

Сибирский государственный университет  
телекоммуникаций и информатики

**ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ  
И  
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

РОССИЙСКАЯ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ  
КОНФЕРЕНЦИЯ

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ

Новосибирск  
2018

**ISBN 978-5-91434-042-8**

© ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» 2018  
© Авторы 2018

# СОДЕРЖАНИЕ

## Секция 1

### ИНФОРМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

#### Подсекция 1.1. НГТУ

<b>Бауэр Д.В., Гультяева Т.А.</b> Разработка программной системы электронного голосования на децентрализованной платформе.	6
<b>Блинов П.Ю., Лемешко Б.Ю.</b> Свойства критериев экспоненциальности Дешпанде.	10
<b>Гриф А.М.</b> Экологический 3D-мониторинг качества воздуха города Новосибирска на основе данных спутниковой навигации, мобильных экометрических станций и метода конечных элементов.	17
<b>Зорина А.А., Лемешко Б.Ю.</b> О критериях проверки показательности Аткинсона.	26
<b>Кобьялянский В.Г., Михед К.А.</b> Исследование динамических характеристик виртуального прибора ColorLearn среды LabVIEW.	31
<b>Кочнев А.В., Волкова В.М.</b> Идентификация сообществ, формируемых системой горизонтального премирования методами кластеризации в графах.	35
<b>Лемешко Б.Ю., Белоцерковец В.Н.</b> О свойствах и мощности критериев нормальности Лина–Мудхолкара и Васичека.	40
<b>Лемешко Б.Ю., Веретельникова И.В.</b> О применении и мощности $k$ -выборочных критериев однородности законов.	48
<b>Лемешко Б.Ю., Новикова А.Ю.</b> О критериях Миллера и Лайарда и мощности критериев однородности дисперсий.	60
<b>Морозов Ю.В., Спектор А.А.</b> Выравнивание амплитуд импульсов шагов человека при классификации сейсмических сигналов.	70
<b>Осинцева Е.А., Чимитова Е.В.</b> Построение оптимальных планов эксперимента на основе винеровской деградационной модели.	75
<b>Патрушев И.И., Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г.</b> Исследование численного метода трёхмерного моделирования процесса многофазной фильтрации.	85
<b>Поверин Д.В., Постовалов С.Н.</b> Оценивание вероятности обнаружения новых ассоциаций при комбинировании результатов полногеномного анализа ассоциаций.	93
<b>Попов А.А., Бобоев Ш.А.</b> Сравнение разреженных решений, получаемых разбиением выборки на части на основе внешних критериев качества моделей в методе LS–SVM.	102
<b>Попов А.А., Холдонов А.А.</b> Построение деревьев регрессии при разбиении области действия факторов на нечеткие партиции.	110
<b>Попов А.А., Холкин В.В.</b> Построение робастных и разреженных решений по методу опорных векторов с функцией потерь Йохана Сайкинса.	117
<b>Сергеева С.А., Чимитова Е.В.</b> Построение обратной гауссовской деградационной модели с фиксированным и случайным эффектами.	123
<b>Соснин И.В., Гультяева Т.А.</b> Применение NLP-библиотек для решения задач классификации текстов.	135
<b>Толстобров И.А., Ступаков И.М.</b> Вычисление сингулярных интегралов для базисных функций высокого порядка в методе граничных элементов с применением рекуррентных соотношений.	139
<b>Филоненко П.А., Постовалов С.Н.</b> Выбор статистического критерия однородности распределений с помощью правила Сэвиджа для принятия решений в условиях риска и неопределенности.	144
<b>Черникова О.С., Долгов А.А.</b> Применение адаптивного сигма-точечного фильтра Калмана при исследовании непрерывно-дискретных систем.	150
<b>Чубич В.М., Прокофьева А.Э.</b> Активная параметрическая идентификация одной динамической системы с использованием робастного оценивания.	159

# О критериях проверки показательности Аткинсона

А. А. Зорина, Б. Ю. Лемешко<sup>1</sup>

Новосибирский государственный технический университет

Рассматривается критерий проверки гипотезы о принадлежности выборки показательному закону распределения. Исследуется распределение статистик критерия, мощность критерия относительно различных конкурирующих гипотез. Опираясь на результаты исследований, даны рекомендации по применению критерия.

*Ключевые слова:* показательное распределение, мощность, критерий Аткинсона.

## 1. Введение

В задачах статистического анализа популярной моделью является показательный закон распределения вероятностей. Это можно объяснить не только тем, что эта модель проста и удобна в использовании, но и тем, что во многих задачах теории надёжности и анализа выживаемости она хорошо описывает случайные величины, связанные с данными типа времени жизни, заболеваний, смерти или временами отказов некоторых устройств и объектов. Гипотеза о принадлежности показательному закону времени наработки на отказ эквивалентна гипотезе о том, что наблюдаемый объект имеет постоянную интенсивность отказов.

Проверке гипотез о принадлежности выборки показательному закону посвящено большое количество работ, в которых авторами предлагаются различные статистические критерии. Обилие критериев обусловлено, с одной стороны, частым использованием модели показательного закона в приложениях. В определённой степени эта частота стимулирована открывающейся возможностью в дальнейшем искать решение задачи с опорой на аналитические методы. С другой стороны, множество имеющихся критериев свидетельствует об отсутствии некоторого безоговорочно предпочтительного критерия.

Данная работа посвящена исследованию свойств и мощности критерия Аткинсона и дополняет результаты [1], способствующие подготовке рекомендаций, аналогичных [2,3].

В работе речь идёт о критериях проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки показательному закону распределения.

Обозначим показательное распределение случайной величины  $X$  как  $Exp(\lambda)$ , где  $\lambda > 0$  – параметр масштаба распределения. Функции распределения вероятностей и плотности для показательного закона имеют соответственно вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \in R. \quad (1)$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}. \quad (2)$$

Для проверки гипотезы  $H_0$  о принадлежности выборки показательному закону распределения используются ряд критериев, непосредственно построенных для этой цели. Таковую

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» (№ 1.4574.2017/6.7) и проектной части государственного задания (№ 1.1009.2017/4.6).

гипотезу можно проверять с помощью аналогов критериев нормальности, адаптированных для показательного закона, а также с использованием различных критериев согласия [4, 5].

Некоторые критерии проверки показательности основаны на оценке порядковых статистик величины  $X$  – элементов  $x_{(i)}$  вариационного ряда  $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$ , построенного по выборке  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

## 2. Конкурирующие гипотезы, рассматриваемые при анализе мощности критериев

При сравнительном анализе исследовалась мощность критериев относительно ряда конкурирующих гипотез, соответствующих принадлежности выборок следующим законам распределения:

$$H_1 : F(x) = W(0.8, 1, 0), x \in [0, +\infty), \quad (3)$$

$$H_2 : F(x) = W(1.2, 1, 0), x \in [0, +\infty), \quad (4)$$

где  $W(a, 1, 0)$  – распределение Вейбулла с параметром формы  $a$ ;

$$H_3 : F(x) = \Gamma(0.5, 1, 0), x \in [0, +\infty), \quad (5)$$

$$H_4 : F(x) = \Gamma(1.2, 1, 0), x \in [0, +\infty), \quad (6)$$

где  $\Gamma(a, 1, 0)$  – Гамма-распределение с параметром формы  $a$ .

В данной работе распределения статистики рассматриваемого критерия показательности Аткинсона исследовались методами статистического моделирования. При исследовании распределения статистики критерия количество экспериментов, осуществляемых при статистическом моделировании, принималось равным 16600. Такое количество экспериментов позволяет проследить примерную (качественную) картину, отражающую изменение распределений статистик в зависимости от различных факторов [6].

## 3. Критерии показательности Аткинсона

Критерий Аткинсона (А) [7] базируется на статистике вида

$$T_n(p) = \sqrt{p} \left| \frac{\left( n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p}}{\bar{x}} - (1 + \dots)^{1/p} \right| \quad (7)$$

где  $p$  – параметр критерия,  $p > -1$ .

Критерий правосторонний, проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики (7). Распределения статистики (7) критерия Аткинсона зависят от параметра  $p$ . Эту зависимость функции распределения  $G(T_n(p)|H_0)$  статистики (7) от значения  $p$  при  $n = 100$  иллюстрирует рис. 1, а зависимость распределения статистик (7) от объёма выборки при  $p = 0.5$  – рис.2.

Утверждается [7], что статистика вида

$$\frac{T_n(p)}{\sqrt{\sigma_F^2(p)}} \rightarrow |N(0, 1)|, \quad (8)$$

где

$$\sigma_F^2(p) = (p+1)^{\frac{2}{p}} \left( -1 - \frac{1}{p^2} + \frac{\Gamma(1+2p)}{p^2 \Gamma^2(1+p)} \right), \quad (9)$$

с ростом объема выборки при  $p > -1$  приближается к стандартному полунормальному закону.

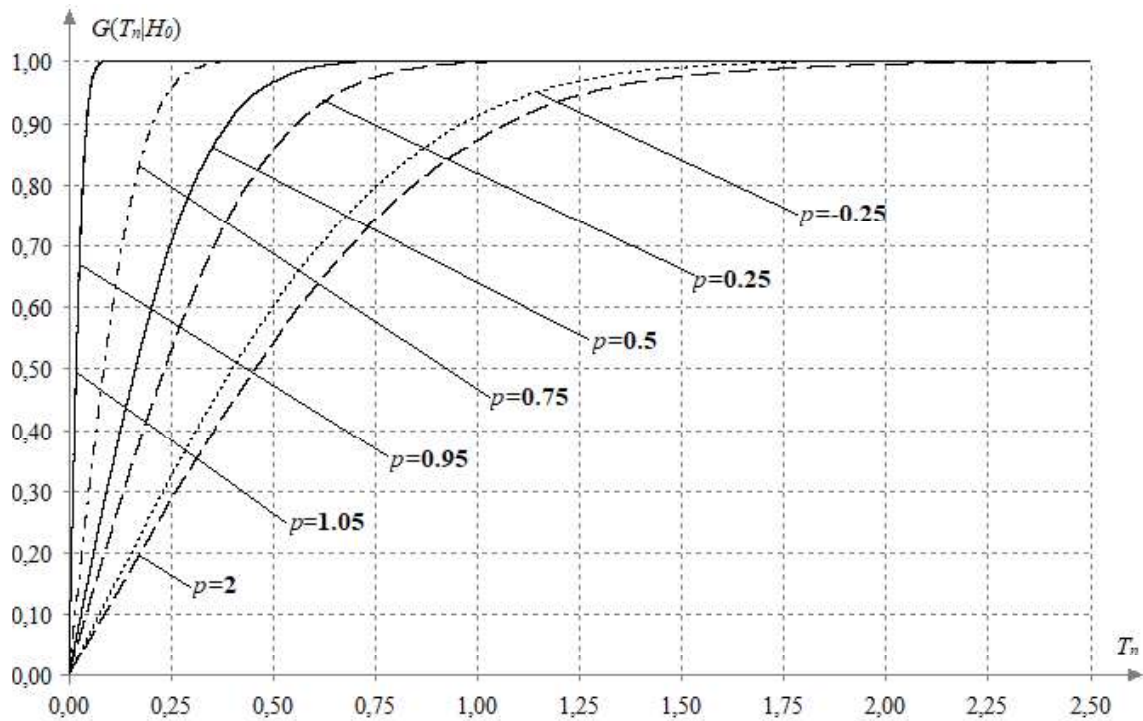


Рис. 1. Распределение статистики (7) Аткинсона в зависимости от параметра  $p$

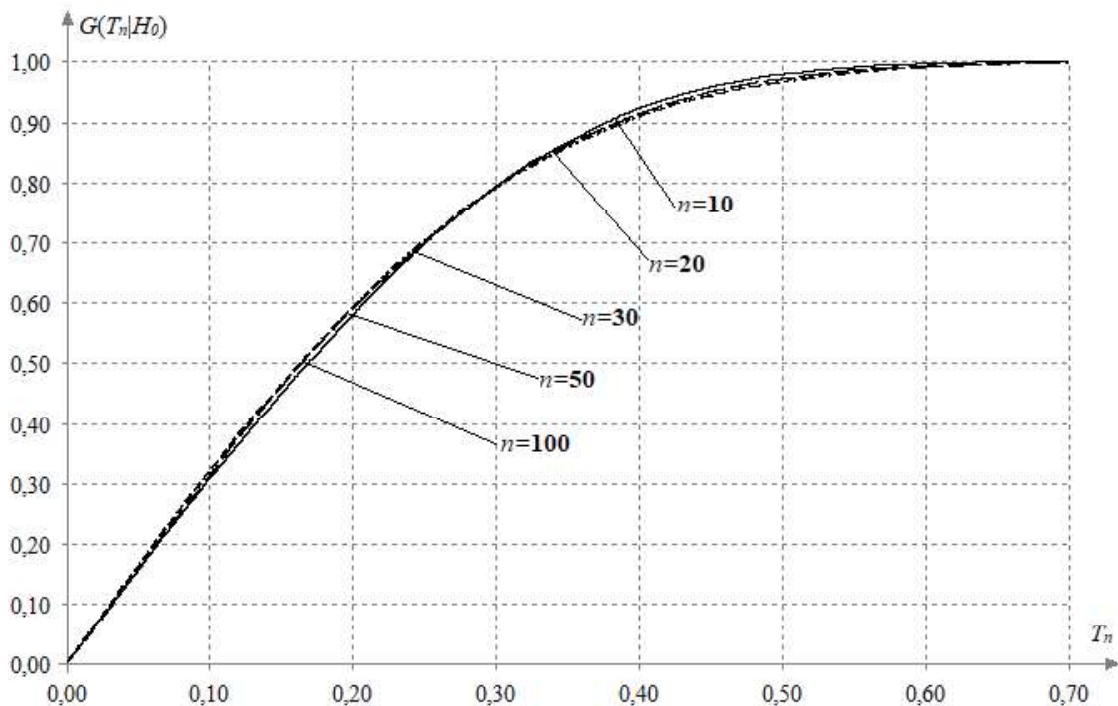


Рис. 2. Распределение статистики (7) Аткинсона с параметром  $p = 0.5$  в зависимости от  $n$

#### 4. Сравнительный анализ мощности некоторых критериев

В ходе работы был проведен анализ мощности рассматриваемого критерия Аткинсона при  $p = 2$  в сравнении с другими критериями показательности: такими как Андерсона–Дарлинга (АД), Кокса–Оукса (КО), Эппса–Палли (ЭП), Холландера–Прошана (ХП), Лоренца (Л05) и Морана (М).

Оценки мощности критериев при проверке гипотезы  $H_0$  относительно конкурирующих гипотез  $H_1$  и  $H_2$  при объёме выборки  $n = 25$  представлены в таблице 1, а относительно конкурирующих гипотез  $H_3$  и  $H_4$  – в таблице 2.

Таблица 1. Оценки мощности критериев относительно  $H_1$  и  $H_2$

Критерий	$\alpha$					
	$H_1$			$H_2$		
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
Андерсона–Дарлинга	0.407	0.312	0.164	0.230	0.134	0.031
Кокса–Оукса	0.436	0.328	0.158	0.271	0.169	0.051
Холландера–Прошана	0.365	0.262	0.113	0.240	0.148	0.044
Эппса–Палли	0.384	0.279	0.125	0.258	0.161	0.048
Лоренца (0.5)	0.378	0.273	0.121	0.243	0.149	0.045
Морана	0.435	0.356	0.205	0.255	0.126	0.005
Аткинсона (2)	0.336	0.274	0.155	0.277	0.133	0.001

Таблица 2. Оценки мощности критериев относительно  $H_3$  и  $H_4$

Критерий	$\alpha$					
	$H_3$			$H_4$		
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
Андерсона–Дарлинга	0.845	0.786	0.637	0.139	0.072	0.013
Кокса–Оукса	0.872	0.811	0.650	0.158	0.089	0.022
Эппса–Палли	0.734	0.632	0.414	0.149	0.082	0.020
Холландера–Прошана	0.783	0.701	0.511	0.144	0.079	0.019
Лоренца (0.5)	0.771	0.685	0.491	0.144	0.079	0.019
Морана	0.891	0.855	0.749	0.153	0.066	0.002
Аткинсона (2)	0.6	0.528	0.337	0.152	0.067	0.003

По мощности относительно рассмотренных конкурирующих гипотез все критерии можно упорядочить следующим образом:

- относительно гипотезы  $H_1$ : КО  $\succ$  М  $\succ$  АД  $\succ$  ЭП  $\succ$  Л05  $\succ$  ХП  $\succ$  А2;
- относительно гипотезы  $H_2$ : А2  $\succ$  КО  $\succ$  М  $\succ$  ЭП  $\succ$  Л05  $\succ$  ХП  $\succ$  АД;
- относительно гипотезы  $H_3$ : М  $\succ$  КО  $\succ$  АД  $\succ$  ХП  $\succ$  Л05  $\succ$  ЭП  $\succ$  А2;
- относительно гипотезы  $H_4$ : КО  $\succ$  М  $\succ$  А2  $\succ$  ЭП  $\succ$  Л05  $\succ$  ХП  $\succ$  АД.

Можно обратить внимание, что мощность критерия Аткинсона выше относительно конкурирующих гипотез с параметрами формы законов Вейбулла гамма-распределения выше 1. В то же время при малых задаваемых уровнях значимости  $\alpha$  ситуация противоположна.

## 5. Заключение

Методами статистического моделирования исследовано распределение статистики критерия показательности Аткинсона. Проведен сравнительный анализ мощности рассматриваемого критерия относительно некоторых конкурирующих гипотез с мощностью ряда других, что позволяет судить о предпочтительности применения тех или иных критериев. Отмечены недостатки критерия.

Из результатов следует, что среди рассмотренных критериев нельзя однозначно выбрать критерий, обладающий наибольшей мощностью относительно всех рассмотренных альтернатив.

## Литература

1. *Рогожников А. П.* Исследование свойств некоторых критериев проверки статистических гипотез и обеспечение корректности их применения методами компьютерного моделирования : диссертация / канд. тех. наук. НГТУ, Новосибирск, 2012.
2. *Лемешко Б. Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 160 с.
3. *Лемешко Б. Ю., Блинов П. Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 183 с.
4. *Лемешко Б. Ю.* Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2014. 163 с.
5. *Денисов В. И., Лемешко Б. Ю., Постовалов С.Н.* Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. Часть I. Критерии типа  $\chi^2$ . 126 с.
6. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. 119 с.
7. *Mimoto, N. Zitikis, R.* The Atkinson index, the Moran statistic, and testing exponentiality. Japan: J. Japan Statist. Soc., 2008. Vol. 38, p. 187-205

### **Лемешко Борис Юрьевич**

Д.т.н., профессор, г.н.с. кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20), e-mail: lemashko@ami.nstu.ru.

### **Зорина Александра Алексеевна**

Магистрант кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20), e-mail: programm13@gmail.com.

### **About Atkinson`s tests of exponentiality**

#### **A. A. Zorina, B. Yu. Lemeshko**

The exponential tests are considered. Distributions of the test statistics, power of tests under different competing hypotheses are studied. We provide recommendations for using tests based on results of studies.

*Keywords:* exponential distribution, test, test statistic, test power.