

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-V_1$	$-V_2$	$-\lambda_1$
$y_1 =$	6	3	4	0	0	0
$y_2 =$	8	5	1	0	0	0
$\lambda_2 =$	2	0.8	0	-0.2	0	0.6
0=	18	-0.8	10	0.2	-1	3.4

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-V_2$	$-\lambda_1$
$y_1 =$	6	3	4	0	0
$y_2 =$	8	5	1	0	0
$\lambda_2 =$	20	0	10	-1	4
$V_1 =$	90	-4	50	-5	17

Найден опорный план.

Составляем симплексную таблицу для метода Франка и Вулфа:

$$\bar{z}^0 = \bar{w}^0 = (0, 0, 6, 8, 90, 0, 0, 20)^T, \quad \tilde{\bar{w}}^0 = (90, 0, 0, 20, 0, 0, 6, 8)^T,$$

$$(\bar{w}^0)^T \bar{w}^0 = 320 > 0, \quad \frac{1}{2}(\bar{w}^0)^T \bar{w}^0 = 160.$$

Для заполнения последней строки симплексной таблицы выражаем линейную форму $\bar{z}^T \tilde{\bar{w}}^0$ через небазисные переменные:

$$\begin{aligned} \bar{z}^T \tilde{\bar{w}}^0 &= 90z_1 + 20z_4 + 6z_7 + 8z_8 = \\ &= 90z_1 + 20(8 - 5z_1 - z_2) + 6z_7 + 8(20 - 10z_2 + z_6 - 4z_7) = \\ &= 320 - 10z_1 - 100z_2 + 8z_6 - 26z_7 \end{aligned}$$

Исходная таблица метода Франка и Вулфа

	1	$-z_1$	$-z_2$	$-z_6$	$-z_7$
$z_3 =$	6	3	4	0	0
$z_4 =$	8	5	1	0	0
$z_8 =$	20	0	10	-1	4
$z_5 =$	90	-4	50	-5	17
$\bar{z}^T \tilde{w}^0 =$	320	10	100	-8	26

Так, как 1) $(\bar{Z}^0)^T \tilde{w}^0 > 0$, то продолжим вычисления.

	1	$-z_4$	$-z_2$	$-z_6$	$-z_7$
$z_3 =$	1.2	-0.6	3.4	0	0
$z_1 =$	1.6	0.2	0.2	0	0
$z_8 =$	20	0	10	-1	4
$z_5 =$	96.4	0.8	50.8	-5	17
$\bar{z}^T \tilde{w}^0 =$	304	-2	98	-8	26

$$(\bar{Z}^1)^T = (1.6, 0, 1.2, 0, 96.4, 0, 0, 20),$$

- 1) $(\bar{Z}^1)^T \tilde{Z}^1 = 308.48 > 0$,
- 2) $(\bar{Z}^1)^T \tilde{w}^0 = 304 > 160 = \frac{1}{2}(\bar{w}^0)^T \tilde{w}^0$.

	1	$-z_4$	$-z_3$	$-z_6$	$-z_7$
$z_2 =$	6/17	-3/17	5/17	0	0
$z_1 =$	23/17	4/17	-1/17	0	0
$z_8 =$	280/17	30/17	-50/17	-1	4
$z_5 =$	1334/17	166/17	-254/17	-5	17
$\bar{z}^T \tilde{w}^0 =$	4580/17	260/17	-490/17	-8	26

- 1) $(\bar{Z}^2)^T \tilde{Z}^2 > 0$,
- 2) $(\bar{Z}^2)^T \tilde{w}^0 = 4580/17 > 160$.

	1	$-z_1$	$-z_3$	$-z_6$	$-z_7$
$z_2 =$	1.5	3/4	1/4	0	0
$z_4 =$	26/4	17/4	-1/4	0	0
$z_8 =$	5	-30/4	-2.5	-1	4
$z_5 =$	15	-166/4	-12.5	-5	17
$\bar{z}^T \tilde{w}^0 =$	170	-260/4	-25	-8	26

$$(\bar{Z}^3)^T = (0, 1.5, 0, 6.5, 15, 0, 0, 5),$$

$$1) \quad (\bar{Z}^3)^T \tilde{\bar{Z}}^3 = 65 > 0,$$

$$2) \quad (\bar{Z}^3)^T \tilde{\bar{W}}^0 = 170 > 160.$$

	1	$-z_1$	$-z_3$	$-z_6$	$-z_5$
$z_2 =$	1.5	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
$z_4 =$	26/4	17/4	-1/4	0	0
$z_8 =$	25/17	77/34	15/34	3/17	-4/17
$z_7 =$	15/17	-83/34	-25/34	-5/17	1/17
$\bar{Z}^T \tilde{\bar{W}}^0 =$	2500/17	-26/17	-100/17	-6/17	-26/17

Здесь выполнилось условие:

$$2) \quad (\bar{Z}^4)^T \tilde{\bar{W}}^0 = 2500 / 17 = 147.0588 < 160.$$

Следовательно, на следующем шаге метода:

$$(\bar{Z}^1)^T = (\bar{Z}^4)^T = (0, 1.5, 0, 26 / 4, 0, 0, 15 / 17, 25 / 17).$$

Находим на основании (8) находим:

$$\mu = \min \left\{ 1, \frac{(\bar{W}^0 - \bar{Z}^1)^T \tilde{\bar{W}}^0}{(\bar{Z}^1 - \bar{W}^0)^T (\tilde{\bar{Z}}^1 - \tilde{\bar{W}}^0)} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{172}{22.5} \right\} = 1,$$

где

$$(\bar{W}^0 - \bar{Z}^1)^T = (0, -1.5, 6, 1.5, 90, 0, -15 / 17, 315 / 17),$$

$$(\bar{W}^0)^T = (90, 0, 0, 20, 0, 0, 6, 8),$$

$$(\bar{Z}^1 - \bar{W}^0)^T = (0, 1.5, -6, -1.5, -90, 0, 15 / 17, -315 / 17),$$

$$(\tilde{\bar{Z}}^1 - \tilde{\bar{W}}^0)^T = (-90, 0, 15 / 17, -315 / 17, 0, 1.5, -6, -1.5).$$

На основании (7) при $\mu = 1$ получаем

$$(\bar{W}^1)^T = (\bar{Z}^1)^T = (0, 1.5, 0, 26 / 4, 0, 0, 15 / 17, 25 / 17).$$

Теперь необходимо минимизировать линейную функцию

$$\begin{aligned} \bar{Z}^T \tilde{\bar{W}}^1 &= 15 / 17 z_3 + 25 / 17 z_4 + 1.5 z_6 + 6.5 z_8 = \\ &= 15 / 17 z_3 + 25 / 17 (26 / 4 - 17 / 4 z_1 + 1 / 4 z_3) + 1.5 z_6 + \\ &+ 6.5 (25 / 17 - 77 / 34 z_1 - 15 / 34 z_3 - 3 / 17 z_6 + 4 / 17 z_5) = \\ &= 650 / 34 - 713 / 34 z_1 - 55 / 34 z_3 + 26 / 17 z_5 + 6 / 17 z_6. \end{aligned}$$

Строим следующую таблицу

	1	$-z_1$	$-z_3$	$-z_6$	$-z_5$
$z_2 =$	1.5	3/4	1/4	0	0
$z_4 =$	26/4	17/4	-1/4	0	0
$z_8 =$	25/17	77/34	15/34	3/17	-4/17
$z_7 =$	15/17	-83/34	-25/34	-5/17	1/17
$\bar{z}^T \tilde{w}^1 =$	650/34	713/34	55/34	-26/17	-6/17

- 1) $(\bar{Z}^0)^T \tilde{Z}^0 = (\bar{z}^1)^T \tilde{z}^1 = 325/17 > 0$,
- 2) $(\bar{Z}^0)^T \tilde{w}^1 = \bar{z}^T \tilde{w}^1 = 650/34 = 325/17$.

В следующей таблице заполним только первый столбец, так как она соответствует оптимальному решению.

	1	$-z_8$	$-z_3$	$-z_6$	$-z_5$
$z_2 =$	78/77				
$z_4 =$	288/77				
$z_1 =$	50/77				
$z_7 =$	190/77				
$\bar{z}^T \tilde{w}^1 =$	3600/289				

Оптимальный план:

$$(\bar{Z}^1)^T = \bar{z}^2 = (50/77, 78/77, 0, 288/77, 0, 0, 190/77, 0),$$

для которого выполняется условие (4):

$$(\bar{Z}^1)^T \tilde{Z}^1 = 0.$$

В то же время заметим, что условие (5) не выполняется:

$$(\bar{Z}^1)^T \tilde{w}^1 = 3600/289 > \frac{1}{2}(\bar{Z}^0)^T \tilde{w}^1 = 325/34.$$

Таким образом, оптимальный план задачи квадратичного программирования:

$$(\bar{x}^*)^T = (50/77, 78/77).$$

Подстановкой $\bar{Z}^1$ в условия Куна–Таккера можно убедиться, что они выполняются.

4.5. МЕТОД ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Исторически один из первых методов, предложенных для решения задачи выпуклого программирования.

Требуется решить задачу вида

$$\min\{f_0(\bar{x}) \mid f_i(\bar{x}) \leq 0, i = \overline{1, m}, A\bar{x} - \bar{b} = \bar{0}\}, \quad (1)$$

где $x \in E^n$, $f_i(x)$, $i = \overline{0, m}$, – выпуклые непрерывно дифференцируемые функции, $A_{l \times n}$ – матрица. Более того, предполагается, что градиенты функций $f_i(x)$, $i = \overline{0, m}$, удовлетворяют условию Липшица:

$$\|\nabla f_i(x_1) - \nabla f_i(x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\| \quad (2)$$

и $\|\nabla f_i(x)\| \leq K$ для всех встречающихся в дальнейшем точек x .

Допустимая область определяется множеством

$$D = \{\bar{x} \mid f_i(\bar{x}) \leq 0, i = \overline{1, m}, A\bar{x} - \bar{b} = \bar{0}\}.$$

В дальнейшем предполагается, что множество D компактно, так что условие ограниченности градиентов выполняется. Пусть некоторое $x_0 \in D$. Найдем направление $p \in E^n$ такое, что при малых α точка $x_0 + \alpha p \in D$ и, кроме того, $f_0(x_0 + \alpha p) < f_0(x_0)$. Такое направление называется *возможным*. Сделав вдоль этого направления некоторый шаг α_1 , получим новую точку $x_1 = x_0 + \alpha_1 p \in D$. Эту точку принимаем за начальную, и процесс повторяется. Для реализации такого алгоритма необходимо разработать эффективный метод нахождения возможных направлений и выбора шага α так, чтобы обеспечить сходимость к точке минимума.

Будем в дальнейшем предполагать, что задача (1) невырождена и существует такая точка x , что $f_i(x) < 0$, $i = \overline{1, m}$, $Ax - \bar{b} = \bar{0}$.

4.5.1. Метод выбора возможного направления

Положим

$$J_\delta^-(\bar{x}) = \{i \mid f_i(\bar{x}) \geq -\delta, i = \overline{1, m}\}$$

для каждой точки $x \in D$. Пусть $\xi_i > 0$, $i = \overline{0, m}$, – произвольные числа. Рассмотрим следующую задачу в каждой точке $x \in D$:

$$\begin{aligned} \min \eta, \\ (\nabla f_i(\bar{x}), \bar{p}) \leq \xi_i \eta, i \in J_\delta^-(\bar{x}) \cup \{0\}, \\ A\bar{p} = \bar{0}, \|\bar{p}\| \leq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь η – число, а $\|p\|$ – произвольная норма. Чтобы задача (3) была задачей линейного программирования, в качестве нормы удобно взять

$$\|p\| = \max_{1 \leq i \leq n} |p_i|.$$

Пусть $p_\delta(x)$, $\eta_\delta(x)$ – некоторое решение задачи (3). Так как вектор $p = \bar{0}$ и $\eta = 0$ удовлетворяют ограничениям (3), то ясно, что $\eta_\delta(x) \leq 0$. Покажем, что если $\eta_\delta(x) < 0$, то $p_\delta(x)$ – возможное направление.

Действительно, пусть $\alpha > 0$. Для $i = 0$ имеем на основании формулы Тейлора

$$\begin{aligned} f_0(\bar{x} + \alpha \bar{p}_\delta(\bar{x})) &= f_0(\bar{x}) + \alpha(\nabla f_0(\theta_0), \bar{p}_\delta(\bar{x})) = \\ &= f_0(\bar{x}) + \alpha(\nabla f_0(\bar{x}), \bar{p}_\delta(\bar{x})) + \alpha(\nabla f_0(\theta_0) - \nabla f_0(\bar{x}), \bar{p}_\delta(\bar{x})) \leq \\ &\leq f_0(\bar{x}) + \alpha(\nabla f_0(\bar{x}), \bar{p}_\delta(\bar{x})) + \alpha^2 C \|\bar{p}_\delta(\bar{x})\|^2, \end{aligned}$$

где $\theta_0 = \bar{x} + \zeta_0 \alpha \bar{p}_\delta(\bar{x})$, $0 \leq \zeta_0 \leq 1$, и мы воспользовались тем, что

$$\|\nabla f_0(\theta_0) - \nabla f_0(\bar{x})\| \leq C \|\theta_0 - \bar{x}\| \leq C \alpha \|\bar{p}_\delta(\bar{x})\|.$$

Далее, в силу (3) $(\nabla f_0(\bar{x}), \bar{p}_\delta(\bar{x})) \leq \xi_0 \eta_\delta(\bar{x})$. Поэтому

$$f_0(\bar{x} + \alpha \bar{p}_\delta(\bar{x})) \leq f_0(\bar{x}) + \alpha \xi_0 \eta_\delta(\bar{x}) + \alpha^2 C \|\bar{p}_\delta(\bar{x})\|^2. \quad (4)$$

Аналогично для $i \in J_\delta^-(\bar{x})$

$$f_i(\bar{x} + \alpha \bar{p}_\delta(\bar{x})) \leq f_i(\bar{x}) + \alpha \xi_i \eta_\delta(\bar{x}) + \alpha^2 C \|\bar{p}_\delta(\bar{x})\|^2. \quad (5)$$

Далее, для $i \notin J_\delta^-(\bar{x})$

$$f_i(\bar{x} + \alpha \bar{p}_\delta(\bar{x})) = f_i(\bar{x}) + \alpha(\nabla f_i(\theta_i), \bar{p}_\delta(\bar{x})) \leq f_i(\bar{x}) + \alpha K \|\bar{p}_\delta(\bar{x})\|. \quad (6)$$

Выберем теперь $\alpha > 0$ так, чтобы целевая функция уменьшилась и точка осталась в допустимой области, т.е. чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} f_0(\bar{x} + \alpha \bar{p}_\delta(\bar{x})) &\leq f_0(\bar{x}) + \frac{1}{2} \alpha \xi_0 \eta_\delta(\bar{x}) \\ f_i(\bar{x} + \alpha \bar{p}_\delta(\bar{x})) &\leq 0, \quad i \in J_\delta^-(\bar{x}), \\ f_i(\bar{x} + \alpha \bar{p}_\delta(\bar{x})) &\leq 0, \quad i \notin J_\delta^-(\bar{x}). \end{aligned} \quad (7)$$

Для этого достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\alpha C \|\bar{p}_\delta(\bar{x})\|^2}{\xi_0 \eta_\delta(\bar{x})} &\leq \frac{1}{2}, \\ \xi_i \eta_\delta(\bar{x}) + \alpha C \|\bar{p}_\delta(\bar{x})\|^2 &\leq 0, \quad i \in J_\delta^-(\bar{x}), \\ -\delta + \alpha K \|\bar{p}_\delta(\bar{x})\| &\leq 0, \quad i \notin J_\delta^-(\bar{x}), \end{aligned} \quad (8)$$

так как в силу (4), (5) справедливы неравенства

$$f_0(\bar{x} + \alpha \bar{p}_\delta(\bar{x})) \leq f_0(\bar{x}) + \alpha \xi_0 \eta_\delta(\bar{x}) \left[1 + \frac{\alpha C \|\bar{p}_\delta(\bar{x})\|^2}{\xi_0 \eta_\delta(\bar{x})} \right],$$

$$f_i(\bar{x} + \alpha \bar{p}_\delta(\bar{x})) \leq f_i(\bar{x}) + \alpha [\xi_i \eta_\delta(\bar{x}) + \alpha C \|\bar{p}_\delta(\bar{x})\|^2], \quad i \in J_\delta^-(\bar{x}),$$

а так как $f_i(x) \leq -\delta$ для $i \notin J_\delta^-(x)$, то

$$f_i(\bar{x} + \alpha \bar{p}_\delta(\bar{x})) \leq -\delta + \alpha K \|\bar{p}_\delta(\bar{x})\|, \quad i \in J_\delta^-(\bar{x}).$$

Из неравенств (8) получаем

$$\begin{aligned} \alpha &\leq -\frac{1}{2} \frac{\xi_0 \eta_\delta(x)}{C \|\bar{p}_\delta(x)\|^2 \xi_0 \eta_\delta(x)}, \\ \alpha &\leq -\frac{\xi_i \eta_\delta(x)}{C \|\bar{p}_\delta(x)\|^2}, \\ \alpha &\leq \frac{\delta}{K \|\bar{p}_\delta(x)\|}. \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, если α удовлетворяет неравенствам (9), то выполняются неравенства (7), откуда следует, что $\bar{p}_\delta(x)$ – действительно возможное направление, так как $A\bar{p}_\delta(x) = \bar{0}$ и поэтому

$$A(\bar{x} + \alpha \bar{p}_\delta(\bar{x})) - \bar{b} = A\bar{x} - \bar{b} + \alpha A\bar{p}_\delta(\bar{x}) = \bar{0}.$$

Если точка x не совпадает с решением задачи x^* – точкой минимума $f_0(x)$ в области D , то $\eta_\delta(x) < 0$ при всех достаточно малых δ . Это следует из следующей леммы.

Лемма. Пусть $x \in D$ не является решением задачи минимизации $f_0(x)$ при ограничениях (3). Тогда $\eta_\delta(x) < 0$ для всех достаточно малых δ .

(Без доказательства).

4.5.2. Алгоритм метода возможных направлений

Пусть $x_0 \in D$ – произвольное начальное приближение и $\delta_0 > 0$. Опишем общий шаг алгоритма. Пусть на k -м шаге получена точка $x_k \in D$ и $\delta_k > 0$.

Решив задачу

$$\begin{aligned} \min \quad & \eta, \\ (\nabla f_i(\bar{x}_k), \bar{p}) &\leq \xi_i \eta, \quad i \in J_\delta^-(\bar{x}_k) \cup \{0\}, \\ A\bar{p} &= \bar{0}, \quad \|\bar{p}\| \leq 1, \end{aligned}$$

получим $\bar{p}_{\delta_k}(\bar{x}_k) \equiv \bar{p}_k$, $\eta_{\delta_k}(\bar{x}_k) \equiv \eta_k$. Если в качестве нормы взять $\max_{1 \leq i \leq n} |p_i|$, то эта задача представляет собой задачу линейного программирования, и может быть решена одним из стандартных методов.

Возможны два случая.

$$1) \eta_k < -\delta_k.$$

В этом случае можно последовательно полагать $\alpha = \frac{1}{2^i}$, $i = 0, 1, \dots$, и находим первое i_0 такое, для которого выполняются неравенства

$$\begin{aligned} f_0\left(\bar{x}_k + \frac{1}{2^{i_0}} \bar{p}_k\right) &\leq f_0(\bar{x}_k) + \frac{1}{2 \cdot 2^{i_0}} \xi_0 \eta_k, \\ f_i\left(\bar{x}_k + \frac{1}{2^{i_0}} \bar{p}_k\right) &\leq 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Полагаем $\alpha = \frac{1}{2^{i_0}}$ и $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \alpha_k \bar{p}_k$, $\delta_{k+1} = \delta_k$, так что

$$\begin{aligned} f_0(\bar{x}_{k+1}) &\leq f_0(\bar{x}_k) + \frac{1}{2} \alpha_k \xi_0 \eta_k, \\ f_i(\bar{x}_{k+1}) &\leq 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

$$2) \eta_k \geq -\delta_k.$$

Полагаем $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k$, $\delta_{k+1} = \delta_k / 2$.

Таким образом, в первом случае происходит сдвиг в новую точку, во втором – такого сдвига не происходит.

Условие останова алгоритма формулируется следующим образом. Если на некотором шаге k оказывается $\delta_k < \delta^0(\bar{x}_k)$, где

$$\delta^0(\bar{x}_k) = - \max_{i \in J_0^-(\bar{x}_k)} f_i(\bar{x}_k),$$

где $J_0^-(\bar{x}) = \{i \mid f_i(\bar{x}) = 0, i = \overline{1, m}\}$, и $\eta_k = 0$, то $\bar{x}_k$ – решение исходной задачи (1).

Сходимость алгоритма обосновывается следующей теоремой.

Теорема. Построенная методом возможных направлений последовательность точек $\bar{x}_k$ обладает тем свойством, что $f_0(\bar{x}_k)$, монотонно не возрастая, стремится к $f_0(\bar{x}^*)$, где $\bar{x}^*$ – точка минимума $f_0(\bar{x})$ в области D .

4.6. МЕТОД УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА

Метод условного градиента может эффективно применяться для минимизации нелинейных функций на допустимой области, в которой задача минимизации линейной функции решается без особых затруднений.

Пусть для $x \in E^n$ $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая в компактной выпуклой области D функция. Будем предполагать, что градиент $\nabla f(x)$ функции $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\| \quad (1)$$

для всех точек области D .

Требуется решить задачу вида

$$\min\{f(\bar{x}) \mid f_i(\bar{x}) \leq 0, i = \overline{1, m}\}.$$

Допустимая область определяется множеством

$$D = \{\bar{x} \mid f_i(\bar{x}) \leq 0, i = \overline{1, m}\}.$$

Метод условного градиента состоит в следующем. Пусть x_k приближение на k -м шаге уже построено. Вычислим $\nabla f(x_k)$ и найдем точку минимума линейной функции $(\nabla f(\bar{x}_k), \bar{z})$ в области D . Пусть это будет точка $z(x_k)$. Положим $p_k = z(x_k) - x_k$ и $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, где $\alpha_k > 0$ – величина шага в направлении p_k . Точка x_{k+1} принимается за исходную и процедура повторяется. При определенных правилах выбора α_k процесс сходится.

В методе условного градиента минимизируемая функция на каждой итерации аппроксимируется линейной функцией.

4.6.1. Правило выбора длины шага

Пусть $x \in D$ произвольная точка на этой области, а $z(x)$ – какая-либо точка минимума $(\nabla f(\bar{x}_k), \bar{z})$ в области D , так что

$$(\nabla f(\bar{x}), \bar{z}(\bar{x})) \leq (\nabla f(\bar{x}), \bar{z}), \quad z \in D. \quad (2)$$

Положим $p(x) = z(x) - x$,

$$\eta(\bar{x}) = \min_{\bar{z} \in D} (\nabla f(\bar{x}), \bar{z} - \bar{x}) = (\nabla f(\bar{x}), \bar{p}(\bar{x})).$$

В силу (2) $\eta(x) \leq 0$. Нас интересуют оценки для приращения функции при сдвиге из точки x в направлении $p(x)$. Воспользовавшись формулой Тейлора и соотношением (1), получаем

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + \alpha \bar{p}(\bar{x})) &= f(\bar{x}) + \alpha (\nabla f(\theta), \bar{p}(\bar{x})) = \\ &= f(\bar{x}) + \alpha (\nabla f(\bar{x}), \bar{p}(\bar{x})) + \alpha (\nabla f(\theta) - \nabla f(\bar{x}), \bar{p}(\bar{x})) \leq \\ &\leq f(\bar{x}) + \alpha (\nabla f(\bar{x}), \bar{p}(\bar{x})) + \alpha^2 C \|\bar{p}(\bar{x})\|^2, \end{aligned}$$

где $\theta_0 = x + \xi \alpha p(x)$, $0 \leq \xi \leq 1$.

Таким образом,

$$f(\bar{x} + \alpha \bar{p}(\bar{x})) \leq f(\bar{x}) + \alpha \eta(\bar{x}) + \alpha^2 C \|\bar{p}(\bar{x})\|^2. \quad (3)$$

Из этой формулы сразу следует, что при

$$\alpha \leq -\frac{1}{2} \frac{\eta(x)}{C \|p(x)\|^2} \quad (4)$$

справедлива оценка

$$f(\bar{x} + \alpha \bar{p}(\bar{x})) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \alpha \eta(\bar{x}). \quad (5)$$

4.6.2. Алгоритм метода условного градиента

Поиск начинается с произвольной точки $x_0 \in D$. Опишем общий шаг алгоритма. Пусть на k -м шаге получена точка $x_k \in D$, $k \geq 0$.

Решив задачу минимизации $(\nabla f(\bar{x}_k), \bar{z})$ в области D , найдем $z(x_k)$, $p(x_k)$, $\eta(x_k)$. Строим точку $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p(x_k)$, где величина α_k полагается равной $1/2^{i_0}$, и i_0 первое из $i = 0, 1, \dots$, для которого выполняются неравенство

$$f\left(x_k + \frac{1}{2^{i_0}} p(x_k)\right) \leq f(x_k) + \frac{1}{2^{i_0}} \frac{\eta(x_k)}{2}. \quad (6)$$

Процесс заканчивается, если $\eta(x_k) = 0$.

4.6.3. Сходимость алгоритма условного градиента

В силу приведенного правила выбора шага выполняется неравенство

$$f(\bar{x}_{k+1}) \leq f(\bar{x}_k) + \frac{1}{2} \alpha_k \eta(\bar{x}_k). \quad (7)$$

Для обоснования сходимости алгоритма необходимо показать, что всегда можно удовлетворить неравенства (6), (7). Действительно в силу формул (4) и (5) неравенство (6) будет удовлетворяться, как только будет выполнено неравенство

$$2^{-i} \leq -\frac{1}{2} \frac{\eta(x_k)}{C \|p(x_k)\|^2},$$

а так как i_0 – это первый индекс, при котором (6) выполняется, то

$$2\alpha_k = 2^{-(i_0-1)} > -\frac{1}{2} \frac{\eta(x_k)}{C\|p(x_k)\|^2},$$

откуда

$$\alpha_k > -\frac{1}{4} \frac{\eta(x_k)}{C\|p(x_k)\|^2}. \quad (8)$$

Из сказанного следует, что если $\eta(x_k) < 0$, то неравенство (6) удовлетворится после конечного числа проб, и выбранное α_k будет удовлетворять неравенству (8).

Лемма 1. Если x_k , $k = 0, 1, \dots$, – последовательность точек, полученных в процессе работы алгоритма метода условного градиента, то $x_k \in D$, $f(x_k)$ монотонно убывает и $\eta(x_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Лемма 2. В любой предельной точке последовательности x_k , $k = 0, 1, \dots$, выполняются необходимые условия минимума $f(x)$ на множестве D .

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ выпукла. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f^*,$$

где $f^* = \min_{x \in D} f(x)$. Более того, справедлива оценка

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{C}{k},$$

где C – некоторая положительная константа.

Оценка, определяемая теоремой, показывает, что алгоритм сходится не очень быстро. Эта оценка является точно в случае, если минимизируется выпуклая функция на многограннике.

В случае сильно выпуклой допустимой области D , т.е. когда существует такое число $\delta > 0$, что для любых $x, y \in D$ точки $\frac{x+y}{2} + w$ принадлежат D для всех w таких, что $\|w\| \leq \delta \|x - y\|^2$, скорость сходимости метода выше.

Теорема 2. Если $f(x)$ – выпуклая функция, а область D сильно выпукла и $\|\nabla f(x)\| \geq \varepsilon_0 > 0$ для всех $x \in D$, то метод условного градиента сходится со скоростью геометрической прогрессии, т.е. $\|x_k - x_*\| \leq Cq_0^k$, $q_0 < 1$.

4.6.4. Метод Ньютона

В данном случае минимизируемая функция на каждой итерации аппроксимируется квадратичной функцией.

Будем рассматривать задачу минимизации выпуклой функции $f(x)$ на выпуклом компактном множестве D .

Для решения этой задачи можно использовать итерационный процесс

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad (1)$$

в котором направление движения $p_k = \tilde{x} - x_k$ есть решение задачи минимизации на множестве D квадратичной функции

$$\psi_k(\bar{x}) = (\nabla f(\bar{x}_k), \bar{x} - \bar{x}_k) + \frac{1}{2}(\nabla^2 f(\bar{x}_k)(\bar{x} - \bar{x}_k), \bar{x} - \bar{x}_k),$$

а в качестве α_k берется наибольшее значение параметра α , полученное дроблением начиная с $\alpha = 1$, удовлетворяющее неравенству

$$f(x_k + \alpha p_k) - f(x_k) \leq \varepsilon \alpha \psi_k(\tilde{x}_k), \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (2)$$

Скорость сходимости метода Ньютона при определенных условиях будет либо сверхлинейной, либо квадратичной.

Если задача минимизации функции $\psi_k(x)$, $x \in D$ решается достаточно просто, метод Ньютона оказывается весьма эффективным.

Свойства метода Ньютона.

Теорема 1. Если для минимизации выпуклой дважды дифференцируемой функции $f(x)$ на выпуклом замкнутом ограниченном множестве D используется метод (1), в котором α_k и p_k определяются описанным выше образом, то (независимо от выбора начального приближения $x_0 \in D$):

1. $f(x_k)$ монотонно убывает;
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_*) = \min_{x \in D} f(x)$.

Теорема 2. Если в дополнение к условиям теоремы 1, функция $f(x)$ сильно выпукла, т.е. $m\|y\|^2 \leq (\nabla^2 f(\bar{x})\bar{y}, \bar{y}) \leq M\|y\|^2$, $m > 0$, $x \in D$, $y \in E^n$, то последовательность (1) сходится к решению со сверхлинейной скоростью.

4.7. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Динамическое программирование представляет вычислительный метод для решения задач определенной структуры. Суть метода можно рассмотреть на следующем примере.

Найти

$$\max_x z = \max_x \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (1)$$

при

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b, \quad a_i > 0, \quad x_i \geq 0. \quad (2)$$

В данном случае целевая функция задачи представляет собой аддитивную функцию. Если все функции $f_i(x_i)$, $i = \overline{1, n}$, выпуклые(вогнутые), то для решения может быть использован метод множителей Лагранжа. Однако, если имеется много локальных максимумов, то метод дает одно из таких решений. Если требуется найти глобальный максимум, то надо перебрать все локальные. И применение метода множителей Лагранжа проблематично.

Рассмотрим метод обеспечивающий решение задачи (1)-(2). Считаем все $\{a_i\}$, $i = \overline{1, n}$, и b целыми числами, Предположим также, что в задаче все переменные $\{x_i\}$, $i = \overline{1, n}$, могут принимать только целочисленные значения.

Введем следующие обозначения. Через z^* обозначим абсолютный максимум z при условии $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$. Выбираем значение x_n и, зафиксировав его, максимизируем z по всем остальным переменным $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Предположим, что такая максимизация проведена для всех возможных значений x_n . Тогда z^* будет наибольшим из всех возможных значений z . Формально этот процесс запишется следующим образом

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \right\} = f_n(x_n) + \max_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) \right\}, \quad (3)$$

причем

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \leq b - a_n x_n.$$

Так как $\max \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i)$ для неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \leq b - a_n x_n$, зависит от $b - a_n x_n$, то обозначим

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) = \Lambda_{n-1}(b - a_n x_n). \quad (4)$$

Допустим, что мы вычислили $\Lambda_{n-1}(b - a_n x_n)$ для всех допустимых целых значений $x_n = \left\{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{b}{a_n} \right\rfloor\right\}$.

Очевидно, что

$$z^* = \max_{x_n \geq 0} f_n(x_n) + \Lambda_{n-1}(b - a_n x_n). \quad (5)$$

Для вычисления (5) определяем значения $f_n(x_n) + \Lambda_{n-1}(b - a_n x_n)$ для всех допустимых значений x_n и выбираем максимальное. Этому максимуму соответствует x_n^* . Таким образом, если бы была известна функция $\Lambda_{n-1}(b - a_n x_n)$, то вся задача свелась бы к задаче с одной переменной.

Посмотрим, как можно вычислять $\Lambda_{n-1}(b - a_n x_n)$. Очевидно,

$$\Lambda_{n-1}(\xi) = \max_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i), \quad \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \leq \xi.$$

Рассуждая, как и выше, получаем

$$\Lambda_{n-1}(\xi) = \max_{x_{n-1}} \{f_{n-1}(x_{n-1}) + \Lambda_{n-2}(\xi - a_{n-1} x_{n-1})\}, \quad (6)$$

где

$$\Lambda_{n-2}(\xi - a_{n-1} x_{n-1}) = \max_{x_1, x_2, \dots, x_{n-2}} \sum_{i=1}^{n-2} f_i(x_i), \quad (7)$$

причем максимум берется по всем целым неотрицательным $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$, удовлетворяющим условию $\sum_{i=1}^{n-2} a_i x_i \leq \xi - a_{n-1} x_{n-1}$.

Далее вычисляем $\Lambda_{n-2}(\xi)$, $\Lambda_{n-3}(\xi)$ и т.д., пока на последнем этапе не придем к

$$\Lambda_1(\xi) = \max_{0 \leq x_1 \leq \left\lfloor \frac{\xi}{a_1} \right\rfloor} f_1(x_1). \quad (8)$$

Чтобы решить эту задачу, процесс вычислений необходимо вести в обратном порядке, начиная с $\Lambda_1(\xi)$. Зафиксировав начало интервала и изменив верхний его конец ξ , вычисляем

$$\Lambda_1(\xi) = \max f_1(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq \left\lfloor \frac{\xi}{a_1} \right\rfloor$$

для всех значений $\xi = 0, 1, \dots, b$.

Оптимальное решение первого шага обозначим через $\hat{x}_1(\xi)$. Строим таблицу динамического программирования следующего вида.

Таблица 1

ξ	$\Lambda_1(\xi)$	$\hat{x}_1(\xi)$
0		
1		
...	...	...
b		

Вычислив $\Lambda_1(\xi)$, найдем $\Lambda_2(\xi)$, используя соотношение

$$\Lambda_2(\xi) = \max_{0 \leq x_2 \leq \left\lfloor \frac{\xi}{a_2} \right\rfloor} \{f_2(x_2) + \Lambda_1(\xi - a_2 x_2)\}.$$

Вычисляем последовательно $\Lambda_2(\xi)$ для всех $\xi = 0, 1, \dots, b$, используя при этом результаты табл. 1.

Обозначим

$$\varphi_2(0; \xi) = f_2(0) + \Lambda_1(\xi),$$

$$\varphi_2(1; \xi) = f_2(1) + \Lambda_1(\xi - 1),$$

$$\varphi_2\left(\left\lfloor \frac{\xi}{a_2} \right\rfloor; \xi\right) = f_2\left(\left\lfloor \frac{\xi}{a_2} \right\rfloor\right) + \Lambda_1\left(\xi - a_2 \left\lfloor \frac{\xi}{a_2} \right\rfloor\right).$$

Наибольшее из этих чисел и есть $\Lambda_2(\xi)$. Одновременно находим и $\hat{x}_2(\xi)$. Затем строим таблицу, аналогичную табл. 1, для $\Lambda_2(\xi)$ и $\hat{x}_2(\xi)$ ($\xi = 0, 1, \dots, b$). Так продолжается до вычисления $\Lambda_{n-1}(\xi)$ для $\xi = 0, 1, \dots, b$. Функцию $\Lambda_n(\xi)$ табулировать не нужно, так как достаточно определить лишь $\Lambda_n(b) = z^*$. Одновременно находим и оптимальное значение для переменной $\hat{x}_n(b) = x_n^*$.

Для определения значений $x_{n-1}^*, x_{n-2}^*, \dots, x_1^*$ следует использовать уже вычисленные таблицы $(n-1)$ -го, $(n-2)$ -го и т.д. шагов.

Из предыдущей таблицы $(n-1)$ -го шага находим

$$x_{n-1}^* = \hat{x}_{n-1}(b - a_n x_n^*).$$

Для этого берем $\xi = b - a_n x_n^*$. Аналогично определяем

$$x_{n-2}^* = \hat{x}_{n-2}(b - a_n x_n^* - a_{n-1} x_{n-1}^*).$$

Как видим, динамическое программирование представляет собой направленный последовательный перебор вариантов, который обязательно приводит к глобальному максимуму. Для применения метода динами-

ческого программирования необходимо табулировать функции $\Lambda_1(\xi), \dots, \Lambda_{n-1}(\xi)$ для всех допустимых значений ξ .

Рассмотренную задачу можно трактовать как задачу распределения с одним ограниченным источником сырья

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b,$$

где x_i – количество сырья, используемое в i -м способе производства. Тогда $f_i(x_i)$ – доход от переработки i -м способом x_i – единиц сырья. Поэтому $\Lambda_k(\xi)$ можно рассматривать как максимальный доход от первых k способов производства, когда общее количество сырья равно ξ единиц. Поэтому данная задача представляет собой n -шаговый процесс принятия решения, где i -м шаге принимается решение, какое количество сырья из общего объема следует направить на переработку по i -му способу. Структура задачи не изменится от числа шагов, то есть задача инвариантна относительно n . Решение для k -шаговой задачи получается из решения $(k-1)$ -шаговой задачи путем добавления k -го шага и использования результата, полученного для всех предыдущих шагов.

Следовательно, сущность динамического подхода состоит в замене решения данной n -шаговой задачи последовательностью задач: одношаговой, двухшаговой и т.д.

Какими свойствами должны обладать задачи, чтобы к ним можно было применить принцип динамического программирования?

1. Задача должна допускать интерпретацию как n -шаговый процесс принятия решений.
2. Задача должна быть определена для любого числа шагов и иметь структуру, не зависящую от их числа.
3. При рассмотрении k -шаговой задачи должно быть задано некоторое множество параметров, описывающих состояние системы, от которых зависят оптимальные значения переменных. Причем это множество не должно изменяться при увеличении числа шагов (в рассмотренной задаче таким параметром было ξ – количество сырья).
4. Выбор решения (управления) на k -м шаге не должен оказывать влияния на предыдущие решения, кроме необходимого пересчета переменных.

Пусть $\bar{\xi}$ – вектор параметров, описывающих состояние процесса (вектор состояния). Тогда $\Lambda_k(\bar{\xi})$ – оптимальное значение целевой функции для k -шагового процесса при условии $\bar{\xi}$. $\Lambda_k(\bar{\xi})$ будем называть *функцией состояния*.

Пусть $\bar{X}$ – вектор переменных, подлежащих выбору на k -м шаге. Тогда для задач, к которым можно применить метод динамического про-

граммирования, должно выполняться следующее рекуррентное соотношение:

$$\Lambda_k(\bar{\xi}) = \max_{\bar{X}_k} \{ f(\bar{X}_k; \bar{\xi}) + \Lambda_{k-1}[T(\bar{\xi}; \bar{X}_k)] \},$$

где $T(\bar{\xi}; \bar{X}_k)$ – вектор состояния предыдущего $(k-1)$ -го шага, при условиях $\bar{\xi}$ и $\bar{X}_k$.

Это рекуррентное соотношение обосновывает принцип оптимальности Р. Беллмана. Оптимальная стратегия обладает следующим свойством: *каковы бы ни были начальное состояние $\bar{\xi}$ и начальная стратегия $\bar{X}_1$, последующие стратегии (решения) должны быть оптимальны по отношению к состоянию $T(\bar{\xi}; \bar{X}_1)$, получающемуся в результате предыдущего решения.*

Рекомендуемая литература

1. Корнеев В. П. Методы оптимизации : учебник для вузов по специальности и направлению "Прикладная математика и информатика". – М.: Высшая школа, 2007. – 663 с.
2. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций. – М.: Вильямс, 2007.– 901 с.
3. Косоруков О.А. Мищенко А.В. Исследование операций: учебник. – М.: Экзамен, 2003.- 446 с.
4. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – Киев: Вища школа, 1975. – 319 с.
5. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – Киев: Вища школа, 1988. – 549 с.
6. Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990. – 382 с.
7. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций. – М.: Изд-во МГТУ, 2000. – 435 с.
8. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Дрофа, 2004. – 208 с.
9. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике: учебное пособие. – СПб.: Питер, 2002. – 207 с.
10. Оуэн Г. Теория игр. – М.: Наука, 1971. – 230 с.

Дополнительная литература

11. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1971. – 533 с.
12. Вагнер Г. Основы исследования операций.- М.: Мир, Т.1, 1972.; т. 2, 1973.; т. 3, 1973.
13. Кюнц Г.П., Крелле В. Нелинейное программирование. – М.: Сов. радио, 1965. – 303 с.
14. Саати Т.Л. Математические методы исследования операций. - М.: Мир, 1973.
15. Беллман Р. Динамическое программирование и современная теория управления. – М.: Наука, 1969. – 118 с.
16. Дегтярев Ю.И. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
17. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
18. Кюнц Г.П., Крелле В. Нелинейное программирование. – М.: Сов. радио, 1965. – 303 с.
19. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов и кибернетиков. – М.: Наука, 1985. – 270 с.

20. Данилов В.И. Лекции по теории игр. - М.: Российская экономическая школа, 2002. - 140 с.
21. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение; пер. с англ. под ред. Н. Н. Воробьева. М.: Наука, 1970. – 707 с.
22. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр : учебное пособие для ун-тов по специальности "Математика". – М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.
23. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М: Наука, 1975. – 319 с.
24. Печерский С.Л. Теория игр для экономистов. Вводный курс. – СПб.: Изд-во Европ. у-та, 2001. – 342 с.
25. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. - М.: Мир, 1968.