Автоматика и телемеханика, № 7, 2010

© 2010 г. **Б.Ю. ЛЕМЕШКО, д-р техн. наук,**
С.Б. ЛЕМЕШКО, канд. техн. наук
(Новосибирский государственный технический университет),
М.С. НИКУЛИН, канд. физ.-мат. наук,
Н. СААИДИА
(Университет Виктора Сигалена Бордо 2, Бордо, Франция)

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ПРИ ПРОВЕРКЕ СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБРАТНОГО ГАУССОВСКОГО ЗАКОНА[1]

Приводятся таблицы процентных точек и модели распределений статистик для непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона в случае использования оценок максимального правдоподобия.

1. Введение. Роль компьютерных технологий в исследовании статистических закономерностей

Практика применения методов статистического анализа в различных приложениях, в том числе в задачах надежности, богата постановками, формулировки которых не укладываются в рамки классических предположений. Широкий спектр методов статистического анализа базируется на предположении о принадлежности ошибок измерений нормальному закону. В реальных условиях предположение "нормальности", а часто и другие предположения, не выполняются. Использование классических методов математической статистики в таких ситуациях может оказаться некорректным.

Многие классические результаты имеют асимптотический характер, в то время как на практике обычно имеют дело с конечными, часто весьма ограниченными, объемами выборок. В таких ситуациях далеко не всегда применение асимптотических результатов оказывается правомерным.

Форма представления (регистрации) данных (измерений) зачастую не соответствуют рассматриваемым в учебниках по математической статистике точечным выборкам. Реальные наблюдения (выборки) могут быть группированными, частично группированными, цензурированными, многократно цензурированными, интервальными, что резко ограничивает применение классических методов и результатов.

В задачах, например, анализа надежности и долговечности сложных систем, контроля качества высоконадежных изделий, анализа выживания при сложных хронических заболеваниях и т.п. в последнее время пытаются применять динамические регрессионные модели, развивать методы статистики ускоренных испытаний для анализа сложных индустриальных и медицинских экспериментов в динамически меняющихся средах. Как и во многих других ситуациях, широкое применение новых подходов сдерживается, с одной стороны, развитием математического аппарата, а с

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00056-а), Рособразования (АВП "Развитие научного потенциала высшей школы", проект № 2.1.2/3970) и Минобрнауки РФ (ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России", проекты № НК-15П(4), НК-178П(3), НК-437П(6)).

другой стороны, отсутствием программной поддержки, способствующей развитию этого аппарата и применению разрабатываемых методов.

Выявление фундаментальных статистических закономерностей в нестандартных условиях приложений, как правило, является сложной задачей. В то же время, аналитические методы исследования таких закономерностей (например, статистических свойств оценок или распределений статистик критериев) чрезвычайно трудоемки и не позволяют, вследствие сложности, обеспечить решение всего множества задач. Реальный выход заключается в широком использовании численного подхода, связанного с компьютерным моделированием статистических закономерностей в условиях, имитирующих реальную ситуацию проведения измерений, с последующим построением математических моделей, приближенно описывающих полученные закономерности. Такой подход позволяет добиться хороших результатов там, где этого не удается достичь одними аналитическими методами. Поэтому методы компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей в последнее время получают все более широкое распространение.

В настоящее время известно множество систем статистического анализа, широко используемых в различных приложениях. В базе CTI (The Computers in Teaching Initiative – организация, объединяющая британские университеты) содержится более 100 пакетов, реализующих системы статистического анализа. В России наиболее популярно применение систем STATISTICA, SPSS и SAS. Одни программные системы из упомянутого перечня представляют собой универсальные системы, ориентированные на максимально широкий спектр методов статистического анализа, другие предназначены для решения относительно узкого класса задач. Предлагаемые системы дают инструментарий для решения задач статистического анализа в различных приложениях. Однако эти системы, как правило, не могут служить инструментарием для исследования закономерностей в самой математической статистике, инструментом для развития ее математического аппарата.

Анализ наметившихся тенденций показывает увеличение числа работ, в которых для исследования свойств оценок и статистик, для подтверждения аналитических выводов используются методы численного анализа и методы статистического моделирования. Все чаще компьютерные технологии используют для совершенствования аппарата прикладной математической статистики. В частности, с применением компьютерного подхода и его развитием авторами был получен ряд полезных для практики результатов.

При проверке сложных гипотез, когда скалярный или векторный параметр закона распределения вероятностей вычисляется по той же выборке, непараметрические критерии согласия Колмогорова, Крамера – Мизеса – Смирнова и Андерсона – Дарлинга теряют свободу от распределения. При проверке сложных гипотез условные распределения статистик критериев зависят от ряда факторов.

Результаты исследований распределений статистик непараметрических критериев согласия при простых и сложных гипотезах о согласии с рядом законов [1–3], наиболее часто используемых в приложениях, построенные модели распределений статистик для различных сложных гипотез и таблицы процентных точек вошли в разработанные рекомендации по стандартизации Р 50.1.037-2002 [4]. В настоящий момент эти результаты уточнены и расширены [5–8].

Построены таблицы асимптотически оптимального группирования для достаточно широкого круга распределений, наиболее часто используемых в приложениях. Применение таблиц асимптотически оптимального группирования обеспечивает максимальную мощность критериев типа χ^2 при близких конкурирующих гипотезах [9]. Исследована зависимость мощности от числа интервалов и впервые было показано, что существует оптимальное число интервалов, зависящее от объема выборки, конкретных альтернатив и способа группирования [10–13]. Часть результатов вошла в рекомендации по стандартизации Р 50.1.033-2001 [14].

Информация, содержащаяся в различных источниках, о преимуществах в определенных ситуациях того или иного критерия согласия неоднозначна и зачастую противоречива. Оценки асимптотической мощности критериев трудно использовать вследствие ограниченных объемов выборок, с которыми приходится иметь дело на практике. Исследования мощности затруднены отсутствием результатов о законах распределения статистик при справедливости конкурирующих гипотез. Результаты оценки мощности критериев согласия относительно близких конкурирующих гипотез, представленные в [15–17], позволяют упорядочить критерии по мощности.

В [18, 19] было показано, что в некоторых случаях даже при значительной степени цензурирования потери в информации Фишера, связанные с цензурированием выборок, невелики. Это позволяет получать хорошие оценки параметров закона. Методами компьютерного моделирования были исследованы законы распределения оценок максимального правдоподобия (ОМП) параметров распределений по цензурированным наблюдениям при различной степени цензурирования и различных объемах полных выборок. Было показано, что при ограниченных объемах выборок распределения ОМП оказываются асимметричными, а ОМП – смещенными.

При исследовании методами статистического моделирования распределений классических статистик, используемых при проверке гипотез о математических ожиданиях и дисперсиях, было показано, что в случае проверки гипотез о математических ожиданиях применение классических результатов оказывается корректным при существенных отклонениях наблюдаемого закона от нормального [20]. Этот вывод справедлив и для параметрических критериев типа Стьюдента, применяемых для проверки гипотез об однородности средних двух выборок [21]. Исследована устойчивость и мощность критерия Аббе, используемого при проверке гипотез об отсутствии тренда [22].

Для статистик, используемых в критериях проверки гипотез о дисперсиях, получены таблицы процентных точек, применение которых правомерно при наблюдаемых законах, описываемых экспоненциальным семейством распределений [20]. Для статистик, используемых в критериях Бартлетта и Кокрена, получены таблицы процентных точек, применение которых правомерно при наблюдаемых законах, описываемых экспоненциальным семейством распределений [23].

Получены таблицы процентных точек для статистик критериев типа Граббса при проверке на выброс одновременно трех максимальных (трех минимальных) значений и одновременно минимального и максимального значений в выборке. Методами статистического моделирования исследованы распределения статистик критериев Граббса, используемых в задачах отбраковки аномальных измерений, при отклонениях наблюдаемого закона от нормального [24].

Исследована мощность критериев однородности двух выборок Смирнова и Лемана – Розенблатта. Предложена поправка к статистике Смирнова, улучшающая сходимость распределения статистики к предельному закону [25].

Разработаны средства для моделирования и исследования законов распределения произвольных функций случайных величин и функций систем случайных величин и средства построения для этих законов приближенных моделей [26].

Исследованы распределения статистик и мощность ряда критериев проверки отклонения от нормального закона. Проведено сравнение с мощностью критериев согласия. Показаны недостатки некоторых популярных критериев [27, 28], в частности смещенность критериев Шапиро – Уилка и Эппса – Палли относительно некоторых конкурирующих гипотез.

Разработана методика моделирования распределений статистик многомерных случайных величин и исследования распределений статистик многомерных случайных величин [29].

Можно констатировать, что компьютерные технологии анализа данных и исследования вероятностных и статистических закономерностей представляют собой мощный инструмент для развития и совершенствования аппарата прикладной математической статистики, в том числе для решения задач анализа надежности, долговечности и выживания.

2. Непараметрические критерии согласия при проверке простых и сложных гипотез

Непараметрические критерии согласия Колмогорова, ω^2 Крамера – Мизеса – Смирнова, Ω^2 Андерсона – Дарлинга при проверке простых гипотез H_0: $F(x) = F(x,\theta)$, где теоретическое распределение $F(x,\theta)$ полностью определено, не зависят от вида закона, с которым проверяется согласие.

В критерии Колмогорова в качестве расстояния между эмпирическим и теоретическим законами распределения используется величина

$$D_n = \sup_{|n|<\infty} |F_n(x) - F(x,\theta)|,$$

где $F(x)$ – эмпирическая функция распределения, n – объем выборки. При $n \to \infty$ функция распределения статистики $\sqrt{n}D_n$ при справедливости проверяемой гипотезы сходится равномерно к функции распределения Колмогорова [30].

При проверке гипотез с применением критерия Колмогорова рекомендуется использовать статистику с поправкой Большева [31, 32] в форме [33]

$$S_K = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \tag{1}$$

где

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-),$$
$$D_n^+ = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{i}{n} - F(x_i,\theta)\right\}, \quad D_n^- = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{F(x_i,\theta) - \frac{i-1}{n}\right\},$$

n – объем выборки, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – упорядоченные по возрастанию элементы выборки. При справедливости простой проверяемой гипотезы статистика (1) также подчиняется закону распределения Колмогорова [33], причем сходится к нему существенно быстрее, чем статистика $\sqrt{n}D_n$.

В критерии ω^2 Крамера – Мизеса – Смирнова используется статистика вида [33]

$$S_\omega = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left\{F(x_i,\theta) - \frac{2i-1}{2n}\right\}^2, \tag{2}$$

а в критерии типа Ω^2 Андерсона – Дарлинга [34, 35] – статистика в форме

$$S_\Omega = -n - 2\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{2i-1}{2n}\ln F(x_i,\theta) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n}\right)\ln(1 - F(x_i,\theta))\right\}. \tag{3}$$

При проверке простых гипотез статистика (2) подчиняется распределению $a1(S)$ [33], а статистика (3) – распределению $a2(S)$ [33].

При проверке сложных гипотез $H_0 : F(x) \in \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$, когда оценка скалярного или векторного параметра распределения вычисляется по той же самой выборке, непараметрические критерии согласия Колмогорова, ω^2 Крамера – Мизеса – Смирнова, Ω^2 Андерсона – Дарлинга теряют свойство свободы от распределения. В этом случае условные распределения статистик $G(S \mid H_0)$ становятся зависящими от ряда факторов: от вида наблюдаемого закона $F(x,\theta)$, соответствующего справедливой проверяемой гипотезе H_0; от типа оцениваемого параметра и числа оцениваемых параметров; во многих случаях от конкретного значения параметра (например, в случае семейств гамма- и бета-распределений); от метода оценивания параметров.

Различия в предельных распределениях той же самой статистики при проверке простых и сложных гипотез настолько существенны, что пренебрегать этим ни коем случае нельзя. Несмотря на это, практика применения непараметрических критериев согласия изобилует примерами некорректного использования классических результатов, имеющих силу лишь при проверке простых гипотез, в ситуациях, соответствующих проверке сложных гипотез.

Начало исследованиям предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при сложных проверяемых гипотезах положила работа [36]. В дальнейшем для решения данной проблемы использовались различные подходы: предельные распределения статистик исследовались аналитическими методами [37–49]; процентные точки распределений строились методами статистического моделирования [50–53]; строились формулы, дающие достаточно хорошие приближения при малых значениях соответствующих вероятностей [54–56].

В работах авторов [1–8] распределения статистик непараметрических критериев согласия исследовались методами статистического моделирования. Далее, опираясь на полученные эмпирические распределения статистик, строились таблицы процентных точек и приближенные аналитические модели законов распределения статистик.

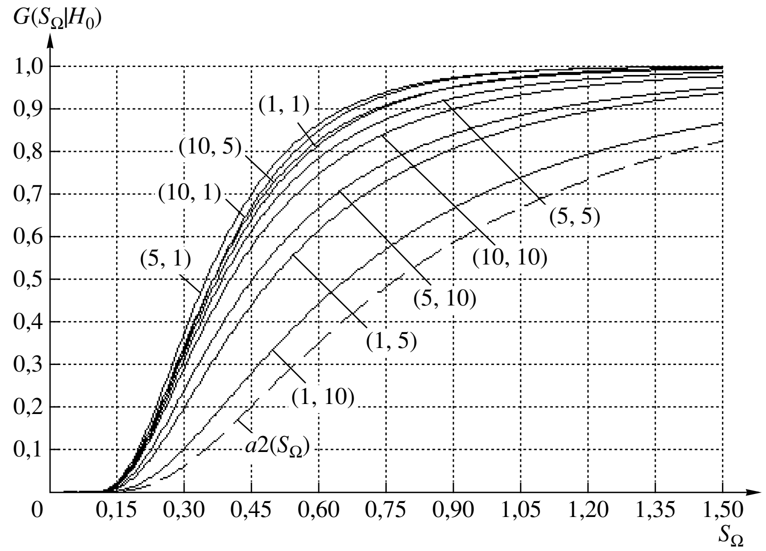
3. Модели распределений статистик критериев согласия в случае обратного гауссовского распределения

Плотность обратного гауссовского распределения имеет вид

$$f(x) = IG(\theta_0, \theta_1) = \left(\frac{\theta_1}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\theta_1 (x-\theta_0)^2}{2\theta_0^2 x}\right), \tag{4}$$

где параметры $\theta_0, \theta_1 \in (0,\infty)$, $x \in (0,\infty)$. Особенный интерес к использованию данного закона проявляется в задачах анализа надежности, долговечности и выживания, когда имеются основания предполагать, что функция интенсивности отказов имеет колоколообразную форму. Очевидно, что в этом случае логнормальное распределение выступает в качестве естественной альтернативы. Следует отметить, что с этими двумя моделям может конкурировать трехпараметрическая модель обобщенного распределения Вейбулла (см. например, [57]), функция интенсивности которого может принимать все известные виды и, в частности, колоколообразной формы.

При проверке сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона распределения статистик $G(S \mid H_0)$ критериев согласия зависят от конкретных значений θ_0 и θ_1. Эту зависимость для распределений статистики критерия Андерсона – Дарлинга для случая использования ОМП демонстрирует рисунок.



Зависимость распределений статистики Андерсона – Дарлинга от значений θ_0 и θ_1 при использовании для оценивания параметров метода максимального правдоподобия.

В данной работе, которая является развитием [58, 59], задача исследования распределений статистик непараметрических критериев согласия для случая проверки сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона расширена на достаточно большой диапазон значений параметров θ_0 и θ_1 семейства (4). Таблицы процентных точек и модели распределений статистик критериев Колмогорова, ω^2 Крамера – Мизеса – Смирнова, Ω^2 Андерсона – Дарлинга строились по смоделированным выборкам статистик объемом $N = 10^6$. При таких N величина разности между истинным законом $G(S \mid H_0)$ распределения статистики и смоделированным эмпирическим $G_N(S \mid H_0)$ по модулю не превышает 0,001. При этом значения статистик критериев вычислялись по выборкам псевдослучайных величин, генерируемых в соответствии с наблюдаемым законом $F(x, \theta)$, объемом $n = 10^3$. В такой ситуации распределение $G(S_n \mid H_0)$ практически совпадает с предельным $G(S \mid H_0)$.

Как правило, наилучшей моделью для распределения $G(S \mid H_0)$ статистик Колмогорова, ω^2 Крамера – Мизеса – Смирнова, Ω^2 Андерсона – Дарлинга оказывались распределения семейства бета-распределений III-го рода с функцией плотности

$$B_{\mathrm{III}}(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0,\theta_1)} \frac{\left(\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1}\left(1-\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left(1+(\theta_2-1)\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0+\theta_1}}.$$

Найденные верхние процентные точки и построенные модели для предельных распределений статистики критерия Колмогорова в случае вычисления ОМП для обоих параметров закона представлены в табл. 1, для предельных распределений статистики критерия Андерсона – Дарлинга – в табл. 2, для критерия Крамера – Мизеса – Смирнова – в табл. 3.

Таблица 1. Процентные точки и распределения статистики Колмогорова при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0,9	0,95	0,99	
1	1	0,910	0,998	1,180	$B_{\text{III}}(5{,}9569; 6{,}7824; 3{,}0220; 1{,}6782; 0{,}2806)$
1	2	0,957	1,055	1,264	$B_{\text{III}}(6{,}2372; 6{,}7506; 3{,}6809; 1{,}9867; 0{,}2800)$
1	3	0,997	1,105	1,342	$B_{\text{III}}(6{,}6946; 6{,}3716; 4{,}5298; 2{,}2117; 0{,}2775)$
1	4	1,034	1,151	1,400	$B_{\text{III}}(6{,}0585; 5{,}8419; 4{,}3611; 2{,}2007; 0{,}2883)$
1	5	1,066	1,189	1,450	$B_{\text{III}}(6{,}1201; 5{,}4407; 4{,}5330; 2{,}2010; 0{,}2880)$
1	6	1,094	1,221	1,489	$B_{\text{III}}(6{,}1759; 5{,}1904; 4{,}6124; 2{,}2013; 0{,}2878)$
1	7	1,121	1,250	1,525	$B_{\text{III}}(6{,}2265; 4{,}9927; 4{,}6521; 2{,}2018; 0{,}2873)$
1	8	1,143	1,273	1,548	$B_{\text{III}}(6{,}0718; 4{,}9852; 4{,}4776; 2{,}2284; 0{,}2896)$
1	9	1,159	1,292	1,565	$B_{\text{III}}(5{,}6511; 4{,}9390; 4{,}0653; 2{,}1915; 0{,}2975)$
1	10	1,172	1,306	1,577	$B_{\text{III}}(5{,}6247; 4{,}8832; 4{,}0106; 2{,}1894; 0{,}2995)$
2	1	0,882	0,964	1,137	$B_{\text{III}}(6{,}3443; 7{,}5748; 2{,}9473; 1{,}6876; 0{,}2713)$
2	2	0,917	1,006	1,199	$B_{\text{III}}(10{,}791; 6{,}9904; 5{,}6290; 1{,}9870; 0{,}2247)$
2	3	0,948	1,045	1,258	$B_{\text{III}}(5{,}0737; 7{,}2993; 2{,}9576; 1{,}9859; 0{,}3000)$
2	4	0,977	1,082	1,319	$B_{\text{III}}(5{,}4784; 7{,}0420; 3{,}5741; 2{,}2027; 0{,}2950)$
2	5	1,006	1,120	1,369	$B_{\text{III}}(5{,}9645; 6{,}1578; 4{,}3007; 2{,}2159; 0{,}2900)$
2	6	1,032	1,152	1,408	$B_{\text{III}}(7{,}6025; 5{,}4045; 5{,}7487; 2{,}2002; 0{,}2700)$
2	7	1,057	1,180	1,446	$B_{\text{III}}(7{,}9396; 5{,}1500; 6{,}0298; 2{,}2004; 0{,}2650)$
2	8	1,079	1,206	1,476	$B_{\text{III}}(5{,}9398; 5{,}1990; 4{,}6104; 2{,}2008; 0{,}2930)$
2	9	1,100	1,228	1,503	$B_{\text{III}}(5{,}7955; 5{,}1024; 4{,}4620; 2{,}2011; 0{,}2950)$
2	10	1,120	1,250	1,528	$B_{\text{III}}(5{,}9634; 4{,}9581; 4{,}5469; 2{,}1960; 0{,}2920)$
3	1	0,869	0,949	1,118	$B_{\text{III}}(6{,}3357; 7{,}5977; 2{,}8564; 1{,}6279; 0{,}2706)$
3	2	0,897	0,984	1,168	$B_{\text{III}}(6{,}5174; 7{,}4125; 3{,}2234; 1{,}7769; 0{,}2700)$
3	3	0,923	1,016	1,217	$B_{\text{III}}(12{,}343; 6{,}5394; 6{,}7642; 1{,}9877; 0{,}2179)$
3	4	0,947	1,046	1,269	$B_{\text{III}}(8{,}9671; 6{,}1291; 5{,}5576; 1{,}9890; 0{,}2500)$
3	5	0,971	1,078	1,318	$B_{\text{III}}(10{,}2720; 6{,}0888; 6{,}8884; 2{,}1989; 0{,}2400)$
3	6	0,997	1,110	1,361	$B_{\text{III}}(12{,}4552; 5{,}4731; 8{,}9051; 2{,}2027; 0{,}2300)$
3	7	1,019	1,137	1,395	$B_{\text{III}}(14{,}7050; 5{,}1363; 10{,}7535; 2{,}2125; 0{,}2200)$
3	8	1,040	1,162	1,429	$B_{\text{III}}(14{,}7958; 4{,}8912; 11{,}0081; 2{,}1998; 0{,}2200)$
3	9	1,061	1,187	1,457	$B_{\text{III}}(15{,}9316; 4{,}7067; 11{,}8935; 2{,}2001; 0{,}2150)$
3	10	1,079	1,208	1,478	$B_{\text{III}}(16{,}1109; 4{,}5707; 12{,}1176; 2{,}2003; 0{,}2150)$
4	1	0,862	0,941	1,107	$B_{\text{III}}(6{,}6438; 7{,}7673; 2{,}9294; 1{,}6332; 0{,}2653)$
4	2	0,885	0,969	1,149	$B_{\text{III}}(6{,}1888; 7{,}3858; 2{,}9758; 1{,}6875; 0{,}2750)$
4	3	0,907	0,997	1,189	$B_{\text{III}}(6{,}9205; 7{,}8981; 3{,}6110; 1{,}9962; 0{,}2650)$
4	4	0,928	1,023	1,234	$B_{\text{III}}(5{,}9780; 9{,}1512; 3{,}3926; 2{,}400; 0{,}2806)$

Таблица 1 (продолжение). Процентные точки и распределения статистики Колмогорова при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0,9	0,95	0,99	
4	5	0,950	1,051	1,282	$B_{\mathrm{III}}(11{,}9075; 5{,}7447; 7{,}5201; 1{,}9905; 0{,}2300)$
4	6	0,971	1,079	1,323	$B_{\mathrm{III}}(11{,}9043; 5{,}8982; 8{,}1014; 2{,}2019; 0{,}2300)$
4	7	0,993	1,107	1,360	$B_{\mathrm{III}}(16{,}9484; 5{,}3410; 11{,}9176; 2{,}1990; 0{,}2100)$
4	8	1,013	1,131	1,391	$B_{\mathrm{III}}(17{,}0835; 5{,}1135; 12{,}3060; 2{,}2027; 0{,}2100)$
4	9	1,032	1,155	1,423	$B_{\mathrm{III}}(17{,}3084; 4{,}8961; 12{,}7239; 2{,}1996; 0{,}2100)$
4	10	1,051	1,177	1,449	$B_{\mathrm{III}}(17{,}2467; 4{,}7356; 12{,}8311; 2{,}1997; 0{,}2100)$
5	1	0,857	0,935	1,099	$B_{\mathrm{III}}(6{,}7006; 7{,}8312; 2{,}9541; 1{,}6335; 0{,}2651)$
5	2	0,877	0,960	1,135	$B_{\mathrm{III}}(9{,}00487; 6{,}9071; 4{,}2573; 1{,}6881; 0{,}2400)$
5	3	0,897	0,984	1,172	$B_{\mathrm{III}}(8{,}9213; 7{,}75024{,}5226; 2{,}0008; 0{,}2400)$
5	4	0,915	1,008	1,212	$B_{\mathrm{III}}(9{,}4154; 6{,}9359; 5{,}2226; 1{,}9946; 0{,}2400)$
5	5	0,934	1,033	1,2518	$B_{\mathrm{III}}(5{,}8431; 14{,}4730; 3{,}6811; 4{,}000; 0{,}2806)$
5	6	0,953	1,057	1,294	$B_{\mathrm{III}}(14{,}8173; 5{,}6823; 9{,}4427; 2{,}0492; 0{,}2150)$
5	7	0,974	1,083	1,331	$B_{\mathrm{III}}(15{,}2826; 5{,}6389; 10{,}5512; 2{,}2057; 0{,}2150)$
5	8	0,993	1,109	1,364	$B_{\mathrm{III}}(20{,}7049; 5{,}2372; 14{,}5735; 2{,}200; 0{,}2000)$
5	9	1,011	1,130	1,392	$B_{\mathrm{III}}(20{,}6647; 5{,}0521; 14{,}7877; 2{,}2001; 0{,}2000)$
5	10	1,029	1,152	1,421	$B_{\mathrm{III}}(26{,}3791; 4{,}8072; 19{,}0811; 2{,}2027; 0{,}1900)$
6	1	0,854	0,932	1,093	$B_{\mathrm{III}}(6{,}6964; 7{,}8242; 2{,}9493; 1{,}6287; 0{,}2640)$
6	2	0,871	0,953	1,126	$B_{\mathrm{III}}(8{,}8962; 7{,}1069; 4{,}1210; 1{,}6892; 0{,}2400)$
6	3	0,888	0,974	1,159	$B_{\mathrm{III}}(9{,}1443; 6{,}9243; 4{,}5492; 1{,}7798; 0{,}2400)$
6	4	0,906	0,996	1,193	$B_{\mathrm{III}}(9{,}2454; 7{,}2428; 4{,}9786; 1{,}9991; 0{,}2400)$
6	5	0,923	1,018	1,228	$B_{\mathrm{III}}(12{,}5264; 6{,}3510; 7{,}1854; 1{,}9935; 0{,}2200)$
6	6	0,940	1,041	1,269	$B_{\mathrm{III}}(5{,}8883; 17{,}8508; 4{,}6295; 6{,}000; 0{,}2806)$
6	7	0,956	1,064	1,306	$B_{\mathrm{III}}(18{,}3816; 5{,}8741; 11{,}9529; 2{,}2081; 0{,}2000)$
6	8	0,977	1,088	1,343	$B_{\mathrm{III}}(23{,}3374; 5{,}4599; 15{,}6767; 2{,}2051; 0{,}1900)$
6	9	0,995	1,111	1,369	$B_{\mathrm{III}}(34{,}6437; 5{,}1591; 23{,}3905; 2{,}2019; 0{,}1750)$
6	10	1,011	1,131	1,395	$B_{\mathrm{III}}(39{,}1153; 4{,}9860; 26{,}4984; 2{,}1988; 0{,}1700)$
7	1	0,854	0,930	1,091	$B_{\mathrm{III}}(6{,}5586; 8{,}0638; 2{,}8375; 1{,}6313; 0{,}2673)$
7	2	0,867	0,948	1,119	$B_{\mathrm{III}}(7{,}1224; 7{,}6538; 3{,}2597; 1{,}6903; 0{,}2600)$
7	3	0,883	0,967	1,149	$B_{\mathrm{III}}(7{,}2034; 7{,}5737; 3{,}4800; 1{,}7800; 0{,}2600)$
7	4	0,898	0,987	1,180	$B_{\mathrm{III}}(7{,}3038; 7{,}9550; 3{,}8033; 2{,}0010; 0{,}2600)$
7	5	0,914	1,007	1,214	$B_{\mathrm{III}}(8{,}5307; 6{,}9961; 4{,}8484; 1{,}9974; 0{,}2500)$
7	6	0,930	1,028	1,250	$B_{\mathrm{III}}(15{,}1195; 5{,}9784; 8{,}9543; 1{,}9927; 0{,}2100)$
7	7	0,946	1,049	1,285	$B_{\mathrm{III}}(5{,}8391; 17{,}5429; 4{,}6421; 6{,}000; 0{,}2806)$

Таблица 1 (окончание). Процентные точки и распределения статистики Колмогорова при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0,9	0,95	0,99	
7	8	0,963	1,071	1,322	$B_{\mathrm{III}}(31{,}3194; 5{,}6956; 19{,}4931; 2{,}2085; 0{,}1700)$
7	9	0,980	1,094	1,353	$B_{\mathrm{III}}(42{,}2228; 5{,}0877; 30{,}0214; 2{,}2059; 0{,}1800)$
7	10	0,997	1,115	1,376	$B_{\mathrm{III}}(42{,}3418; 5{,}0662; 28{,}8200; 2{,}2033; 0{,}1700)$
8	1	0,854	0,930	1,091	$B_{\mathrm{III}}(6{,}7259; 7{,}9921; 2{,}8961; 1{,}6227; 0{,}2658)$
8	2	0,864	0,943	1,113	$B_{\mathrm{III}}(13{,}28101; 6{,}7409; 6{,}0703; 1{,}6914; 0{,}2100)$
8	3	0,878	0,961	1,140	$B_{\mathrm{III}}(13{,}1182; 6{,}5995; 6{,}1889; 1{,}7308; 0{,}2100)$
8	4	0,892	0,980	1,168	$B_{\mathrm{III}}(12{,}8930; 7{,}2771; 6{,}5124; 2{,}0016; 0{,}2100)$
8	5	0,907	0,998	1,201	$B_{\mathrm{III}}(14{,}5402; 6{,}6949; 7{,}78121; 2{,}0005; 0{,}2050)$
8	6	0,921	1,017	1,231	$B_{\mathrm{III}}(17{,}0918; 6{,}1135; 9{,}7622; 1{,}9962; 0{,}2000)$
8	7	0,936	1,037	1,267	$B_{\mathrm{III}}(21{,}3221; 5{,}5875; 13{,}0056; 1{,}9922; 0{,}1950)$
8	8	0,952	1,057	1,300	$B_{\mathrm{III}}(5{,}8759; 19{,}0528; 5{,}7987; 8{,}000; 0{,}2806)$
8	9	0,968	1,079	1,332	$B_{\mathrm{III}}(26{,}8192; 5{,}4765; 18{,}0105; 2{,}2088; 0{,}1850)$
8	10	0,984	1,100	1,360	$B_{\mathrm{III}}(33{,}2892; 5{,}1108; 23{,}7224; 2{,}2066; 0{,}1850)$
9	1	0,855	0,932	1,092	$B_{\mathrm{III}}(7{,}0181; 8{,}0734; 2{,}9699; 1{,}6366; 0{,}2620)$
9	2	0,861	0,940	1,108	$B_{\mathrm{III}}(14{,}8480; 6{,}7456; 6{,}6141; 1{,}6911; 0{,}2000)$
9	3	0,874	0,956	1,133	$B_{\mathrm{III}}(15{,}1905; 6{,}3828; 7{,}0328; 1{,}6895; 0{,}2000)$
9	4	0,887	0,973	1,161	$B_{\mathrm{III}}(14{,}5137; 7{,}3126; 7{,}1548; 2{,}0020; 0{,}2000)$
9	5	0,900	0,991	1,191	$B_{\mathrm{III}}(15{,}4545; 6{,}7896; 8{,}1115; 2{,}0011; 0{,}2000)$
9	6	0,914	1,008	1,220	$B_{\mathrm{III}}(16{,}8407; 6{,}2819; 9{,}4483; 1{,}9990; 0{,}2000)$
9	7	0,928	1,027	1,254	$B_{\mathrm{III}}(26{,}4103; 5{,}6444; 15{,}7438; 1{,}9953; 0{,}1850)$
9	8	0,943	1,046	1,285	$B_{\mathrm{III}}(27{,}0115; 5{,}3931; 16{,}5812; 1{,}9918; 0{,}1850)$
9	9	0,958	1,066	1,318	$B_{\mathrm{III}}(5{,}9761; 18{,}1201; 6{,}9936; 9{,}000; 0{,}2806)$
9	10	0,973	1,086	1,346	$B_{\mathrm{III}}(28{,}3999; 5{,}3460; 19{,}5082; 2{,}2090; 0{,}1850)$
10	1	0,858	0,935	1,094	$B_{\mathrm{III}}(6{,}3708; 8{,}3028; 2{,}6724; 1{,}6339; 0{,}2719)$
10	2	0,859	0,937	1,105	$B_{\mathrm{III}}(21{,}0180; 6{,}2702; 9{,}1530; 1{,}6325; 0{,}1800)$
10	3	0,871	0,952	1,128	$B_{\mathrm{III}}(20{,}8492; 6{,}2545; 9{,}3852; 1{,}6899; 0{,}1800)$
10	4	0,883	0,968	1,153	$B_{\mathrm{III}}(18{,}5209; 7{,}3068; 8{,}7206; 2{,}0024; 0{,}1800)$
10	5	0,896	0,985	1,179	$B_{\mathrm{III}}(20{,}1426; 6{,}8010; 10{,}0869; 2{,}0016; 0{,}1800)$
10	6	0,908	1,001	1,209	$B_{\mathrm{III}}(22{,}0824; 6{,}3600; 11{,}7113; 2{,}0008; 0{,}1800)$
10	7	0,921	1,018	1,239	$B_{\mathrm{III}}(25{,}7879; 5{,}8810; 14{,}6469; 1{,}9979; 0{,}1800)$
10	8	0,935	1,037	1,269	$B_{\mathrm{III}}(31{,}0404; 5{,}5468; 18{,}2144; 1{,}9946; 0{,}1750)$
10	9	0,949	1,055	1,301	$B_{\mathrm{III}}(31{,}0159; 5{,}7740; 19{,}6302; 2{,}2075; 0{,}1750)$
10	10	0,964	1,075	1,331	$B_{\mathrm{III}}(5{,}9754; 17{,}6996; 7{,}5357; 9{,}5000; 0{,}2806)$

Таблица 2. Процентные точки и распределения статистики Андерсона – Дарлинга при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0,9	0,95	0,99	
1	1	0,737	0,895	1,313	$B_{\text{III}}(6{,}1238; 3{,}1751; 14{,}0035; 2{,}400; 0{,}0698)$
1	2	0,843	1,059	1,735	$B_{\text{III}}(6{,}0219; 3{,}6293; 30{,}2458; 6{,}200; 0{,}0675)$
1	3	0,961	1,255	2,196	$B_{\text{III}}(6{,}5550; 3{,}0737; 46{,}299; 7{,}800; 0{,}0663)$
1	4	1,098	1,454	2,580	$B_{\text{III}}(6{,}8209; 2{,}6705; 51{,}187; 7{,}700; 0{,}0667)$
1	5	1,228	1,647	2,869	$B_{\text{III}}(6{,}6473; 2{,}4177; 51{,}272; 7{,}700; 0{,}0680)$
1	6	1,351	1,809	3,071	$B_{\text{III}}(6{,}3414; 2{,}2618; 48{,}992; 7{,}700; 0{,}0716)$
1	7	1,467	1,950	3,257	$B_{\text{III}}(5{,}9850; 2{,}2012; 44{,}595; 7{,}800; 0{,}0731)$
1	8	1,558	2,067	3,412	$B_{\text{III}}(5{,}2130; 2{,}2645; 33{,}943; 7{,}700; 0{,}0735)$
1	9	1,634	2,156	3,490	$B_{\text{III}}(5{,}3059; 2{,}2709; 32{,}7287; 7{,}800; 0{,}0714)$
1	10	1,698	2,224	3,572	$B_{\text{III}}(5{,}9944; 2{,}0162; 30{,}5401; 6{,}000; 0{,}0708)$
2	1	0,690	0,829	1,181	$B_{\text{III}}(6{,}0060; 3{,}5986; 12{,}5163; 2{,}400; 0{,}0675)$
2	2	0,754	0,925	1,428	$B_{\text{III}}(5{,}5094; 4{,}2127; 21{,}2179; 5{,}200; 0{,}0698)$
2	3	0,826	1,041	1,764	$B_{\text{III}}(6{,}4998; 3{,}7767; 45{,}2636; 8{,}6662; 0{,}0650)$
2	4	0,908	1,181	2,096	$B_{\text{III}}(6{,}8554; 3{,}2620; 53{,}0151; 8{,}6676; 0{,}0650)$
2	5	1,007	1,337	2,424	$B_{\text{III}}(7{,}4420; 2{,}8256; 66{,}5455; 9{,}0239; 0{,}0650)$
2	6	1,104	1,483	2,677	$B_{\text{III}}(7{,}4598; 2{,}6158; 68{,}3448; 9{,}0242; 0{,}0650)$
2	7	1,203	1,624	2,864	$B_{\text{III}}(7{,}4859; 2{,}4311; 69{,}9471; 9{,}0242; 0{,}0650)$
2	8	1,299	1,746	3,026	$B_{\text{III}}(6{,}9268; 2{,}4170; 69{,}9882; 10{,}3004; 0{,}0650)$
2	9	1,387	1,854	3,153	$B_{\text{III}}(6{,}9942; 2{,}3297; 69{,}5407; 10{,}2998; 0{,}0650)$
2	10	1,471	1,958	3,286	$B_{\text{III}}(6{,}0278; 2{,}3810; 54{,}3565; 10{,}2991; 0{,}0650)$
3	1	0,673	0,805	1,134	$B_{\text{III}}(5{,}8991; 3{,}7868; 11{,}8595; 2{,}400; 0{,}0672)$
3	2	0,718	0,873	1,311	$B_{\text{III}}(6{,}1369; 4{,}8632; 35{,}6146; 8{,}6670; 0{,}0650)$
3	3	0,771	0,955	1,561	$B_{\text{III}}(5{,}7293; 4{,}0413; 27{,}6069; 6{,}200; 0{,}0698)$
3	4	0,829	1,057	1,840	$B_{\text{III}}(6{,}4965; 3{,}7146; 46{,}0939; 8{,}6656; 0{,}0650)$
3	5	0,900	1,176	2,132	$B_{\text{III}}(7{,}4099; 3{,}1291; 61{,}1273; 8{,}6667; 0{,}0650)$
3	6	0,980	1,308	2,399	$B_{\text{III}}(7{,}9874; 2{,}7921; 74{,}4933; 9{,}0231; 0{,}0650)$
3	7	1,063	1,427	2,600	$B_{\text{III}}(8{,}0571; 2{,}7087; 72{,}5225; 9{,}0237; 0{,}0600)$
3	8	1,146	1,554	2,781	$B_{\text{III}}(8{,}5422; 2{,}4144; 63{,}7751; 7{,}0000; 0{,}0600)$
3	9	1,227	1,667	2,935	$B_{\text{III}}(8{,}7988; 2{,}2737; 68{,}9529; 7{,}2000; 0{,}0600)$
3	10	1,307	1,763	3,047	$B_{\text{III}}(8{,}8004; 2{,}1754; 68{,}9524; 7{,}2000; 0{,}0600)$
4	1	0,664	0,793	1,110	$B_{\text{III}}(5{,}8519; 3{,}8882; 11{,}5594; 2{,}400; 0{,}0671)$
4	2	0,698	0,845	1,238	$B_{\text{III}}(5{,}3538; 5{,}3288; 22{,}9349; 7{,}0000; 0{,}0675)$
4	3	0,740	0,910	1,436	$B_{\text{III}}(5{,}6387; 4{,}5708; 27{,}5081; 7{,}0000; 0{,}0675)$
4	4	0,787	0,986	1,686	$B_{\text{III}}(5{,}7589; 4{,}09340; 39{,}9826; 9{,}000; 0{,}0698)$

Таблица 2 (продолжение). Процентные точки и распределения статистики Андерсона – Дарлинга при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0,9	0,95	0,99	
4	5	0,842	1,084	1,934	$B_{\mathrm{III}}(6{,}5537; 3{,}4655; 46{,}4219; 8{,}0000; 0{,}0675)$
4	6	0,904	1,190	2,194	$B_{\mathrm{III}}(6{,}8253; 3{,}1718; 61{,}2636; 9{,}5000; 0{,}0675)$
4	7	0,974	1,307	2,419	$B_{\mathrm{III}}(7{,}4076; 2{,}8129; 69{,}3032; 9{,}0224; 0{,}0675)$
4	8	1,048	1,412	2,592	$B_{\mathrm{III}}(7{,}4062; 2{,}6410; 71{,}0431; 9{,}0231; 0{,}0675)$
4	9	1,123	1,524	2,760	$B_{\mathrm{III}}(7{,}4858; 2{,}4792; 73{,}6341; 9{,}0235; 0{,}0675)$
4	10	1,195	1,628	2,897	$B_{\mathrm{III}}(7{,}4411; 2{,}3667; 73{,}6365; 9{,}0239; 0{,}0675)$
5	1	0,659	0,786	1,096	$B_{\mathrm{III}}(5{,}8800; 3{,}9339; 11{,}5621; 2{,}400; 0{,}0671)$
5	2	0,687	0,827	0,827	$B_{\mathrm{III}}(5{,}3832; 5{,}5916; 27{,}7521; 8{,}6678; 0{,}0675)$
5	3	0,720	0,881	1,360	$B_{\mathrm{III}}(5{,}5318; 5{,}0043; 31{,}1395; 8{,}6673; 0{,}0675)$
5	4	0,760	0,944	1,571	$B_{\mathrm{III}}(5{,}8814; 4{,}3301; 37{,}6029; 8{,}6663; 0{,}0675)$
5	5	0,803	1,023	1,799	$B_{\mathrm{III}}(6{,}1596; 3{,}8709; 60{,}9340; 12{,}000; 0{,}0698)$
5	6	0,856	1,113	2,035	$B_{\mathrm{III}}(6{,}6082; 3{,}3950; 51{,}7023; 8{,}6650; 0{,}0675)$
5	7	0,917	1,220	2,268	$B_{\mathrm{III}}(7{,}2066; 2{,}9940; 65{,}5245; 9{,}0213; 0{,}0680)$
5	8	0,979	1,318	1,318	$B_{\mathrm{III}}(7{,}3289; 2{,}7883; 69{,}4323; 9{,}0220; 0{,}0680)$
5	9	1,044	1,414	2,602	$B_{\mathrm{III}}(7{,}4884; 2{,}6173; 73{,}2183; 9{,}0226; 0{,}0680)$
5	10	1,114	1,514	2,757	$B_{\mathrm{III}}(7{,}4934; 2{,}4672; 75{,}0000; 9{,}0231; 0{,}0680)$
6	1	0,655	0,781	1,085	$B_{\mathrm{III}}(5{,}7986; 3{,}9980; 11{,}2400; 2{,}400; 0{,}0671)$
6	2	0,679	0,815	1,174	$B_{\mathrm{III}}(5{,}2935; 5{,}8182; 26{,}4298; 8{,}6680; 0{,}0680)$
6	3	0,707	0,860	1,305	$B_{\mathrm{III}}(5{,}3441; 5{,}3154; 28{,}5532; 8{,}6676; 0{,}0680)$
6	4	0,740	0,915	1,489	$B_{\mathrm{III}}(5{,}7947; 4{,}5262; 35{,}9854; 8{,}6670; 0{,}0680)$
6	5	0,778	0,979	1,694	$B_{\mathrm{III}}(6{,}1074; 4{,}0045; 42{,}1634; 8{,}6662; 0{,}0680)$
6	6	0,822	1,0587	1,907	$B_{\mathrm{III}}(6{,}1637; 3{,}6120; 46{,}396; 8{,}6652; 0{,}0698)$
6	7	0,872	1,145	2,123	$B_{\mathrm{III}}(6{,}7575; 3{,}1650; 57{,}3316; 8{,}6649; 0{,}0700)$
6	8	0,929	1,246	2,340	$B_{\mathrm{III}}(7{,}1614; 2{,}8755; 68{,}2312; 9{,}0211; 0{,}0700)$
6	9	0,988	1,333	2,474	$B_{\mathrm{III}}(7{,}2146; 2{,}7131; 70{,}7516; 9{,}0217; 0{,}0700)$
6	10	1,049	1,422	2,628	$B_{\mathrm{III}}(7{,}2844; 2{,}5752; 72{,}9798; 9{,}0222; 0{,}0700)$
7	1	0,655	0,780	1,081	$B_{\mathrm{III}}(5{,}8421; 4{,}0362; 11{,}1704; 2{,}400; 0{,}0672)$
7	2	0,673	0,807	1,156	$B_{\mathrm{III}}(5{,}4561; 5{,}9720; 26{,}4093; 8{,}6680; 0{,}0650)$
7	3	0,697	0,846	1,270	$B_{\mathrm{III}}(5{,}5685; 5{,}4358; 29{,}1024; 8{,}6678; 0{,}0650)$
7	4	0,726	0,894	1,427	$B_{\mathrm{III}}(5{,}9802; 4{,}7226; 35{,}6184; 8{,}6673; 0{,}0650)$
7	5	0,759	0,948	1,617	$B_{\mathrm{III}}(6{,}3225; 4{,}1978; 41{,}7939; 8{,}6668; 0{,}0650)$
7	6	0,779	0,984	1,734	$B_{\mathrm{III}}(6{,}8608; 3{,}8616; 49{,}1300; 8{,}6666; 0{,}0640)$
7	7	0,841	1,096	2,018	$B_{\mathrm{III}}(6{,}1138; 3{,}6208; 63{,}498; 12{,}000; 0{,}0698)$
7	8	0,891	1,181	2,217	$B_{\mathrm{III}}(7{,}1968; 3{,}1822; 61{,}7629; 9{,}0202; 0{,}0650)$

Таблица 2 (окончание). Процентные точки и распределения статистики Андерсона – Дарлинга при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0,9	0,95	0,99	
7	9	0,943	1,272	2,388	$B_{\text{III}}(7{,}5770; 2{,}9005; 69{,}9780; 9{,}0208; 0{,}0650)$
7	10	1,001	1,357	2,515	$B_{\text{III}}(7{,}7412; 2{,}7373; 73{,}7918; 9{,}0214; 0{,}0650)$
8	1	0,660	0,785	1,081	$B_{\text{III}}(6{,}1227; 4{,}0360; 11{,}5336; 2{,}400; 0{,}0666)$
8	2	0,668	0,801	1,138	$B_{\text{III}}(5{,}5121; 5{,}8006; 27{,}9640; 8{,}6681; 0{,}0670)$
8	3	0,690	0,836	1,241	$B_{\text{III}}(5{,}4002; 5{,}5554; 27{,}9506; 8{,}6679; 0{,}0670)$
8	4	0,715	0,877	1,380	$B_{\text{III}}(5{,}6470; 4{,}9453; 32{,}4456; 8{,}6676; 0{,}0670)$
8	5	0,745	0,926	1,550	$B_{\text{III}}(5{,}9674; 4{,}4102; 37{,}9915; 8{,}6671; 0{,}0670)$
8	6	0,779	0,984	1,734	$B_{\text{III}}(6{,}4110; 3{,}8911; 45{,}8150; 8{,}6666; 0{,}0670)$
8	7	0,817	1,054	1,929	$B_{\text{III}}(7{,}0348; 3{,}4829; 55{,}3483; 8{,}6659; 0{,}0660)$
8	8	0,859	1,129	2,106	$B_{\text{III}}(6{,}4429; 3{,}4105; 71{,}057; 12{,}000; 0{,}0698)$
8	9	0,910	1,220	2,295	$B_{\text{III}}(7{,}8320; 2{,}8953; 75{,}0000; 9{,}0201; 0{,}0670)$
8	10	0,961	1,300	2,435	$B_{\text{III}}(7{,}6032; 2{,}8065; 72{,}8901; 9{,}0207; 0{,}0670)$
9	1	0,667	0,794	1,091	$B_{\text{III}}(6{,}0785; 4{,}0967; 11{,}0332; 2{,}400; 0{,}0672)$
9	2	0,664	0,796	1,126	$B_{\text{III}}(5{,}2061; 6{,}2168; 24{,}4769; 8{,}6680; 0{,}0670)$
9	3	0,684	0,827	1,210	$B_{\text{III}}(5{,}3219; 5{,}7271; 26{,}7940; 8{,}6680; 0{,}0670)$
9	4	0,707	0,865	1,345	$B_{\text{III}}(5{,}4618; 5{,}1961; 29{,}9012; 8{,}6677; 0{,}0670)$
9	5	0,734	0,910	1,496	$B_{\text{III}}(5{,}9892; 4{,}487; 37{,}8576; 8{,}6674; 0{,}0670)$
9	6	0,763	0,959	1,666	$B_{\text{III}}(6{,}2913; 4{,}0565; 43{,}4772; 8{,}6670; 0{,}0670)$
9	7	0,797	1,023	1,855	$B_{\text{III}}(6{,}4827; 3{,}7214; 48{,}0168; 8{,}6664; 0{,}0670)$
9	8	0,836	1,092	2,036	$B_{\text{III}}(6{,}7595; 3{,}4190; 53{,}6318; 8{,}6659; 0{,}0670)$
9	9	0,881	1,170	2,211	$B_{\text{III}}(6{,}3746; 3{,}3201; 74{,}534; 12{,}500; 0{,}0698)$
9	10	0,927	1,252	2,362	$B_{\text{III}}(7{,}7636; 2{,}8465; 75{,}0000; 9{,}0201; 0{,}0670)$
10	1	0,678	0,808	1,108	$B_{\text{III}}(5{,}8108; 4{,}1511; 10{,}1199; 2{,}400; 0{,}0676)$
10	2	0,662	0,792	1,119	$B_{\text{III}}(5{,}4827; 5{,}5338; 20{,}0888; 6{,}0043; 0{,}0671)$
10	3	0,679	0,820	1,192	$B_{\text{III}}(5{,}2739; 5{,}8610; 26{,}0201; 8{,}6680; 0{,}0670)$
10	4	0,700	0,854	1,312	$B_{\text{III}}(5{,}4167; 5{,}3561; 28{,}8890; 8{,}6678; 0{,}0670)$
10	5	0,724	0,895	1,455	$B_{\text{III}}(5{,}8460; 4{,}6549; 35{,}7438; 8{,}6676; 0{,}0670)$
10	6	0,751	0,939	1,616	$B_{\text{III}}(6{,}1462; 4{,}2118; 41{,}1210; 8{,}6672; 0{,}0670)$
10	7	0,782	0,997	1,785	$B_{\text{III}}(6{,}5669; 3{,}7838; 48{,}4614; 8{,}6668; 0{,}0670)$
10	8	0,818	1,059	1,959	$B_{\text{III}}(7{,}0172; 3{,}4172; 56{,}7255; 8{,}6663; 0{,}0670)$
10	9	0,855	1,128	2,120	$B_{\text{III}}(6{,}4784; 3{,}4405; 74{,}0853; 12{,}5000; 0{,}0692)$
10	10	0,902	1,210	2,295	$B_{\text{III}}(6{,}2788; 3{,}2908; 73{,}169; 12{,}500; 0{,}0698)$

Таблица 3. Процентные точки и распределения статистики Крамера – Мизеса – Смирнова при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0,9	0,95	0,99	
1	1	0,130	0,162	0,246	$B_{\text{III}}(4{,}7725; 2{,}8933; 15{,}4899; 0{,}500; 0{,}0086)$
1	2	0,150	0,194	0,321	$B_{\text{III}}(4{,}7817; 2{,}7916; 24{,}1428; 0{,}800; 0{,}0086)$
1	3	0,173	0,229	0,408	$B_{\text{III}}(5{,}0019; 2{,}4825; 33{,}657; 1{,}000; 0{,}0086)$
1	4	0,195	0,265	0,481	$B_{\text{III}}(4{,}8570; 2{,}3136; 39{,}4252; 1{,}200; 0{,}0087)$
1	5	0,218	0,298	0,537	$B_{\text{III}}(4{,}8192; 2{,}1138; 40{,}1445; 1{,}200; 0{,}0088)$
1	6	0,239	0,328	0,575	$B_{\text{III}}(4{,}7926; 1{,}9813; 40{,}1460; 1{,}200; 0{,}0089)$
1	7	0,260	0,355	0,613	$B_{\text{III}}(4{,}3522; 1{,}9184; 38{,}5472; 1{,}300; 0{,}0097)$
1	8	0,277	0,378	0,645	$B_{\text{III}}(4{,}1660; 1{,}9401; 36{,}7953; 1{,}400; 0{,}0097)$
1	9	0,290	0,395	0,663	$B_{\text{III}}(1{,}7177; 2{,}5911; 14{,}9047; 2{,}0049; 0{,}020)$
1	10	0,302	0,409	0,682	$B_{\text{III}}(1{,}7373; 2{,}6035; 14{,}6773; 2{,}0578; 0{,}020)$
2	1	0,119	0,146	0,216	$B_{\text{III}}(5{,}5933; 2{,}8761; 15{,}0784; 0{,}400; 0{,}0075)$
2	2	0,132	0,167	0,265	$B_{\text{III}}(4{,}7336; 2{,}9815; 17{,}9631; 0{,}600; 0{,}0086)$
2	3	0,146	0,189	0,323	$B_{\text{III}}(5{,}0307; 2{,}7954; 26{,}1410; 0{,}800; 0{,}0084)$
2	4	0,162	0,214	0,387	$B_{\text{III}}(5{,}2560; 2{,}5116; 32{,}9308; 0{,}900; 0{,}0084)$
2	5	0,178	0,242	0,446	$B_{\text{III}}(5{,}4485; 2{,}2935; 39{,}9250; 1{,}000; 0{,}0084)$
2	6	0,195	0,267	0,498	$B_{\text{III}}(5{,}3297; 2{,}1938; 42{,}6895; 1{,}100; 0{,}0084)$
2	7	0,212	0,292	0,534	$B_{\text{III}}(5{,}3797; 2{,}0580; 45{,}8508; 1{,}150; 0{,}0084)$
2	8	0,228	0,316	0,565	$B_{\text{III}}(5{,}4058; 1{,}9526; 46{,}3260; 1{,}150; 0{,}0084)$
2	9	0,244	0,336	0,590	$B_{\text{III}}(5{,}3765; 1{,}8676; 45{,}9372; 1{,}150; 0{,}0084)$
2	10	0,259	0,356	0,618	$B_{\text{III}}(5{,}3119; 1{,}8093; 45{,}0334; 1{,}160; 0{,}0084)$
3	1	0,114	0,140	0,204	$B_{\text{III}}(4{,}6237; 3{,}1152; 11{,}9551; 0{,}400; 0{,}0087)$
3	2	0,124	0,155	0,239	$B_{\text{III}}(4{,}5231; 3{,}3129; 15{,}9686; 0{,}600; 0{,}0087)$
3	3	0,135	0,172	0,284	$B_{\text{III}}(4{,}7701; 3{,}0644; 22{,}1622; 0{,}750; 0{,}0087)$
3	4	0,146	0,191	0,336	$B_{\text{III}}(4{,}9007; 2{,}7581; 26{,}0854; 0{,}8000; 0{,}0087)$
3	5	0,159	0,212	0,391	$B_{\text{III}}(5{,}1313; 2{,}4877; 31{,}2188; 0{,}8500; 0{,}0087)$
3	6	0,174	0,235	0,440	$B_{\text{III}}(5{,}1565; 2{,}4026; 40{,}7673; 1{,}1000; 0{,}0087)$
3	7	0,187	0,256	0,483	$B_{\text{III}}(5{,}2195; 2{,}2343; 42{,}6422; 1{,}1000; 0{,}0087)$
3	8	0,202	0,278	0,520	$B_{\text{III}}(5{,}2685; 2{,}1243; 47{,}574; 1{,}2000; 0{,}0087)$
3	9	0,216	0,299	0,548	$B_{\text{III}}(5{,}2645; 2{,}0191; 47{,}9732; 1{,}2000; 0{,}0087)$
3	10	0,229	0,318	0,570	$B_{\text{III}}(5{,}2768; 1{,}9423; 48{,}0147; 1{,}2000; 0{,}0087)$
4	1	0,112	0,137	0,198	$B_{\text{III}}(4{,}5782; 3{,}2113; 11{,}6509; 0{,}4000; 0{,}0087)$
4	2	0,120	0,148	0,224	$B_{\text{III}}(4{,}6470; 3{,}0937; 13{,}7864; 0{,}4645; 0{,}0087)$

Таблица 3 (продолжение). Процентные точки и распределения статистики Крамера – Мизеса – Смирнова при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0,9	0,95	0,99	
4	3	0,128	0,162	0,262	$B_{\text{III}}(4{,}7447; 3{,}0421; 18{,}1139; 0{,}6000; 0{,}0087)$
4	4	0,137	0,177	0,304	$B_{\text{III}}(4{,}6410; 3{,}2743; 29{,}7398; 1{,}100; 0{,}0087)$
4	5	0,148	0,194	0,354	$B_{\text{III}}(4{,}9182; 2{,}9156; 37{,}7830; 1{,}2000; 0{,}0087)$
4	6	0,159	0,213	0,402	$B_{\text{III}}(4{,}9451; 2{,}8167; 54{,}9745; 1{,}7197; 0{,}0087)$
4	7	0,172	0,234	0,442	$B_{\text{III}}(4{,}9463; 2{,}6275; 56{,}8175; 1{,}7197; 0{,}0087)$
4	8	0,184	0,253	0,479	$B_{\text{III}}(5{,}2218; 2{,}4515; 61{,}8564; 1{,}7198; 0{,}0083)$
4	9	0,197	0,272	0,512	$B_{\text{III}}(5{,}1854; 2{,}3115; 63{,}0610; 1{,}7198; 0{,}0085)$
4	10	0,210	0,291	0,542	$B_{\text{III}}(5{,}1470; 2{,}2041; 63{,}2902; 1{,}7198; 0{,}0085)$
5	1	0,111	0,135	0,194	$B_{\text{III}}(4{,}5239; 3{,}2857; 11{,}3509; 0{,}4000; 0{,}0087)$
5	2	0,117	0,144	0,216	$B_{\text{III}}(4{,}3756; 3{,}6726; 14{,}4290; 0{,}6000; 0{,}0087)$
5	3	0,124	0,156	0,247	$B_{\text{III}}(4{,}4097; 3{,}6237; 19{,}2576; 0{,}8000; 0{,}0087)$
5	4	0,132	0,168	0,283	$B_{\text{III}}(4{,}5663; 3{,}4838; 28{,}1077; 1{,}1000; 0{,}0087)$
5	5	0,140	0,183	0,325	$B_{\text{III}}(4{,}6087; 3{,}2941; 37{,}3032; 1{,}4000; 0{,}0087)$
5	6	0,150	0,199	0,369	$B_{\text{III}}(4{,}6721; 3{,}0859; 44{,}9449; 1{,}6000; 0{,}0087)$
5	7	0,161	0,217	0,415	$B_{\text{III}}(4{,}9820; 2{,}8196; 64{,}4405; 2{,}0000; 0{,}0086)$
5	8	0,172	0,235	0,448	$B_{\text{III}}(4{,}9695; 2{,}6609; 69{,}3170; 2{,}1000; 0{,}0086)$
5	9	0,183	0,252	0,483	$B_{\text{III}}(4{,}9353; 2{,}5489; 72{,}7848; 2{,}2000; 0{,}0086)$
5	10	0,195	0,270	0,511	$B_{\text{III}}(4{,}9489; 2{,}4090; 74{,}7198; 2{,}2000; 0{,}0086)$
6	1	0,110	0,133	0,192	$B_{\text{III}}(4{,}5010; 3{,}2285; 10{,}9781; 0{,}380; 0{,}0088)$
6	2	0,115	0,141	0,210	$B_{\text{III}}(4{,}5811; 3{,}3997; 13{,}7378; 0{,}5000; 0{,}0087)$
6	3	0,121	0,151	0,235	$B_{\text{III}}(4{,}5344; 3{,}3779; 16{,}0429; 0{,}6000; 0{,}0087)$
6	4	0,128	0,162	0,269	$B_{\text{III}}(4{,}7010; 3{,}1896; 20{,}2456; 0{,}7000; 0{,}0087)$
6	5	0,135	0,174	0,305	$B_{\text{III}}(4{,}7778; 3{,}1179; 26{,}6577; 0{,}9000; 0{,}0087)$
6	6	0,143	0,188	0,348	$B_{\text{III}}(4{,}6979; 3{,}2496; 45{,}496; 1{,}6546; 0{,}0087)$
6	7	0,152	0,205	0,389	$B_{\text{III}}(4{,}7377; 3{,}0239; 52{,}3921; 1{,}8000; 0{,}0087)$
6	8	0,163	0,221	0,426	$B_{\text{III}}(4{,}8088; 2{,}8386; 61{,}3983; 2{,}0000; 0{,}0087)$
6	9	0,173	0,237	0,453	$B_{\text{III}}(4{,}8848; 2{,}6529; 70{,}0431; 2{,}1500; 0{,}0087)$
6	10	0,183	0,253	0,487	$B_{\text{III}}(4{,}9708; 2{,}5260; 74{,}5301; 2{,}2000; 0{,}0087)$
7	1	0,110	0,133	0,191	$B_{\text{III}}(4{,}3709; 3{,}2673; 10{,}5551; 0{,}3800; 0{,}0090)$
7	2	0,114	0,140	0,207	$B_{\text{III}}(4{,}5828; 3{,}2976; 12{,}7789; 0{,}4500; 0{,}0087)$
7	3	0,119	0,148	0,227	$B_{\text{III}}(4{,}4677; 3{,}4969; 15{,}4121; 0{,}6000; 0{,}0087)$
7	4	0,125	0,158	0,258	$B_{\text{III}}(4{,}6214; 3{,}3308; 19{,}2746; 0{,}7000; 0{,}0087)$
7	5	0,131	0,168	0,289	$B_{\text{III}}(4{,}7195; 3{,}2125; 24{,}4491; 0{,}8500; 0{,}0087)$
7	6	0,138	0,181	0,327	$B_{\text{III}}(4{,}6567; 3{,}3731; 44{,}3195; 1{,}6546; 0{,}0087)$

Таблица 3 (окончание). Процентные точки и распределения статистики Крамера – Мизеса – Смирнова при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0,9	0,95	0,99	
7	7	0,146	0,194	0,364	$B_{\text{III}}(4{,}8434; 3{,}0794; 51{,}559; 1{,}7197; 0{,}0087)$
7	8	0,155	0,209	0,405	$B_{\text{III}}(4{,}7910; 2{,}9523; 57{,}1575; 1{,}9000; 0{,}0087)$
7	9	0,165	0,225	0,436	$B_{\text{III}}(4{,}8713; 2{,}7903; 72{,}7647; 2{,}3000; 0{,}0086)$
7	10	0,175	0,241	0,463	$B_{\text{III}}(4{,}2642; 2{,}6670; 74{,}6989; 2{,}6000; 0{,}01)$
8	1	0,110	0,134	0,191	$B_{\text{III}}(4{,}4757; 3{,}2680; 10{,}7031; 0{,}380; 0{,}0090)$
8	2	0,113	0,138	0,203	$B_{\text{III}}(4{,}5960; 3{,}1619; 11{,}8642; 0{,}4000; 0{,}0087)$
8	3	0,117	0,145	0,221	$B_{\text{III}}(4{,}4434; 3{,}5777; 15{,}1135; 0{,}6000; 0{,}0087)$
8	4	0,122	0,154	0,247	$B_{\text{III}}(4{,}4746; 3{,}6125; 19{,}9058; 0{,}8000; 0{,}0087)$
8	5	0,128	0,164	0,278	$B_{\text{III}}(4{,}5738; 3{,}4174; 23{,}8064; 0{,}9000; 0{,}0087)$
8	6	0,135	0,174	0,312	$B_{\text{III}}(4{,}7719; 3{,}2182; 31{,}9744; 1{,}1000; 0{,}0087)$
8	7	0,142	0,187	0,349	$B_{\text{III}}(4{,}7862; 3{,}1033; 40{,}0738; 1{,}3500; 0{,}0087)$
8	8	0,149	0,200	0,384	$B_{\text{III}}(4{,}9118; 2{,}9697; 53{,}987; 1{,}7197; 0{,}0087)$
8	9	0,159	0,215	0,420	$B_{\text{III}}(4{,}9553; 2{,}8177; 68{,}7411; 2{,}1000; 0{,}0087)$
8	10	0,167	0,230	0,447	$B_{\text{III}}(4{,}8712; 2{,}7161; 74{,}7643; 2{,}3000; 0{,}0087)$
9	1	0,111	0,135	0,192	$B_{\text{III}}(4{,}3128; 3{,}3456; 10{,}2390; 0{,}390; 0{,}0092)$
9	2	0,112	0,137	0,200	$B_{\text{III}}(4{,}6271; 3{,}1831; 11{,}9529; 0{,}4000; 0{,}0087)$
9	3	0,116	0,143	0,217	$B_{\text{III}}(4{,}3927; 3{,}6661; 14{,}6644; 0{,}6000; 0{,}0087)$
9	4	0,121	0,151	0,240	$B_{\text{III}}(4{,}3715; 3{,}7463; 18{,}8452; 0{,}8000; 0{,}0087)$
9	5	0,126	0,160	0,269	$B_{\text{III}}(4{,}5116; 3{,}6109; 25{,}0174; 1{,}0000; 0{,}0087)$
9	6	0,131	0,169	0,169	$B_{\text{III}}(4{,}6314; 3{,}4428; 31{,}9594; 1{,}2000; 0{,}0087)$
9	7	0,138	0,181	0,333	$B_{\text{III}}(4{,}7526; 3{,}2398; 40{,}0792; 1{,}4000; 0{,}0087)$
9	8	0,145	0,193	0,368	$B_{\text{III}}(4{,}9123; 3{,}0606; 49{,}4625; 1{,}6000; 0{,}0087)$
9	9	0,153	0,207	0,403	$B_{\text{III}}(5{,}1040; 2{,}8347; 58{,}579; 1{,}7197; 0{,}0086)$
9	10	0,161	0,221	0,432	$B_{\text{III}}(4{,}9243; 2{,}7838; 65{,}2796; 2{,}0000; 0{,}0087)$
10	1	0,112	0,137	0,195	$B_{\text{III}}(4{,}5358; 3{,}2996; 10{,}6858; 0{,}390; 0{,}0088)$
10	2	0,111	0,136	0,198	$B_{\text{III}}(4{,}6058; 3{,}2130; 11{,}8374; 0{,}4000; 0{,}0087)$
10	3	0,115	0,142	0,213	$B_{\text{III}}(4{,}4094; 3{,}7077; 14{,}6643; 0{,}6000; 0{,}0087)$
10	4	0,119	0,149	0,233	$B_{\text{III}}(4{,}2916; 3{,}9108; 17{,}7709; 0{,}8000; 0{,}0087)$
10	5	0,124	0,157	0,261	$B_{\text{III}}(4{,}4707; 3{,}7166; 24{,}2703; 1{,}0000; 0{,}0087)$
10	6	0,129	0,165	0,288	$B_{\text{III}}(4{,}5864; 3{,}5556; 30{,}9135; 1{,}2000; 0{,}0087)$
10	7	0,135	0,176	0,320	$B_{\text{III}}(4{,}6398; 3{,}3941; 37{,}6304; 1{,}4000; 0{,}0087)$
10	8	0,141	0,187	0,354	$B_{\text{III}}(4{,}8071; 3{,}1823; 48{,}6216; 1{,}6546; 0{,}0087)$
10	9	0,148	0,199	0,388	$B_{\text{III}}(4{,}8468; 3{,}0568; 60{,}6841; 2{,}0000; 0{,}0087)$
10	10	0,156	0,213	0,420	$B_{\text{III}}(5{,}0443; 2{,}7436; 59{,}626; 1{,}7197; 0{,}0088)$

4. Заключение

Обратное гауссовское распределение находит применение в задачах анализа надежности, долговечности и выживания. При определенных сочетаниях параметров функции распределения обратного гауссовского распределения оказываются достаточно близкими функциям распределения логарифмически нормального закона. В этом случае названные два закона трудно различать с использованием критериев согласия, особенно при ограниченных объемах выборок. В то же время функции плотности законов имеют заметное различие, а соответствующие функции интенсивности (отказов) в обоих случаях являются колоколообразными и отличаются очень сильно.

В табл. 4 приведены полученные оценки мощности рассмотренных в работе критериев и критерия χ^2 Пирсона при проверке сложной гипотезы о принадлежности выборки обратному гауссовскому распределению с параметрами $\theta_0 = 2$, $\theta_1 = 2$ (при оценке обоих параметров) против конкурирующей гипотезы о принадлежности ло-

Таблица 4. Мощность критериев согласия при проверке сложной гипотезы H_0 (обратное гауссовское распределение) против гипотезы H_1 (логарифмически нормальное) при заданной вероятности ошибки первого рода α

α	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 400$	$n = 500$	$n = 600$
Мощность критерия Ω^2 Андерсона – Дарлинга						
0,1	0,246	0,363	0,473	0,571	0,656	0,897
0,05	0,155	0,252	0,353	0,446	0,534	0,829
0,01	0,041	0,087	0,136	0,202	0,264	0,590
Мощность критерия ω^2 Крамера – Мизеса – Смирнова						
0,1	0,236	0,346	0,450	0,544	0,622	0,861
0,05	0,149	0,241	0,329	0,417	0,493	0,776
0,01	0,040	0,084	0,129	0,186	0,247	0,524
Мощность критерия Колмогорова						
0,1	0,211	0,299	0,388	0,466	0,542	0,787
0,05	0,129	0,202	0,276	0,346	0,612	0,678
0,01	0,034	0,069	0,102	0,145	0,187	0,420
Мощность критерия χ^2 Пирсона при интервалах Неймана – Пирсона ($k = 5$)						
0,1	0,234	0,322	0,429	0,517	0,598	0,848
0,05	0,137	0,200	0,297	0,379	0,449	0,761
0,01	0,030	0,056	0,080	0,134	0,188	0,499
Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 5$ и равновероятном группировании						
0,1	0,149	0,195	0,255	0,301	0,344	0,584
0,05	0,080	0,117	0,154	0,193	0,227	0,448
0,01	0,020	0,035	0,046	0,059	0,079	0,210
Мощность критерия χ^2 Пирсона при $k = 10$ и равновероятном группировании						
0,1	0,134	0,176	0,212	0,249	0,303	0,499
0,05	0,078	0,100	0,126	0,151	0,187	0,372
0,01	0,019	0,027	0,039	0,041	0,061	0,165

гарифмически нормальному закону с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{x\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-(lnx-\theta_1)^2/(2\theta_0^2)}$$

и параметрами $\theta_0 = 0{,}82538$, $\theta_1 = 0{,}33102$.

Как и следовало ожидать [15–17], среди непараметрических критериев наиболее предпочтительным по мощности оказался критерий Андерсона – Дарлинга.

Оценки мощности критерия χ^2 Пирсона приведены при равновероятном группировании с числом интервалов $k = 10$ и $k = 5$, а также при использовании так называемых интервалов Неймана – Пирсона [60], когда в качестве границ интервалов при вычислении статистики берутся точки пересечения плотностей конкурирующих законов (в данном случае четыре точки и пять интервалов). Следует отметить, что при проверке сложных гипотез целесообразней использовать модифицированные критерии типа χ^2, например критерий Рао – Робсон – Никулина [61–63], так как в такой ситуации они мощнее критерия χ^2 Пирсона [15, 17].

Таким образом, опираясь на компьютерные методы исследования статистических закономерностей, в основе которых лежат статистическое моделирование эмпирических распределений статистик и последующий анализ этих распределений, построены модели распределений статистик непараметрических критериев согласия Колмогорова, ω^2 Крамера – Мизеса – Смирнова и Ω^2 Андерсона – Дарлинга при проверке сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона. Полученные результаты обеспечивают корректное применение непараметрических критериев согласия при проверке соответствующих сложных гипотез.

На базе результатов, частью которых являются настоящие исследования и развиваемое программное обеспечение, разработан курс “Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей” [64, 65], читаемый студентам факультета прикладной математики Новосибирского государственного технического университета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* О распределениях статистик непараметрических критериев согласия при оценивании по выборкам параметров наблюдаемых законов // Заводская лаборатория. 1998. Т. 64. № 3. С. 61–72.
2. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* Методы менеджмента качества // Надежность и контроль качества. 1999. № 11. С. 34–43.
3. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез // Автометрия. 2001. № 2. С. 88–102.
4. *Р 50.1.037-2002* Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. II. Непараметрические критерии. М.: Изд-во стандартов, 2002.
5. *Лемешко Б.Ю., Маклаков А.А.* Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями экспоненциального семейства // Автометрия. 2004. № 3. С. 3–20.
6. *Denisov V.I., Eger K.-H., Lemeshko B.Yu., Tsoy E.B.* Design of experiments and statistical analysis for grouped observations. Monograph. Novosibirsk: NSTU Publishing house, 2004.
7. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I // Измерительная техника. 2009. № 6. С. 6–11.
8. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II // Измерительная техника. 2009. № 8. С. 17–26.

9. *Денисов В.И., Лемешко Б.Ю., Цой Е.Б.* Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов. В 2-х ч. // Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 1993.
10. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* О зависимости предельных распределений статистик χ^2 Пирсона и отношения правдоподобия от способа группирования данных // Заводская лаборатория. 1998. Т. 64. № 5. С. 56–63.
11. *Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В.* Максимизация мощности критериев типа χ^2 // Докл. Сиб. отд. Акад. наук высш. шк. 2000. № 2. С. 53–61.
12. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В.* О распределениях статистики и мощности критерия типа χ^2 Никулина // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. № 3. С. 52–58.
13. *Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В.* Об ошибках и неверных действиях, совершаемых при использовании критериев согласия типа χ^2 // Измерительная техника. 2002. № 6. С. 5–11.
14. *Р 50.1.033-2001* Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа хи-квадрат. М.: Изд-во стандартов, 2002.
15. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н.* Мощность критериев согласия при близких альтернативах // Измерительная техника. 2007. № 2. С. 22–27.
16. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н.* Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез // Сиб. журн. индустриальной математики. 2008. Т. 11. № 2(34). С. 96–111.
17. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н.* Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез // Сиб. журн. индустриальной математики. 2008. Т. 11. № 4(36). С. 78–93.
18. *Лемешко Б.Ю.* Об оценивании параметров распределений и проверке гипотез по цензурированным выборкам // Методы менеджмента качества. 2001. № 4. С. 32–38.
19. *Лемешко Б.Ю., Гильдебрант С.Я., Постовалов С.Н.* К оцениванию параметров надежности по цензурированным выборкам // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. № 1. С. 52–64.
20. *Лемешко Б.Ю., Помадин С.С.* Проверка гипотез о математических ожиданиях и дисперсиях в задачах метрологии и контроля качества при вероятностных законах, отличающихся от нормального // Метрология. 2004. № 3. С. 3–15.
21. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.* Об устойчивости и мощности критериев проверки однородности средних // Измерительная техника. 2008. № 9. С. 23–28.
22. *Лемешко С.Б.* Критерий независимости Аббе при нарушении предположений нормальности // Измерительная техника. 2006. № 10. С. 9–14.
23. *Лемешко Б.Ю., Миркин Е.П.* Критерии Бартлетта и Кокрена в измерительных задачах при вероятностных законах, отличающихся от нормального // Измерительная техника. 2004. № 10. С. 10–16.
24. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.* Расширение области применения критериев типа Граббса, используемых при отбраковке аномальных измерений // Измерительная техника. 2005. № 6. С. 13–19.
25. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.* О сходимости распределений статистик и мощности критериев однородности Смирнова и Лемана-Розенблатта // Измерительная техника. 2005. № 12. С. 9–14.
26. *Лемешко Б.Ю., Огурцов Д.В.* Статистическое моделирование как эффективный инструмент для исследования законов распределения функций случайных величин // Метрология. 2007. № 5. С. 3–13.
27. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.* Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона // Метрология. 2005. № 2. С. 3–24.
28. *Лемешко Б.Ю., Рогожников А.П.* Исследование особенностей и мощности некоторых критериев нормальности // Метрология. 2009. № 4. С. 3–24.
29. *Лемешко Б.Ю., Помадин С.С.* Корреляционный анализ наблюдений многомерных случайных величин при нарушении предположений о нормальности // Сиб. журн. индустриальной математики. 2002. Т. 5. № 3. С. 115–130.

30. *Kolmogoroff A.N.* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione // Giornale dell' Istituto Italiano degly Attuari. 1933. V. 4. № 1. P. 83–91.
31. *Большев Л.Н.* Асимптотические пирсоновские преобразования // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. 8. № 2. С. 129–155.
32. *Большев Л.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика / Избранные труды. Под ред. Ю.В. Прохорова. М.: Наука, 1987.
33. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.
34. *Anderson T.W., Darling D.A.* Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes // Ann. Math. Statist. 1952. V. 23. P. 193–212.
35. *Anderson T.W., Darling D.A.* A test of goodness of fit // J. Amer. Statist. Assoc. 1954. V. 29. P. 765–769.
36. *Kac M., Kiefer J., Wolfowitz J.* On Tests of Normality and Other Tests of Goodness of Fit Based on Distance Methods // Ann. Math. Stat. 1955. V. 26. P. 189–211.
37. *Darling D.A.* The Cramer-Smirnov test in the parametric case // Ann. Math. Statist. 1955. V. 26. P. 1–20.
38. *Darling D.A.* The Cramer-Smirnov test in the parametric case // Ann. Math. Statist. 1957. V. 28. P. 823–838.
39. *Lilliefors H.W.* On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown // J. Amer. Statist. Assoc. 1967. V. 62. P. 399–402.
40. *Lilliefors H.W.* On the Kolmogorov-Smirnov test for the exponential distribution with mean unknown // J. Amer. Statist. Assoc. 1969. V. 64. P. 387–389.
41. *Durbin J.* Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated // Ann. Statist. 1973. 1: 279–290.
42. *Durbin J.* Kolmogorov-Smirnov tests when parameters are estimated with applications to tests of exponentiality and tests of spacings // Biometrika. 1975. V. 62. P. 5–22.
43. *Durbin J.* Kolmogorov-Smirnov Test when Parameters are Estimated // Lect. Notes Math. 1976. V. 566. P. 33–44.
44. *Гихман И.И.* Некоторые замечания о состоятельности критерия А.Н. Колмогорова // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91 (4). С. 715–718.
45. *Gihman I.I.* On the empirical distribution function in the case of grouping data / Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability. 1961. V.1. Amer Math. Soc., Providence, RI. P. 77–81.
46. *Мартынов Г.В.* Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978.
47. *Dzhaparidze K.O., Nikulin M.S.* Probability distribution of the Kolmogorov and omega-square statistics for continuous distributions with shift and scale parameters // J. Soviet Math. 1982. V. 20. P. 2147–2163.
48. *Nikulin M.S.* Gihman and goodness-of-fit tests for grouped data. // Mathemat. Reports Acad. Sci. Royal Soc. of Canada. 1992. 14 (4): 151–156.
49. *Nikulin M.S.* A variant of the generalized omega-square statistic // J. Soviet Math. 1992. V. 61 (4). P. 1896–1900 (translation from Zapiski nauchnikh seminarov LOMI. 1989. 177. P. 108–113).
50. *Pearson E.S., Hartley H.O.* Biometrica Tables for Statistics. V. 2. Cambridge: University Press, 1972.
51. *Stephens M.A.* Use of Kolmogorov-Smirnov, Cramer von Mises and Related Statistics Without Extensive Table // J. R. Stat. Soc. 1970. V. 32. P. 115–122.
52. *Stephens M.A.* EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons // J. Amer. Statist. Assoc. 1974. V. 69. P. 730–737.
53. *Chandra M., Singpurwalla N.D., Stephens M.A.* Statistics for Test of Fit for the Extrem-Value and Weibull Distribution // J. Amer. Statist. Assoc. 1981. V. 76(375). P. 729–731.
54. *Тюрин Ю.Н.* О предельном распределении статистик Колмогорова-Смирнова для сложной гипотезы // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1984. Т. 48. № 6. С. 1314–1343.
55. *Тюрин Ю.Н., Саввушкина Н.Е.* Критерии согласия для распределения Вейбулла-Гнеденко // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1984. № 3. С. 109–112.

56. *Саввушкина Н.Е.* Критерий Колмогорова-Смирнова для логистического и гамма-распределения // Сб. тр. ВНИИ систем. исслед. 1990. № 8. С. 50–56.
57. *Bagdonavicius V., Clerjaud L., Nikulin M.S.* Accelerated Life Testing when the Hazard Rate Function Has Cup Shape / Mathematical Methods in Survival Analysis, Reliability and Quality of Life (eds. C.Huber, N.Limnios, M.Mesbah, M.Nikulin). ISTE&Wiley : London, 2008. P. 203–215.
58. *Lemeshko S.B., Nikulin M.S., Saaidia N.* Simulation of the statistics distributions and power of the goodness-of-fit tests in composite hypotheses testing rather Inverse Gaussian distribution // Proc. 6th St. Petersburg Workshop on Simulation. St. Petersburg. 2009. V. 1. P. 323–328.
59. *Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Chimitova E.V., Postovalov S.N.* Computer methods for investigating statistical regularities in problems of statistical data analysis and reliability // Proc. 6th Int. Conf. "Mathematical Methods in Reliability". Moscow. 2009. P. 418–422.
60. *Greenwood P.E., Nikulin M.S.* A Guide to Chi-Squared Testing. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1996.
61. *Никулин М.С.* О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. XVIII. № 3. С. 675–676.
62. *Никулин М.С.* Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. XVIII. № 3. С. 583–591.
63. *Rao K.C., Robson D.S.* A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family // Commun. Statist. 1974. V. 3. P. 1139–1153.
64. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей. Уч. пос. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004.
65. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н., Лемешко С.Б.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей: Методические указания к выполнению лабораторных работ. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Г. Воликом.

Поступила в редакцию 20.08.2010