

Исследование свойств оценок и статистик критериев согласия для цензурированных выборок методами компьютерного моделирования

Борис Ю. Лемешко, Екатерина В. Чимитова, Татьяна А. Плешкова
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
petty_tp@mail.ru

Аннотация – При исследовании величин типа «времени жизни» нередко возникает задача обработки цензурированных выборок. При проверке адекватности моделей по цензурированным данным можно использовать критерии типа Колмогорова, Андерсона-Дарлингга или Крамера-Мизеса-Смирнова. В данной работе исследуются распределения статистик и мощность критериев при проверке простых и сложных гипотез. Построены таблицы верхних процентных точек для предельных распределений статистик в случае цензурированных I и II типа выборок.

Ключевые слова – цензурирование I, II типа, непараметрические критерии согласия, гипотеза о согласии, мощность.

I. ВВЕДЕНИЕ

ПРАКТИЧЕСКИ в любой сфере научной деятельности, связанной с регистрацией наблюдений, возникает необходимость в статистической обработке полученных данных. Достоверность результатов статистического анализа в первую очередь зависит от степени адекватности выбранной модели анализируемым данным. Поэтому обязательным этапом является проверка гипотезы о согласии [3] имеющихся статистических данных с выбранным теоретическим распределением. При исследовании величин типа “времени жизни”, например в задачах теории надежности, в медицинских или биологических исследованиях, нередко возникает задача обработки цензурированных выборок. Интерес к таким задачам не снижается, так как появление цензурированных выборок оказывается естественным и обычно порождается спецификой проведения экспериментов и условиями регистрации наблюдений. При проверке адекватности моделей по цензурированным данным можно использовать критерии типа Колмогорова [1], Андерсона-Дарлингга [2] или Крамера-Мизеса-Смирнова [2].

Для проверки гипотезы о согласии необходимо выбрать критерий и вычислить значение статистики критерия как некоторой функции от выборки и закона распределения, с которым проверяется согласие. Для используемых на практике критериев должны быть известны предельные распределения соответствующих статистик при условии истинности нулевой гипотезы, либо таблицы верхних процентных точек распределения статистики.

При проверке гипотезы о согласии по полным данным [5] существуют проблемы, связанные с применением непараметрических критериев согласия в случае сложных гипотез. Эти проблемы возникают из-за того, что неизвестно предельное распределение статистик критериев при верной

нулевой гипотезе. В случае же цензурированных данных [6] такие проблемы возникают как для простых [7], так и для сложных гипотез, так как распределения статистик зависят от типа и степени цензурирования.

Таким образом, целью данной работы является исследование влияния степени цензурирования на распределения статистик непараметрических критериев, исследование области корректного применения критериев при проверке простых и сложных гипотез, построение таблиц верхних процентных точек для распределений статистик непараметрических критериев, а также сравнительный анализ мощности [4] непараметрических критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах с использованием методики компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей.

II. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПО ЦЕНЗУРИРОВАННЫМ ДАННЫМ

Введем основные обозначения.

Выборка называется *цензурированной справа и (или) слева типа I* в точке $x_{(r)}$ и (или) $x_{(l)}$ соответственно, если наблюдаются лишь те члены независимой выборки X_1, X_2, \dots, X_n , значения которых лежат левее $x_{(r)}$ и (или) правее $x_{(l)}$.

Выборка называется *цензурированной справа и (или) слева типа II*, если наблюдаются, соответственно, лишь $n - n_r$ наименьших и (или) $n - n_l$ наибольших членов вариационного ряда, построенного по выборке X_1, X_2, \dots, X_n , $n_r + n_l < n$.

В случае цензурирования I типа фиксируются вероятности попадания в интервалы цензурирования $(-\infty, x_{(l)})$ и $(x_{(r)}, +\infty)$, а n_l и n_r обозначают случайное число наблюдений, попавших в интервалы цензурирования. При II типе количество цензурированных наблюдений n_l и n_r известно, а граничные точки $x_{(l)}$ и $x_{(r)}$ случайны. В таком случае в качестве $x_{(l)}$ обычно выбирают наименьшее наблюдаемое значение, а в качестве $x_{(r)}$ – наибольшее.

Степенью цензурирования a будем называть вероятность попадания в интервал цензурирования в случае цензурирования I типа, или отношение количества цензурированных наблюдений к полному объему выборки в случае цензурирования II типа.

Чаще всего на практике приходится иметь дело с проверкой сложных гипотез, когда в качестве параметров исследуемого распределения берут оценки параметров, полученные по тем же самым данным. Наиболее эффективным и универсальным по отношению к форме представления выборочных данных является метод максимального правдоподобия. Оценкой максимального правдоподобия неизвестного параметра по цензурированной слева и справа выборке является решение системы уравнений правдоподобия

$$n_r \frac{\partial \ln P_1(\theta)}{\partial \theta_l} + \sum_{j=1}^{n-(n_l+n_r)} \frac{\partial \ln f(x_j, \theta)}{\partial \theta_l} + n_l \frac{\partial \ln P_3(\theta)}{\partial \theta_l} = 0, \quad l = \overline{1, m}$$

где $P_1(\theta) = \int_{-\infty}^{x(r)} f(x, \theta) dx$, $P_3(\theta) = \int_{x(l)}^{\infty} f(x, \theta) dx$. В случае

цензурирования только справа (только слева) в выражении исчезает первое (третье) слагаемое.

III. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О СОГЛАСИИ ПО ЦЕНЗУРИРОВАННЫМ ДАННЫМ

Критерий типа Колмогорова. На практике статистику Колмогорова вычисляют следующим образом:

$$S_K^c = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}},$$

где $D_n = \max\{D_n^+, D_n^-\}$ и $D_n^+ = \max_{n_l < i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i) \right\}$,

$D_n^- = \max_{n_l < i \leq n} \left\{ F(x_i) - \frac{i-1}{n} \right\}$ – в случае цензурирования слева,

$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n-n_r} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i) \right\}$, $D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n-n_r} \left\{ F(x_i) - \frac{i-1}{n} \right\}$ – в

случае цензурирования справа, где n_l и n_r – количество наблюдений, попавших в левый или правый интервал цензурирования, соответственно.

Предельное соотношение имеет вид:

$$P \left\{ S_K^c < S \right\} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} T(S) \cdot P \left\{ \left| X - 2iS \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right| < \frac{S}{\sqrt{a-a^2}} \right\} = K_a^c(S),$$

где $T(S) = (-1)^i \exp(-2i^2 S^2)$, X – случайная величина, подчиненная стандартному нормальному закону. При $a = 0$ предельное распределение статистики S_K^c совпадает с классическим распределением Колмогорова (для случая полной выборки):

$$K(S) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i \exp(-2i^2 S^2).$$

Критерии типа Крамера-Мизеса-Смирнова. Статистика Крамера-Мизеса-Смирнова для I и II типов цензурированных выборок выглядит следующим образом:

- при цензурировании справа:

$$S_\omega = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n-n_r} \left[F(x_i) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2$$

- при цензурировании слева:

$$S_\omega = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=n_l}^n \left[F(x_i) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2$$

где n_l и n_r – количество наблюдений, попавших в левый или правый интервал цензурирования соответственно.

Критерии типа Андерсона-Дарлинга. Статистика Андерсона-Дарлинга для I и II типов цензурированных выборок выглядит следующим образом:

- при цензурировании справа:

$$\Omega_n^2 = \sum_{i=0}^{n-n_r-1} \left[F(x_i) - F(x_{i+1}) + \left(\frac{n-i-1}{n} \right)^2 \ln \left(\frac{1-F(x_i)}{1-F(x_{i+1})} \right) + \left(\frac{i+1}{n} \right) \ln \left(\frac{F(x_{i+1})}{F(x_i)} \right) \right] - \ln(1-F(x_0) - F(x_0))$$

- при цензурировании слева:

$$\Omega_n^2 = \sum_{i=n_l}^{n-1} \left[F(x_i) - F(x_{i+1}) + \left(\frac{n-i-1}{n} \right)^2 \ln \left(\frac{1-F(x_i)}{1-F(x_{i+1})} \right) + \left(\frac{i+1}{n} \right)^2 \ln \left(\frac{F(x_{i+1})}{F(x_i)} \right) \right] - 1 - \ln(F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}))$$

Для критериев Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга не существует аналитических предельных соотношений для распределений статистик по цензурированным данным.

IV. ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК КРИТЕРИЕВ ПРИ ПРОВЕРКЕ ПРОСТЫХ ГИПОТЕЗ

Исследования проводились с использованием методики компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей. Данная методика позволяет быстро и не менее точно, чем с использованием строгого математического аппарата, находить статистические закономерности.

Для корректного применения предельного соотношения при использовании критерия типа Колмогорова необходимо знать, при каких объемах выборок эмпирическое распределение статистики Колмогорова начинает хорошо сходиться к соответствующему предельному закону в случае цензурированных данных.

На Рис.1 представлены распределения статистики Колмогорова по цензурированным выборкам при проверке простой гипотезы о согласии с законом Вейбулла. Здесь же приведены соответствующие предельные распределения статистики. Показано, что уже при потенциальном объеме выборки $n = 30$ в случае степени цензурирования $a \leq 0.5$ эмпирические распределения статистики Колмогорова хорошо согласуются с соответствующими предельными распределениями. При больших степенях цензурирования требуются большие объемы выборок для достижения согласия эмпирических и предельных распределений Колмогорова.

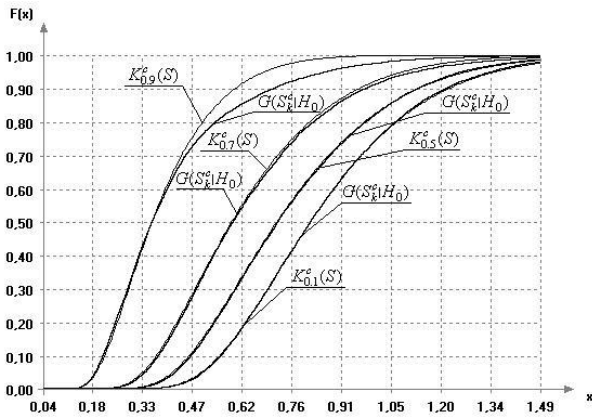


Рис. 1. Распределения статистики S_K^c при различной степени цензурирования и $n = 50$, цензурирование слева II типа

В результате исследования распределений статистики Колмогорова найдены минимальные объемы выборок, при которых достигается хорошее согласие распределения статистики с соответствующим предельным законом для различных значений a степени цензурирования, которые представлены в Табл. I.

ТАБЛИЦА I
ОБЪЕМЫ ВЫБОРОК

Цензурирование	Слева I тип	Слева II тип	Справа I тип	Справа II тип
$a = 0.1$	20	20	20	20
$a = 0.2$	20	20	20	20
$a = 0.3$	20	20	20	30
$a = 0.4$	20	30	30	30
$a = 0.5$	30	30	30	30
$a = 0.6$	30	30	40	40
$a = 0.7$	40	40	40	50
$a = 0.8$	50	60	60	70
$a = 0.9$	100	250	110	140

Верхние процентные точки предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке простых гипотез

В случае проверки простой гипотезы распределения статистик непараметрических критериев согласия не зависят от законов распределений.

Гипотеза о согласии отвергается, если достигнутый уровень значимости меньше заданного или полученное по выборке значение статистики меньше критического значения, найденное по таблицам верхних процентных точек.

Методами компьютерного моделирования были построены таблицы верхних процентных точек предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлингга, которые строились по смоделированным выборкам статистик объемом $N = 10^6$. Значения статистик критериев вычислялись по выборкам псевдослучайных величин объемом $n = 10^3$. В качестве примера представим значения верхних процентных точек для предельного распределения статистики критерия Колмогорова при проверке простых гипотез в Табл. II.

ТАБЛИЦА II
ВЕРХНИЕ ПРОЦЕНТНЫЕ ТОЧКИ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИКИ КОЛМОГОРОВА ПРИ ПРОВЕРКЕ ПРОСТОЙ ГИПОТЕЗЫ

	Уровень значимости		
	0.01	0.05	0.1
$a = 0$	1.628	1.358	1.224
$a = 0.1$	1.628	1.358	1.224
$a = 0.2$	1.621	1.347	1.209
$a = 0.3$	1.621	1.347	1.209
$a = 0.4$	1.6	1.321	1.181
$a = 0.5$	1.551	1.273	1.133
$a = 0.6$	1.467	1.198	1.062
$a = 0.7$	1.342	1.087	0.96
$a = 0.8$	1.151	0.927	0.815
$a = 0.9$	0.851	0.682	0.599

В случае проверки простой гипотезы значения процентных точек не зависят от вида цензурирования, однако зависят от степени цензурирования. При увеличении a степени цензурирования значения процентных точек уменьшаются.

V. ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК КРИТЕРИЕВ ПРИ ПРОВЕРКЕ СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗ О СОГЛАСИИ

Чаще всего на практике приходится иметь дело с проверкой сложных гипотез, когда в качестве параметров исследуемого распределения берут оценки параметров, полученные по тем же самым данным. В случае проверки сложных гипотез распределения статистик зависят от вида проверяемых гипотез, от числа оцениваемых параметров, от вида параметров, а также от степени и структуры цензурирования. Оценки максимального правдоподобия по цензурированным данным являются асимптотически эффективными и несмещенными. Однако при ограниченных объемах выборок и больших степенях цензурирования, как показано в [6], ОМП оказываются смещенными.

Верхние процентные точки предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез

Методами компьютерного моделирования были построены таблицы верхних процентных точек предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлингга в случае проверки сложной гипотезы о согласии с законом Вейбулла и с логарифмически нормальным законом, которые строились по смоделированным выборкам статистик объемом $N = 10^5$. Значения статистик критериев вычислялись по выборкам псевдослучайных величин объемом $n = 10^3$. В полученных таблицах наибольшая рассматриваемая степень цензурирования 60%. Оценку достигнутого уровня значимости или критического значения статистики при больших степенях цензурирования можно получить методами статистического моделирования с использованием соответствующего программного обеспечения.

ТАБЛИЦА III
ВЕРХНИЕ ПРОЦЕНТНЫЕ ТОЧКИ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИКИ КОЛМОГОРОВА ПРИ ПРОВЕРКЕ
СЛОЖНОЙ ГИПОТЕЗЫ О СОГЛАСИИ С ЗАКОНОМ ВЕЙБУЛЛА

	Цензурирование I типа					
	Справа			Слева		
	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
0	1.039	0.895	0.825	1.039	0.895	0.825
0.1	1.022	0.875	0.805	1.214	1.062	0.984
0.2	0.993	0.849	0.78	1.473	1.327	1.254
0.3	0.953	0.815	0.747	1.711	1.574	1.505
0.4	0.904	0.771	0.706	1.9	1.765	1.697
0.5	0.845	0.717	0.657	2.026	1.89	1.817
0.6	0.773	0.654	0.597	2.102	1.961	1.866
	Цензурирование II типа					
	Справа			Слева		
	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
0	1.039	0.895	0.825	1.039	0.895	0.825
0.1	1.023	0.874	0.805	1.207	1.058	0.983
0.2	0.993	0.849	0.78	1.474	1.333	1.261
0.3	0.953	0.815	0.747	1.736	1.593	1.522
0.4	0.903	0.771	0.706	1.926	1.785	1.712
0.5	0.843	0.718	0.656	2.041	1.898	1.823
0.6	0.769	0.654	0.597	2.11	1.963	1.887

ТАБЛИЦА IV
ВЕРХНИЕ ПРОЦЕНТНЫЕ ТОЧКИ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИКИ КОЛМОГОРОВА ПРИ ПРОВЕРКЕ
СЛОЖНОЙ ГИПОТЕЗЫ О СОГЛАСИИ С ЛОГАРИФИЧЕСКИ
НОРМАЛЬНЫМ ЗАКОНОМ

	Цензурирование I типа					
	Справа			Слева		
	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
0	1.601	1.331	1.192	1.601	1.331	1.192
0.1	1.594	1.323	1.183	1.625	1.359	1.223
0.2	1.593	1.318	1.177	1.599	1.33	1.194
0.3	1.588	1.309	1.166	1.61	1.337	1.194
0.4	1.571	1.286	1.141	1.756	1.492	1.362
0.5	1.512	1.23	1.086	2.129	1.906	1.788
0.6	1.393	1.122	0.99	2.864	2.494	2.462
	Цензурирование II типа					
	Справа			Слева		
	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
0	1.601	1.331	1.192	1.601	1.331	1.192
0.1	1.594	1.322	1.183	1.632	1.37	1.239
0.2	1.59	1.318	1.176	1.601	1.331	1.192
0.3	1.585	1.307	1.165	1.611	1.339	1.194
0.4	1.567	1.284	1.14	1.81	1.539	1.403
0.5	1.511	1.229	1.087	2.266	2.003	1.864
0.6	1.397	1.125	0.99	2.925	2.67	2.534

Из Табл. III и IV видно, что характер изменения значений процентных точек зависит от вида цензурирования: при цензурировании слева значения возрастают, при цензурировании справа – убывают. Это связано со смещением функции распределения статистик. С увеличением степени цензурирования оценки параметров становятся более смещенными.

На Рис. 2 и 3 представлены эмпирические функции распределения статистики Колмогорова при проверке

сложной гипотезы о согласии с законом Вейбулла при цензурировании II типа справа и слева соответственно. Из Рис. 2 и 3 видно, что при увеличении степени цензурирования функции распределений по цензурированным справа данным смещаются влево, по цензурированным слева данным – вправо.

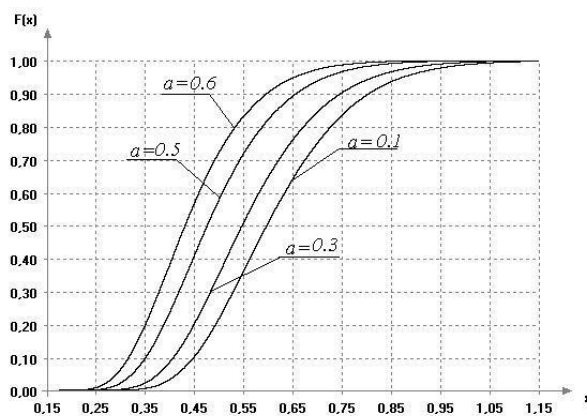


Рис. 2. Функции распределения статистики Колмогорова при цензурировании справа, II тип

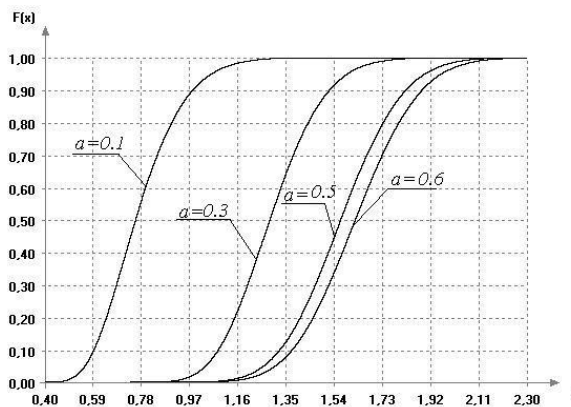


Рис. 3. Функции распределения статистики Колмогорова при цензурировании слева, II тип

VI. ИССЛЕДОВАНИЕ МОЩНОСТИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

В данной работе исследовалась мощность критериев согласия при различных парах близких альтернативных гипотез в зависимости от степени цензурирования. При различных степенях цензурирования мощность критериев согласия существенно зависит от вида проверяемых гипотез H_0 и H_1 при проверке простых и сложных гипотез.

Мощность критериев при проверке простых гипотез

При проверке простой гипотезы в качестве примера рассмотрим три пары конкурирующих гипотез:

- $H_0 : F(x) = Weibull(2, 2, 0), H_1 : F(x) = \Gamma(3.1215, 0.56, 0)$
- $H_0 : F(x) = N(0, 2), H_1 : F(x) = Log(0, 1.1261)$
- $H_0 : F(x) = N(0, 2), H_1 : F(x) = N(0.15, 2)$

На Рис. 4 – 6 показаны функции распределения, соответствующие проверяемым гипотезам.

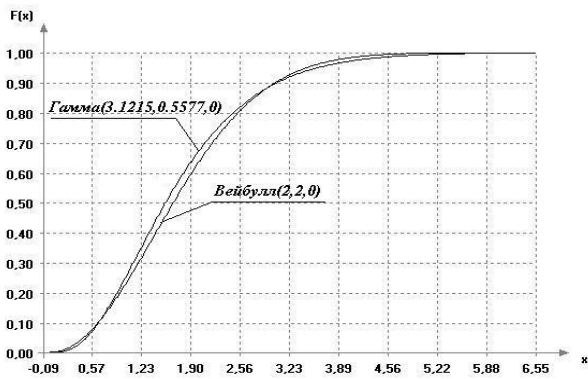


Рис. 4. Функции распределений соответствующих гипотезам $H_0: W(2,2,0)$
 $H_1: \Gamma(3.1215, 0.5577, 0)$

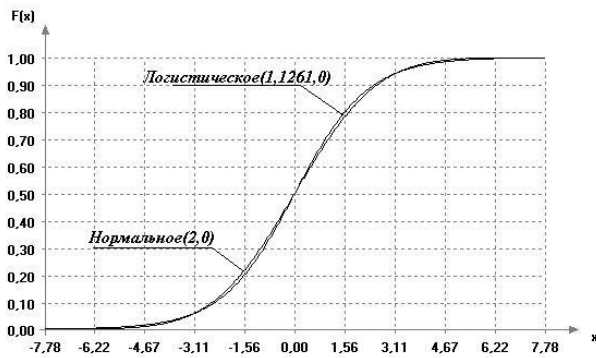


Рис. 5. Функции распределений соответствующих гипотезам $H_0: N(2,0)$
 $H_1: \text{Log}(1,1261,0)$

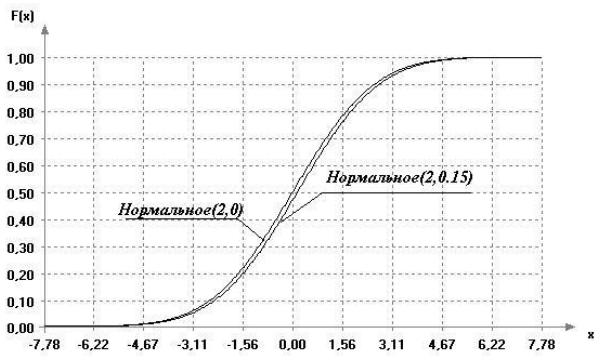


Рис. 6. Функции распределений соответствующих гипотезам $H_0: N(2,0)$
 $H_1: N(2,0.15)$

На Рис. 7-9 представлены оценки мощности критериев Колмогорова, Андерсона-Дарлинга, Крамера-Мизеса-Смирнова, полученные при $n = 300$ и уровне значимости $\alpha = 0.1$, по цензурированным справа выборкам II типа для каждой пары альтернативных гипотез, соответственно. Мощность критериев зависит от степени цензурирования, причем зависимость не является монотонной, и характер изменения мощности существенно зависит от вида проверяемых гипотез.

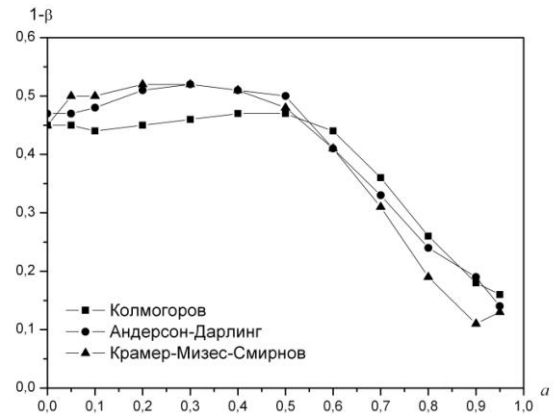


Рис. 7. Оценка мощности критериев в случае первой пары конкурирующих гипотез

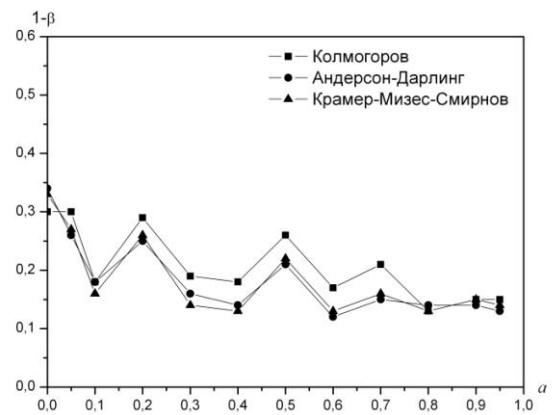


Рис. 8. Оценка мощности критериев в случае второй пары конкурирующих гипотез

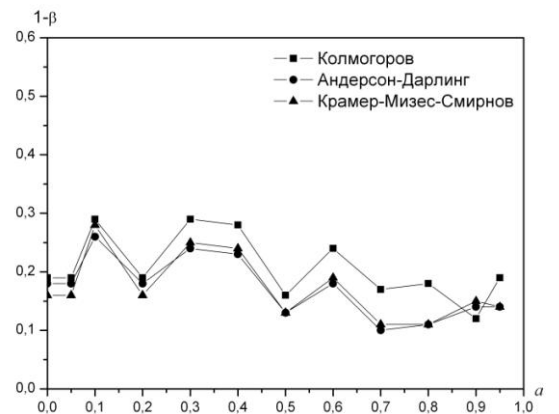


Рис. 9. Оценка мощности критериев в случае третьей пары конкурирующих гипотез

Из Рис. 7 – 9 видно, что значения оценок мощности критериев Колмогорова, Андерсона-Дарлинга и Крамера-Мизеса-Смирнова. При больших степенях цензурирования наиболее мощным является критерий Колмогорова, в то время как в случае полных выборок наиболее мощным чаще всего оказывается критерий Андерсона-Дарлинга.

Характер изменения мощности при разных степенях цензурирования оказывается аналогичным в случае цензурирования слева и цензурирования I типа.

Мощность критериев при проверке сложных гипотез

При проверке сложной гипотезы в качестве примера рассмотрим две пары альтернативных гипотез:

1. $H_0 : F(x) = \text{Webull} - \text{распределение}$,

$H_1 : F(x) = \Gamma - \text{распределение}$

2. $H_0 : F(x) = N - \text{распределение}$,

$H_1 : F(x) = \text{Log} - \text{распределение}$.

На Рис. 10 и 11 представлены оценки мощности критериев Колмогорова, Андерсона-Дарлинга, Крамера-Мизеса-Смирнова, полученные при $n=300$ и уровне значимости $\alpha=0.1$, по цензурированным справа выборкам II типа для каждой пары альтернативных гипотез, соответственно. Как и в случае проверки простых гипотез, характер изменения мощности зависит от вида проверяемых гипотез.

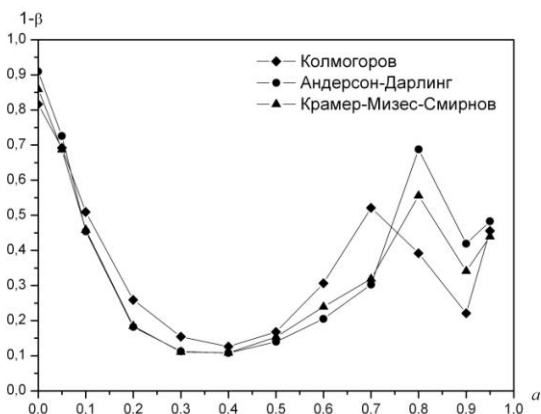


Рис. 10. Оценка мощности критериев в случае первой пары конкурирующих гипотез

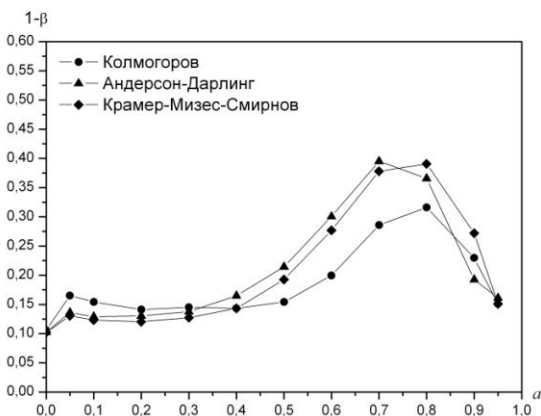


Рис. 11. Оценка мощности критериев в случае второй пары конкурирующих гипотез

Из Рис. 10 и 11 видно, что при $\alpha=0.7-0.8$ значения оценок мощности оказываются высокими. Это связано со смещением оценок параметров и с большой потерей информации.

В случае проверки сложных гипотез предпочтительность какого-либо критерия неочевидна, так как, обладая большей мощностью при одних степенях цензурирования, критерий может проигрывать при других.

VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наиболее весомые результаты, полученные в классической математической статистике, имеют асимптотический характер. Однако на практике всегда имеют дело с ограниченными объемами наблюдений. Как показали результаты исследований, распределения статистики типа Колмогорова при проверке простых гипотез быстро сходятся к соответствующему предельному закону. Для различной величины степени цензурирования найдены объемы выборок, при которых обеспечивается корректное применение предельного распределения статистики критерия типа Колмогорова.

Методами компьютерного моделирования проведено исследование распределений статистик типа Колмогорова, Андерсона-Дарлинга, Крамера-Мизеса-Смирнова при проверке простых и сложных гипотез. Построены таблицы верхних процентных точек для предельных распределений статистик рассматриваемых непараметрических критериев согласия при проверке простых гипотез и сложной гипотезы о согласии с законом Вейбулла и логарифмически нормальным законом.

Показано, что при различных степенях цензурирования мощность критериев согласия существенно зависит от вида проверяемых гипотез, при этом характер изменения мощности при разных степенях цензурирования не зависит от вида и типа цензурирования.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 год»

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Barr D.M., Davidson T. A Kolmogorov-Smirnov test for censored samples. *Technometrics*, 1973. V. 15. N. 4.
- [2] Koziol J.A., Green S.B. A Cramer-von Mises statistic for randomly censored data. *Biometrika*, 1976 V.63 N 3. – p 465-474.
- [3] Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия. Под ред. Прохорова Ю.В. – М., Большая Российская энциклопедия, 1999. – 910 с.
- [4] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. Учебное пособие для ВУЗов.– М.: Высшая школа, 1984.– 248 с.
- [5] Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Часть 1// Измерительная техника 2009 №6. – С.6-11.
- [6] Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В. К оцениванию параметров законов распределений и проверке гипотез по цензурированным выборкам // Труды V международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения” АПЭП-2000. Т.7, Новосибирск, 2000. С.188-191.
- [7] Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В. К проверке простых гипотез о согласии по дискретным, группированным или цензурированным данным с использованием непараметрических критериев // Материалы конференции ASMDA, Греция, Крит, 2007.

Лемешко Борис Юрьевич		профессор кафедры прикладной математики НГТУ, доктор технических наук, профессор
Чимитова Екатерина Владимировна		получила степень кандидата технических наук в 2003 году, доцент кафедры прикладной математики НГТУ
Плешкова Татьяна Александровна		получила степень бакалавра прикладной математики и информатики в 2009 году, магистрант первого года