

УДК 519.2

**Б.Ю. Лемешко, А.А. Горбунова, С.Б. Лемешко,  
С.Н. Постовалов, А.П. Рогожников, Е.В. Чимитова**

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ<sup>1</sup>**

Рассматриваются вопросы применения компьютерных технологий для исследования вероятностных и статистических закономерностей. Показывается, что компьютерные технологии являются мощным средством развития аппарата прикладной математической статистики, средством расширения возможностей классических методов в условиях нарушения стандартных предположений.

**Ключевые слова:** *оценивание параметров, проверка статистических гипотез, критерии согласия, мощность критериев.*

Практика применения методов статистического анализа в различных приложениях, в том числе в задачах надежности и контроля качества, богата постановками, формулировки которых не укладываются в рамки классических предположений. Широкий спектр методов статистического анализа базируется на предположении о принадлежности ошибок измерений нормальному закону. В реальных условиях предположение «нормальности», а часто и другие предположения, не выполняются. Использование классических методов математической статистики в таких ситуациях может оказаться некорректным.

Использование популярных программных систем статистического анализа не снимает проблем корректного решения задач анализа данных в различных приложениях и не только в силу того, что новые результаты в области прикладной математической статистики далеко не сразу воплощаются в программном обеспечении.

Многие классические результаты имеют асимптотический характер, в то время как на практике обычно имеют дело с конечными, часто весьма ограниченными, объемами выборок. В таких ситуациях применение асимптотических результатов далеко не всегда оказывается правомерным. Форма представления (регистрации) данных (измерений) зачастую не соответствуют рассматриваемым в учебниках по математической статистике точечным выборкам. Реальные наблюдения (выборки) могут быть группированными, частично группированными, цензурированными, многократно цензурированными, интервальными, что резко ограничивает применение классических методов и результатов.

Выявление фундаментальных статистических закономерностей в нестандартных условиях приложений, как правило, является сложной задачей. При этом аналитические методы исследования таких закономерностей (например, статистических свойств оценок или распределений статистик критериев) чрезвычайно трудоемки и не позволяют, вследствие сложности, обеспечить решение всего множества задач. Реальный выход заключается в широком использовании численного

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках госзадания (проект 8.1274.2011) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение № 14.В37.21.0860).

подхода, связанного с компьютерным моделированием статистических закономерностей в условиях, имитирующих реальную ситуацию проведения измерений, с последующим построением математических моделей, приближенно описывающих полученные закономерности. Такой подход позволяет добиться хороших результатов там, где этого не удастся достичь одними аналитическими методами. Поэтому методы компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей в последнее время получают все более широкое распространение.

В настоящей работе обсуждаются результаты, полученные в некоторых разделах прикладной математической статистики с использованием развиваемого компьютерного подхода и программного обеспечения, предназначенного для исследования статистических закономерностей и статистического анализа данных [1].

### 1. Исследование свойств оценок параметров

В частности, с использованием компьютерных технологий было показано, что за редким исключением оценки максимального правдоподобия (ОМП) по негруппированным наблюдениям являются неробастными. Напротив, ОМП по группированным данным [2, 3] и предложенные оптимальные  $L$ -оценки параметров сдвига и масштаба по выборочным квантилям для больших выборок [4, 5] устойчивы как к аномальным ошибкам измерений, так и к отклонениям наблюдаемого закона от предполагаемого. Применение построенных таблиц вероятностей попадания в интервал, соответствующих асимптотически оптимальному группированию (АОГ), и формул, опирающихся на вычисленные таблицы коэффициентов, делает процесс вычисления этих оценок очень простым.

В работах [6, 7] были исследованы потери в информации Фишера, связанные с цензурированием выборок. Оказалось, что даже при значительной степени цензурирования в некоторых случаях сохраняется достаточно много информации, позволяющей получать хорошие оценки параметров закона. Методами компьютерного моделирования были исследованы законы распределения ОМП параметров ряда распределений по цензурированным наблюдениям при различной степени цензурирования и различных объемах полных выборок. Было показано, что при ограниченных объемах выборок распределения ОМП (асимптотически эффективных) оказываются далекими от асимптотического нормального закона. Более того, распределения оказались асимметричными, а ОМП – смещенными. Дальнейшие исследования показали возможность на основании полученных статистических закономерностей строить для ОМП поправки, ликвидирующие смещение.

### 2. Исследование свойств критериев типа $\chi^2$

В [8] было показано, что при близких конкурирующих гипотезах мощность критериев типа  $\chi^2$  ( $\chi^2$  Пирсона, отношения правдоподобия) тем выше, чем меньше потери в информации Фишера, связанные с группированием данных. Были построены таблицы асимптотически оптимального группирования для достаточно широкого круга распределений, наиболее часто используемых в приложениях [1, 9]. Применение таблиц асимптотически оптимального группирования обеспечивает максимальную мощность критериев типа  $\chi^2$  при близких конкурирующих гипотезах.

Впервые было показано, что существует оптимальное число интервалов, зависящее от объема выборки, конкретных альтернатив и способа группирования. Оптимальное число интервалов  $k$  зависит от объема выборки  $n$  и от конкретной па-

ры конкурирующих гипотез  $H_0$  и  $H_1$ . Как правило, оптимальное  $k$  оказывается существенно меньше значений, рекомендуемых различными рекомендациями и множеством эмпирических формул для выбора  $k$ . Результаты исследований [10–16] свойств критериев согласия типа  $\chi^2$  (Пирсона, Рао – Робсона – Никулина [17–20]) вошли в разработанные нами рекомендации [21].

В настоящее время решены задачи  $A$ - и  $E$ -оптимального группирования для ряда законов распределения. Построены таблицы асимптотически оптимального группирования, которые могут использоваться в задачах оценивания параметров по группированным данным и в критериях согласия. Исследована мощность критерия типа  $\chi^2$  Джапаридзе–Никулина при различных способах группирования данных и числе интервалов группирования.

Исследованы вопросы максимизации мощности критериев типа  $\chi^2$  Пирсона и Рао – Робсона – Никулина для заданных пар конкурирующих гипотез. Рассмотрено использование, так называемых, интервалов Неймана – Пирсона [20], при которых границы интервалов совпадают с абсциссами точек пересечения плотностей конкурирующих законов. Показана целесообразность применения таких интервалов. В то же время, применение интервалов Неймана – Пирсона не гарантирует максимум мощности критерия при данном числе интервалов для заданной пары конкурирующих гипотез.

### 3. Исследование распределений статистик непараметрических критериев согласия

При проверке сложных гипотез  $H_0: F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ , когда оценка  $\hat{\theta}$  скалярного или векторного параметра распределения  $F(x, \theta)$  вычисляется по той же самой выборке, непараметрические критерии согласия Колмогорова,  $\omega^2$  Крамера – Мизеса – Смирнова,  $\Omega^2$  Андерсона – Дарлинга теряют свойство свободы от распределения [22]. В этом случае условные распределения  $G(S|H_0)$  статистик  $S$  соответствующих критериев становятся зависящими от ряда факторов: от вида наблюдаемого закона  $F(x, \theta)$ , соответствующего справедливой проверяемой гипотезе  $H_0$ ; от типа оцениваемого параметра и числа оцениваемых параметров; во многих случаях от конкретного значения параметра или параметров (например, в случае семейств гамма-, бета-распределений и др.); от метода оценивания параметров [23].

Различия в предельных распределениях той же самой статистики при проверке простых и сложных гипотез настолько существенны, что пренебрегать этим ни в коем случае нельзя. Например, на рис. 1 показаны распределения статистики критерия Андерсона – Дарлинга при проверке сложных гипотез относительно различных законов распределения при вычислении по той же выборке ОМП двух параметров закона. Рис. 2 иллюстрирует зависимость распределения статистики критерия Колмогорова от типа и числа оцениваемых параметров на примере закона распределения  $Su$ -Джонсона.

При исследовании распределений статистик непараметрических критериев согласия для случая проверки сложных гипотез использовались различные подходы. В наших исследованиях [23–35] распределения статистик непараметрических критериев согласия исследовались методами статистического моделирования. Далее, опираясь на полученные эмпирические распределения статистик, строились при-

ближенные аналитические модели законов распределения статистик. На основании результатов [23–25] были подготовлены рекомендации по стандартизации [26].

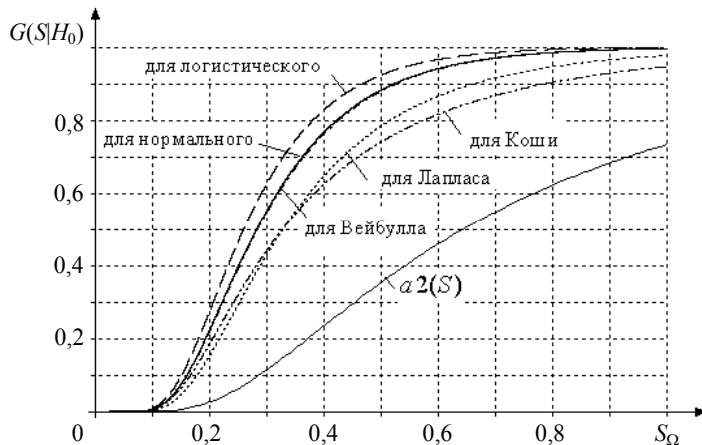


Рис. 1. Распределения статистики Андерсона – Дарлинга при проверке сложных гипотез относительно различных законов распределения при вычислении ОМП двух параметров закона

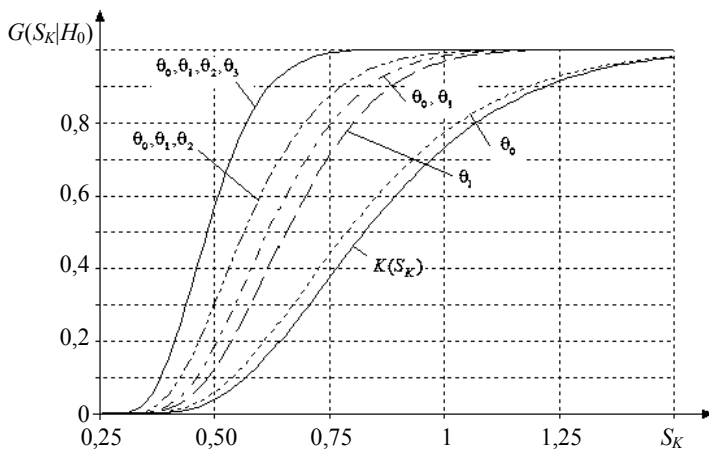


Рис. 2. Распределения статистики Колмогорова при проверке сложных гипотез распределения Si-Джонсона при вычислении ОМП различных комбинаций параметров закона

В дальнейшем [27–35] результаты уточнялись, расширялось множество построенных моделей и таблиц процентных точек и множество законов, относительно которых можно корректно применять непараметрические критерии согласия при проверке сложных гипотез. Достаточно обширный список законов распределения, относительно которых можно проверять сложные гипотезы, используя построенные приближения для предельных распределений непараметрических критериев согласия, представлен в [1]. В случае применения ОМП моделями, представленными в [1, 27–35], можно пользоваться в задачах статистического анализа при объемах выборок, начиная с  $n > 25$ .

#### 4. Сравнительный анализ мощности критериев согласия

Относительно мощности критериев, предназначенных для проверки гипотез того же вида, информация, как правило, противоречива. Асимптотические оценки мощности не имеют практического значения, так, приходится иметь дело с ограниченными объемами выборок, при которых свойства критериев существенно отличаются от асимптотических. Единственный реальный выход заключается в использовании численных методов.

В работах [36–38] методами статистического моделирования нами проведен анализ мощности ряда непараметрических и параметрических критериев согласия при проверке простых и сложных гипотез относительно различных пар конкурирующих гипотез. Исследования показали, что при проверке простых гипотез критерии можно упорядочить по мощности следующим образом:

$$\chi^2 \text{ Пирсона (АОГ)} > \Omega^2 \text{ Андерсона-Дарлинга} > \omega^2 \text{ Мизеса} \geq \text{Колмогорова}$$

Такое упорядочение справедливо при использовании в критерии  $\chi^2$  Пирсона асимптотически оптимального группирования, при котором минимизируются потери в информации Фишера. В случае близких конкурирующих гипотез преимущество в мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона может быть существенным.

При проверке сложных гипотез порядок предпочтения оказывается существенно иным:

$$\Omega^2 \text{ Андерсона – Дарлинга} > \omega^2 \text{ Мизеса} > Y_n^2 \text{ Рао – Робсонf – Никулина (АОГ)} > \\ > \chi^2 \text{ Пирсона (АОГ)} > \text{Колмогорова.}$$

При очень близких гипотезах может быть:

$$\Omega^2 \text{ Андерсона – Дарлинга} > Y_n^2 \text{ Рао – Робсона – Никулина (АОГ)} > \\ > \omega^2 \text{ Мизеса} > \chi^2 \text{ Пирсона (АОГ)} > \text{Колмогорова.}$$

Указанные выводы носят интегрированный характер.

#### 5. Исследования распределений статистик и мощности критериев нормальности

Проведенные в работах [39–41] исследования и сравнительный анализ мощности множества критериев, ориентированных на проверку гипотез о принадлежности выборок нормальному закону, с одной стороны, позволили проранжировать критерии по мощности, с другой – выявили ряд серьезных недостатков присущих многим из них. Например, недостатком критериев Шапиро–Уилка, Эппса–Палли, Шпигельхальтера, Хегази–Грина и некоторых других является их смещенность при малых объемах выборок по отношению к конкурирующим гипотезам, которым соответствуют законы с плотностями, более плосковершинными по сравнению с нормальным законом (со значением эксцесса меньше 3), т. е. критерии не способны отличать такие законы от нормального [1].

Рассмотренные критерии можно упорядочить по мощности следующим образом:

$$\text{Гири} > \text{Шпигельгалтера} > \text{Хегази – Грина} (T_2) > \text{Хегази – Грина} (T_1) > \\ > \text{Эппса – Палли} > \text{Дэвида – Хартли – Пирсона} > \text{Шапиро – Уилка} > \text{Фросини.}$$

Некоторые из рассмотренных критериев вообще нецелесообразно применять вследствие их принципиальных недостатков. Проведено сравнение мощности рассмотренных критериев с критериями согласия

## 6. Исследования распределений статистик критериев однородности

Критерии однородности предназначены для проверки гипотезы о принадлежности двух выборок одному и тому же закону. В работе [42] исследованы распределения и мощность критериев Смирнова и Лемана – Розенблатта проверки однородности двух выборок. Недостатком критерия Смирнова является то, что его статистика представляет собой дискретную случайную величину и ее распределение медленно (особенно при равных объемах выборок  $m = n$ ) сходится (слева!) к асимптотическому распределению Колмогорова. Вследствие этого использование при ограниченных объемах выборок в качестве предельного распределения этой статистики закона Колмогорова  $K(s)$  приводит к завышенным значениям достигаемого уровня значимости и, следовательно, к увеличению числа ошибок второго рода. Поэтому при построении процедур проверки однородности по критерию Смирнова целесообразно выбирать  $m \neq n$  так, чтобы они представляли собой взаимно простые числа, а их наименьшее общее кратное  $k$  было максимальным и равным  $mn$ . Предложена модификация статистики критерия, при которой применение распределения Колмогорова в качестве предельного будет более корректным при относительно малых  $m$  и  $n$ .

Мощность критерия Лемана – Розенблатта, как правило, выше мощности критерия Смирнова.

## 7. Исследования распределений статистик и мощности критериев однородности средних

В [43] проведен сравнительный анализ мощности параметрических и непараметрических критериев проверки однородности средних. В общем случае проверяемая гипотеза о равенстве математических ожиданий, соответствующих  $k$  выборкам, имеет вид

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

при конкурирующей гипотезе

$$H_1 : \mu_{i_1} \neq \mu_{i_2},$$

хотя бы для некоторой пары индексов  $i_1, i_2$ .

Для проверки гипотезы  $H_0$  может использоваться ряд параметрических критериев: сравнения двух выборочных средних при известных дисперсиях; сравнения двух выборочных средних при неизвестных, но равных дисперсиях (критерий Стьюдента); сравнения двух выборочных средних при неизвестных и неравных дисперсиях;  $F$ -критерий. В этих же целях применяется целая совокупность непараметрических критериев: критерий Уилкоксона, критерий Манна–Уитни, критерий Краскела – Уаллиса.

В [43] показана устойчивость параметрических критериев проверки однородности средних к нарушению предположения нормальности наблюдений случайных величин: если закон (законы) распределения анализируемых выборок отличается от нормального, но нет оснований полагать, что наблюдаемые величины

принадлежат законам с «тяжелыми хвостами», то применение параметрических критериев остается корректным, по крайней мере, не приводит к существенным погрешностям.

Сравнительный анализ мощности параметрических и непараметрических критериев показал лишь незначительное преимущество в мощности параметрических. В то же время, непараметрические критерии лишь немного уступают по мощности параметрическим: критерий Манна – Уитни критерию Стьюдента, а Краскела – Уаллиса –  $F$ -критерию (используемому для проверки однородности средних) соответственно.

### 8. Исследования распределений статистик и мощности критериев однородности дисперсий

Одним из основных предположений при построении классических критериев проверки однородности дисперсий является принадлежность наблюдаемых случайных величин (погрешностей измерений) нормальному закону. Поэтому применение классических критериев всегда сопряжено с вопросом, насколько корректны получаемые выводы в данной конкретной ситуации? При нарушении предположения о принадлежности анализируемых величин нормальному закону условные распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы, как правило, сильно изменяются.

Проверяемая гипотеза о постоянстве дисперсий  $m$  выборок имеет вид

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_m^2 ,$$

а конкурирующая с ней гипотеза

$$H_1 : \sigma_{i_1}^2 \neq \sigma_{i_2}^2 ,$$

где неравенство выполняется, по крайней мере, для одной пары индексов  $i_1, i_2$ .

В работах [44–46] методами компьютерного моделирования исследованы распределения статистик и проведен сравнительный анализ мощности классических критериев проверки гипотез о равенстве дисперсий (Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Левене) и непараметрических ранговых критериев (Ансари – Бредли, Сижела – Тьюки, Муда) (в том числе, при законах распределения наблюдаемых случайных величин, отличных от нормального).

В отличие от утверждаемого в [47], показано, что при числе выборок  $m = 2$  в случае принадлежности случайных величин нормальному закону критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли и Фишера имеют одинаковую мощность. Критерий Левене заметно им уступает.

Критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли и Левене могут применяться при числе выборок  $m > 2$ . В таких ситуациях мощность этих критериев оказывается различной. При  $m > 2$  в случае выполнения предположений о нормальном законе данные критерии можно упорядочить по убыванию мощности следующим образом:

$$\text{Кокрена} > \text{Бартлетта} > \text{Хартли} > \text{Левене}.$$

Порядок предпочтения сохраняется и в случае нарушений предположений о нормальном законе. Исключение касается ситуаций, когда выборки принадлежат законам с более «тяжелыми хвостами» по сравнению с нормальным законом. Например, в случае принадлежности выборок закону Лапласа критерий Левене оказывается несколько мощнее трех других.

Результаты исследований непараметрических критериев показали заметное преимущество в мощности критерия Муда и практическую эквивалентность критериев Ансари – Бредли и Сижела – Тьюки. Непараметрические критерии существенно уступают в мощности критериям Бартлетта, Кокрена, Хартли и Фишера.

Воспользовавшись для исследования распределений статистик методикой компьютерного моделирования, действие параметрических критериев при необходимости можно распространить на ситуации, когда выборки описываются законами, отличающимися от нормального.

## 9. Применение компьютерного моделирования при решении других задач прикладной математической статистики

При исследовании распределений статистик и мощности ряда критериев, ориентированных на проверку гипотез о случайности или об отсутствии тренда, выявлены недостатки или преимущества отдельных критериев [48–50].

В [51] рассмотрено расширение возможностей критериев, используемых при отбраковке измерений.

Классический подход к определению закона распределения вероятностей функции от системы случайных величин предполагает знание совместной плотности распределения и очень редко позволяет получить результат в явном виде. В [52] показана эффективность методики компьютерного моделирования при исследовании законов распределения функций от случайных величин и систем случайных величин.

Компьютерное моделирование представляет собой эффективный инструмент расширения аппарата прикладного многомерного анализа [53, 54].

### Заключение

Компьютерные методы анализа данных и исследования статистических закономерностей являются мощным средством, способствующим расширению аппарата прикладной математической статистики. Они дают возможность исследовать реальные свойства оценок и распределений статистик критериев проверки гипотез, в том числе в условиях нарушения стандартных предположений, когда использование классических результатов оказываются некорректным.

Всегда существует принципиальная возможность методами статистического моделирования **заранее** исследовать распределение статистики интересующего нас критерия в конкретных условиях, нарушающих стандартные предположения (при заданном объеме выборки, в случае принадлежности выборки заданному закону, отличному от нормального, при нестандартной форме регистрации результатов измерений и т.п.). В результате получим эмпирическое распределение статистики, с заданной точностью описывающее её истинное распределение. Затем можно построить приближенную математическую модель этого распределения или найти процентные точки. Все эти действия способствуют расширению аппарата прикладной математической статистики.

Проблема заключается в том, что множество таких задач оказывается бесконечным. Например, распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно таких параметрических моделей законов распределения, как семейства гамма- и бета-распределений, обобщенное распределение Вейбулла, обратное распределение Гаусса и др., зависят от конкретных значений параметров формы. А оценки этих параметров находятся в



ходе статистического анализа и заранее неизвестны. Аналогично в задачах выживания и надежности результаты наблюдений чаще всего оказываются различным образом цензурированными, а вид и степень цензурирования являются факторами, влияющими на распределения статистик критериев, используемых при проверке адекватности построенных моделей [55–58]. Как правило, вид и степень цензурирования далеко не всегда известны заранее. Другой пример, распределения статистик параметрических критериев однородности дисперсий зависят от закона (законов), которым принадлежат анализируемые выборки. В случае отличия законов от нормального распределения этих статистик становятся зависящими от объемов выборок и эта зависимость аналитически не выражается. Ситуации другого рода, распределения статистик многих непараметрических критериев проверки гипотез являются дискретными. Для них предлагаются различные аппроксимации, которые в условиях ограниченных объемов выборок зачастую сильно отличаются от истинных, что может приводить к некорректным выводам.

Какой же выход? Выход заключается в исследовании требуемых закономерностей в ходе решения задачи статистического анализа. То есть в программном обеспечении анализа данных должен быть предусмотрен **интерактивный режим**, позволяющий исследовать требуемую закономерность (распределение статистики критерия) при тех предположениях, которые соответствуют условиям решаемой задачи анализа. И найденное распределение статистики будет использоваться для корректного вывода относительно проверяемой гипотезы.

Задачи статистического моделирования удается достаточно просто распараллеливать, а развитие многоядерных и многопроцессорных компьютеров делает вычислительные затраты на исследование практически незаметными для пользователя, решающего задачу статистического анализа. Именно по такому перспективному пути идут авторы данной работы. Развиваемое программное обеспечение успешно используется в исследованиях и учебном процессе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей*. Компьютерный подход: монография / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. 888 с. (серия «Монографии НГТУ»).
2. *Лемешко Б.Ю.* Робастные методы оценивания и отбраковка аномальных измерений // Заводская лаборатория. 1997. Т. 63. № 5. С. 43–49.
3. *Лемешко Б.Ю.* Группирование наблюдений как способ получения робастных оценок // Надежность и контроль качества. 1997. № 5. С. 26–35.
4. *Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В.* Построение оптимальных  $L$ -оценок параметров сдвига и масштаба распределений по выборочным квантилям // Сибирский журнал индустриальной математики. 2001. Т. 4. № 2. С. 166–183.
5. *Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В.* Оптимальные  $L$ -оценки параметров сдвига и масштаба распределений по выборочным квантилям // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2004. Т. 70. № 1. С. 54–66.
6. *Лемешко Б.Ю., Гильдебрант С.Я., Постовалов С.Н.* К оцениванию параметров надежности по цензурированным выборкам // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. № 1. С. 52–64.
7. *Лемешко Б.Ю.* Об оценивании параметров распределений и проверке гипотез по цензурированным выборкам // Методы менеджмента качества. 2001. № 4. С. 32–38.
8. *Денисов В.И., Лемешко Б.Ю.* Оптимальное группирование при обработке экспериментальных данных // Измерительные информационные системы. Новосибирск, 1979. С. 5–14.

9. *Денисов В.И., Лемешко Б.Ю., Цой Е.Б.* Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов. В 2 ч. / Новосибир. гос. техн. ун-т. Новосибирск, 1993. 347 с.
10. *Лемешко Б.Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений – это обеспечение максимальной мощности критериев // Надежность и контроль качества. 1997. № 8. С. 3–14.
11. *Лемешко Б.Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия // Заводская лаборатория, 1998. Т. 64. № 1. С. 56–64.
12. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* О зависимости предельных распределений статистик хи-квадрат Пирсона и отношения правдоподобия от способа группирования данных // Заводская лаборатория. 1998. Т. 64. № 5. С. 56–63.
13. *Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В.* Максимизация мощности критериев типа хи-квадрат // Доклады СО АН ВШ. 2000. № 2. С. 53–61.
14. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В.* О распределениях статистики и мощности критерия типа хи-квадрат Никулина // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. № 3. С. 52–58.
15. *Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В.* О выборе числа интервалов в критериях согласия типа хи-квадрат // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2003. Т. 69. № 1. С. 61–67.
16. *Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В.* Об ошибках и неверных действиях, совершаемых при использовании критериев согласия типа  $\chi^2$  // Измерительная техника. 2002. № 6. С. 5–11.
17. *Никулин М.С.* О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. 18. № 3. С. 675–676.
18. *Никулин М.С.* Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. 18. № 3. С. 583–591.
19. *Rao K.C., Robson D.S.* A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family // Commun. Statist. 1974. V. 3. P. 1139–1153.
20. *Greenwood P.E., Nikulin M.S.* A Guide to Chi-Squared Testing. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1996. 280 p.
21. Р 50.1.033-2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа хи-квадрат. М.: Изд-во стандартов, 2002. 87 с.
22. *Kac M., Kiefer J., Wolfowitz J.* On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods // Ann. Math. Stat. 1955. V. 26. P. 189–211.
23. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* О правилах проверки согласия опытного распределения с теоретическим // Методы менеджмента качества. Надежность и контроль качества. 1999. № 11. С. 34–43.
24. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* О распределениях статистик непараметрических критериев согласия при оценивании по выборкам параметров наблюдаемых законов // Заводская лаборатория. 1998. Т. 64. № 3. С. 61–72.
25. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез // Автотметрия. 2001. № 2. С. 88–102.
26. Р 50.1.037-2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии. М.: Изд-во стандартов, 2002. 64 с.
27. *Лемешко Б.Ю., Маклаков А.А.* Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями экспоненциального семейства // Автотметрия. 2004. № 3. С. 3–20.
28. *Lemeshko B.Yu.* Errors when using nonparametric fitting criteria // Measurement Techniques. 2004. V. 47. No. 2. P. 134–142.
29. *Design of experiments and statistical analysis for grouped observations: Monograph / V.I. Denisov, K.-H. Eger, B.Yu. Lemeshko, E.B. Tsoy.* Novosibirsk: NSTU Publishing house, 2004. 464 p.

30. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Никулин М.С., Сааидиа Н. Моделирование распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона // Автоматика и телемеханика. 2010. № 7. С. 83–102.
31. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I // Измерительная техника. 2009. № 6. С. 3–11.
32. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II // Измерительная техника. 2009. № 8. С. 17–26.
33. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Postovalov S.N. Statistic distribution models for some nonparametric goodness-of-fit tests in testing composite hypotheses // Communications in Statistics – Theory and Methods. 2010. V. 39. No. 3. P. 460–471.
34. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B. Models of statistic distributions of nonparametric goodness-of-fit tests in composite hypotheses testing for double exponential law cases // Communications in Statistics – Theory and Methods. 2011. V. 40. No. 16. P. 2879–2892.
35. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B. Construction of statistic distribution models for nonparametric goodness-of-fit tests in testing composite hypotheses: The computer approach // Quality Technology & Quantitative Management. 2011. V. 8. No. 4. P. 359–373.
36. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н. Мощность критериев согласия при близких альтернативах // Измерительная техника. 2007. № 2. С. 22–27.
37. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н. Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11. № 2(34). С. 96–111.
38. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н. Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11. № 4(36). С. 78–93.
39. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона // Метрология. 2005. № 2. С. 3–24.
40. Лемешко Б.Ю., Рогожников А.П. Исследование особенностей и мощности некоторых критериев нормальности // Метрология. 2009. № 4. С. 3–24.
41. Лемешко Б.Ю., Рогожников А.П. О нормальности погрешностей измерений в классических экспериментах и мощности критериев, применяемых для проверки отклонения от нормального закона // Метрология. 2012. № 5. С. 3–26.
42. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. О сходимости распределений статистик и мощности критериев однородности Смирнова и Лемана – Розенблатта // Измерительная техника. 2005. № 12. С. 9–14.
43. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Об устойчивости и мощности критериев проверки однородности средних // Измерительная техника. 2008. № 9. С. 23–28.
44. Лемешко Б.Ю., Миркин Е.П. Критерии Бартлетта и Кокрена в измерительных задачах при вероятностных законах, отличающихся от нормального // Измерительная техника. 2004. № 10. С. 10–16.
45. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Горбунова А.А. О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. I. Параметрические критерии // Измерительная техника. 2010. № 3. С. 10–16.
46. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Горбунова А.А. О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. II. Непараметрические критерии // Измерительная техника. 2010. № 5. С. 11–18.
47. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. 416 с.
48. Лемешко С.Б. Критерий независимости Аббе при нарушении предположений нормальности // Измерительная техника. 2006. № 10. С. 9–14.
49. Лемешко Б.Ю., Комиссарова А.С., Щеглов А.Е. Применение некоторых критериев проверки гипотез случайности и отсутствия тренда // Метрология. 2010. № 12. С. 3–25.

50. Лемешко Б.Ю., Комиссарова А.С., Щеглов А.Е. Свойства и мощность некоторых критериев случайности и отсутствия тренда // Научный вестник НГТУ. 2012. № 1(46). С. 53–66.
51. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Расширение области применения критериев типа Граббса, используемых при отбраковке аномальных измерений // Измерительная техника. 2005. № 6. С. 13–19.
52. Лемешко Б.Ю., Огурцов Д.В. Статистическое моделирование как эффективный инструмент для исследования законов распределения функций случайных величин // Метрология. 2007. № 5. С. 3–13.
53. Лемешко Б.Ю., Помадин С.С. Корреляционный анализ наблюдений многомерных случайных величин при нарушении предположений о нормальности // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5. № 3. С. 115–130.
54. Лемешко Б.Ю., Помадин С.С. Корреляционный анализ многомерных случайных величин при нарушении предположений о нормальности // Труды 10-го юбилейного Международного симпозиума по непараметрическим и робастным методам в кибернетике. Томск, 2002. С. 125–141.
55. Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В., Пleshкова Т.А. Проверка простых и сложных гипотез о согласии по цензурированным выборкам // Научный вестник НГТУ. 2010. № 4(41). С. 13–28.
56. Chimitova E., Lemeshko B., Nikulin M., Tsivinskaya A. Nonparametric goodness-of-fit tests for censored data // Proc. 7th International Conference on «Mathematical Methods in Reliability»: Theory. Methods. Applications, Beijing, China, June 20–24, 2011. P. 817–823.
57. Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В., Ведерникова М.А. Модифицированные критерии согласия Колмогорова, Крамера – Мизеса – Смирнова и Андерсона – Дарлинга для случайного цензурированных выборок. Ч. 1 // Научный вестник НГТУ. 2012. № 4(49). С. 12–19.
58. Галанова Н.С., Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В. Применение непараметрических критериев согласия к проверке адекватности моделей ускоренных испытаний // Автотметрия. 2012. № 6. С. 53–68.

*Лемешко Борис Юрьевич*

*Горбунова Алиса Александровна*

*Лемешко Станислав Борисович*

*Постовалов Сергей Николаевич*

*Рогожников Андрей Павлович*

*Чимитова Екатерина Владимировна*

Новосибирский государственный технический университет,

E-mail: Lemeshko@fpm.ami.nstu.ru, gorbunova.alisa@gmail.com,

skyer@mail.ru, Postovalov@ngs.ru, rogozhnikov.andrey@gmail.com,

ekaterina.chimitova@gmail.com

Поступила в редакцию 3 мая 2012 г.

*Lemeshko B.Yu., Gorbunova A.A., Lemeshko S.B., Postovalov S.N., Rogozhnikov A.P., Chimitova E.V. (Novosibirsk State Technical University) Computer simulations and research of probabilistic regularities.*

Keywords: parameter estimation, statistical hypothesis testing, goodness-of-fit tests, test power.

The problems of application of computer technologies for the research of probabilistic and statistical regularities are considered. It is shown that computer technologies are a powerful means for the development of applied mathematical statistics apparatus, as well as a means for the extension of classical methods when some standard assumptions are not satisfied.