

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.Ю. ЛЕМЕШКО

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ
ОТКЛОНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ОТ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА

Руководство по применению

НОВОСИБИРСК
2014

Данное руководство предназначено для использования в качестве одного из учебных пособий для магистрантов факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета, осваивающих курс **“Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей”**, которое должно способствовать критическому восприятию возможностей множества классических критериев при проверке гипотез о принадлежности выборок нормальному закону, пониманию возможностей методов статистического моделирования при исследовании вероятностных и статистических закономерностей.

Руководство рассчитано на специалистов, сталкивающихся в своей деятельности в той или иной степени с вопросами статистического анализа данных, обработкой результатов экспериментов, применением статистических методов для анализа различных аспектов и тенденций окружающей действительности.

В руководстве рассматриваются вопросы применения статистических критериев, ориентированных на проверку гипотезы о принадлежности анализируемых данных нормальному закону распределения вероятностей. Рассматриваются и сравниваются специальные критерии, непараметрические критерии согласия и критерии типа χ^2 . Указываются недостатки и преимущества различных критериев.

Приводятся таблицы, содержащие процентные точки и модели распределений статистик, необходимые для корректного применения критериев.

Следование рекомендациям обеспечит корректность и повысит обоснованность статистических выводов при анализе данных.

Руководство может оказаться полезным инженерам, научным сотрудникам, специалистам различного профиля (медикам, биологам, социологам, экономистам, и др.), сталкивающимся в своей деятельности с необходимостью статистического анализа результатов экспериментов. Руководство будет полезно преподавателям вузов, аспирантам и студентам.

Оглавление

Предисловие	5
Введение	7
1. Общие положения	11
1.1. Общие сведения о проверке статистических гипотез	11
1.2. Конкурирующие гипотезы	18
2. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона	21
2.1. Критерий проверки на симметричность	21
2.2. Критерий проверки на эксцесс	23
2.3. Критерий Шапиро–Уилка	26
2.4. Критерий Эппса–Палли	31
2.5. Модифицированный критерий Шапиро–Уилка	36
2.6. Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса	39
2.7. Модификация D' Агостино критерия проверки на симметричность	41
2.8. Модификация D' Агостино критерия проверки на симметричность и значение эксцесса	43
2.9. Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса D' Агостино	47
2.10. Критерий Фросини	51
2.11. Критерии Хегази–Грина	55
2.12. Критерий Гири	60
2.13. Критерий Дэвида–Хартли–Пирсона	65
2.14. Критерий Шпигельхальтера	69
2.15. Критерий Ройстона	74
2.16. Рекомендации по применению	79
3. Непараметрические критерии согласия при проверке нормальности	88
3.1. Критерий Колмогорова	88
3.2. Критерий Купера	92
3.3. Критерий Крамера–Мизеса–Смирнова	95
3.4. Критерий Ватсона	98

3.5. Критерий Андерсона–Дарлинга	101
3.6. Критерии Жанга	104
3.7. О применении непараметрических критериев согласия	113
4. Критерии согласия типа хи-квадрат при проверке нормальности .	116
4.1. Критерий согласия χ^2 Пирсона	116
4.2. Критерий согласия Никулина–Рао–Робсона	127
4.3. О применении критериев согласия типа χ^2	133
5. Анализ погрешностей измерений в классических экспериментах.	136
5.1. О роли проверки нормальности.....	136
5.2. Анализируемые эксперименты	138
5.3. Рассматриваемые критерии нормальности.....	140
5.4. Проверка гипотезы о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону	143
5.5. О вычислении достигнутых уровней значимости	146
5.6. Конкурирующие законы, пригодные для описания результатов анализируемых экспериментов	148
5.7. Сравнительный анализ мощности критериев.....	153
5.8. Выводы по результатам анализа.....	161
6. Развитие технологий проверки статистических гипотез.....	165
6.1. Изменение роли компьютерных технологий при статистическом анализе данных	165
6.1. Интерактивный подход к вычислению p-value	166
7. Заключение	170
Библиографический список	171
Приложение А. Таблицы для критериев проверки нормальности	178

Предисловие

Нормальный закон распределения вероятностей занимает особое место в прикладной математической статистике.

С одной стороны, применение нормального распределения в приложениях обосновывает ряд центральных предельных теорем, суть которых заключается в том, что сумма большого количества независимых (слабо зависимых) случайных величин с конечными математическими ожиданиями и (примерно одинаковыми) дисперсиями имеет распределение близкое к нормальному. Так как многие случайные величины, встречающиеся в приложениях, формируются под влиянием множества слабо зависимых случайных факторов, их распределения могут считаться (оказаться) приближенно нормальными. Как правило, ошибки измерений, характеризующие “отлаженную” измерительную систему, могут хорошо описываться нормальным законом. Отклонения контролируемого показателя от номинального значения для некоторого отлаженного технологического процесса также могут приближенно описываться нормальным законом распределения.

С другой стороны, предпосылкой, обуславливающей возможность применения многих классических методов и критериев проверки статистических гипотез, является предположение о принадлежности анализируемых случайных величин нормальному закону. Корректность формирования статистического вывода с использованием соответствующего критерия обеспечивается только при выполнении этого предположения. То есть, соответствующий классический критерий можно применять и полученному выводу можно доверять, если не отклоняется гипотеза о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону.

В 2002 г. был введен в действие ГОСТ Р ИСО 5479–2002 [67], посвященный проверке отклонения распределения вероятностей от нормального закона. Сразу было видно, что он не помогает практикам в решении соответствующих задач и не отвечает на имеющиеся вопросы. Почему выбран такой краткий перечень критериев? Почему отобраны именно эти критерии? В чём их преимущество? Есть ли

недостатки? Почему ничего не говорится об использовании для проверки нормальности непараметрических критериев согласия? О критериях типа χ^2 ?

Критериев, которые могут быть использованы для проверки гипотезы о принадлежности выборки нормальному закону, достаточно много. Однако не смотря на множество публикаций не хватает объективной информации о действительных свойствах критериев, их достоинствах и недостатках. Можно натолкнуться на авторитетные мнения о целесообразности применения тех или иных критериев, которые не подкрепляются результатами сравнительного анализа и не всегда подтверждаются при проверке.

Специалистов, сталкивающихся в своей практической деятельности с необходимостью статистического анализа результатов экспериментов и, естественно, с проблемой проверки гипотез о принадлежности наблюдений или ошибок измерений нормальному закону, интересует, какие критерии предпочтительнее использовать и почему. Какие критерии обладают большей мощностью? Какие существуют “подводные камни”, отражающиеся на результатах анализа?

Данное руководство подготовлено на базе наших достаточно кропотливых исследований, проведенных после выхода стандарта [67]. Они позволили провести сравнительный анализ мощности критериев относительно различных альтернатив, показали недостатки некоторых популярных критериев. Можно надеяться, что настоящая книга, как и руководство по непараметрическим критериям согласия [95], окажет реальную помощь специалистам, заинтересованным в корректности проводимого статистического анализа.

Я очень признателен своим ученикам и коллегам Лемешко С.Б. и Рогожникову А.П., последовательно много сделавшим для исследования распределений статистик и оценки мощности критериев, ориентированных на проверку гипотез о принадлежности наблюдений нормальному закону.

*Б.Ю. Лемешко
Июль 2014*

Введение

Принадлежность наблюдаемых данных нормальному закону является необходимой предпосылкой для корректного применения большинства классических методов математической статистики, используемых в задачах обработки измерений, стандартизации и контроля качества. Поэтому проверка на отклонение от нормального закона является частой процедурой в ходе проведения измерений, контроля и испытаний, имеющей особое значение, так как далеко не всегда ошибки измерений, связанные с приборами, построенными на различных физических принципах, или ошибки наблюдений некоторого контролируемого показателя подчиняются нормальному закону [99]. В таких случаях применение классического аппарата, опирающегося на предположение о нормальности наблюдаемого закона, оказывается некорректным и может приводить к неверным выводам.

В 2002 г. введен в действие в отечественный стандарт ГОСТ Р ИСО 5479–2002 «Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения» [67], который представляет собой аутентичный текст международного стандарта ISO 5479–97. В стандарте рассматриваются графический метод проверки на нормальность с использованием вероятностной бумаги, критерии проверки на симметричность и на значение эксцесса, статистики которых представляют собой функции от оценок моментов закона распределения, критерии Шапиро–Уилка, основанные на регрессионном анализе порядковых статистик, критерий Эппса–Палли, статистика которого измеряет некоторое расстояние между выборочной характеристической функцией и характеристической функцией нормального закона.

По существу, стандарт охватывает лишь малую часть из существующего множества критериев, которые были предложены специально или могут быть использованы для проверки отклонения наблюдаемых данных (ошибок измерений) от нормального закона. В

стандарте отказываются от использования критериев типа χ^2 и не упоминается применение для проверки нормальности непараметрических критериев согласия.

Содержание стандарта [67] и ограниченность перечня включенных в него критериев не позволяет его пользователям ориентироваться в том, какой из критериев наиболее предпочтителен для применения. Какой из критериев оказывается более мощным и против каких конкурирующих гипотез? При каких объемах выборок конкретный критерий обладает преимуществом или наоборот? Какие недостатки у конкретных критериев?

В отечественной литературе можно найти много примеров, связанных с проверкой отклонений от нормального закона, но исследованию специальных критериев, предназначенных для этих целей, уделено достаточно мало внимания [71, 64]. Напротив, в зарубежных источниках исследованию критериев проверки отклонений от нормальности посвящено значительное число работ. Уделено внимание и анализу мощности критериев при проверке отклонений от нормального закона по отношению к различным альтернативам [49, 44]. Подчеркивается, что критерии согласия при малых объемах выборок проигрывают по мощности специальным критериям проверки на отклонение от нормальности [49] и предпочтение, как правило, отдается критерию Шапиро–Уилка. В то же время не складывается полной картины того, когда и каким критерием целесообразней пользоваться при проверке отклонений распределения от нормального.

Все сказанное не позволяет заинтересованным специалистам точно знать, насколько обоснован выбор критериев в стандарте, каковы их достоинства и недостатки, какова их мощность, как меняются распределения статистик критериев с ростом объемов выборок. Всегда ли, например, критерии Шапиро–Уилка и Эппса–Палли по мощности оказываются предпочтительнее?

После выхода стандарта [67] в работе [84] был проведен сравнительный анализ ряда статистических критериев, предназначенных для проверки отклонения эмпирических распределений от нормального закона, в ходе которого была проанализирована мощность и выявлены недостатки отдельных критериев, ранее не упоминаемые в литературе. Исследования, проведенные в [84], показали, что популярные критерии Шапиро–Уилка и Эппса–Палли, рекомендуемые

стандартом [67], при малых объемах выборок и малых уровнях значимости α (вероятностях ошибки первого рода) являются смещенными относительно некоторых конкурирующих гипотез (мощность критериев оказывается меньше уровня значимости).

В [88] был продолжен анализ критериев нормальности. Перечень критериев, исследованных в [84], был расширен за счет критериев Фросини [18, 19], Хегази–Грина [24], Шпигельхальтера [51], Гири [20] и Дэвида–Хартли–Пирсона [12]. Эти исследования показали, что серьезными недостатками обладают и некоторые другие критерии.

В [91] мощность множества критериев, применяемых для проверки нормальности относительно ряда конкурирующих законов, сравнивалась при анализе результатов классических экспериментов по измерению констант.

Применение специальных критериев, ориентированных только на проверку гипотезы о принадлежности анализируемых данных нормальному закону, рассматривается в разделе 2.

Классические непараметрические критерии согласия Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлинга, Купера, Ватсона и критерии Жанга предназначены для проверки простых гипотез о принадлежности выборки полностью известному теоретическому закону распределения вероятностей. В ситуации проверки сложных гипотез, когда оценки параметров теоретического закона оцениваются по этой же выборке, классические результаты, касающиеся этих критериев, оказываются бесполезными, так как распределения статистик при справедливости проверяемой гипотезы становятся зависящими от вида гипотезы. Возможности их использования в таких ситуациях наиболее полно изложены в [95, 103]. Применение критерия Колмогорова для проверки нормальности впервые было рассмотрено в [41], критериев Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга в этих же целях наиболее полно, по-видимому, в [96], Купера и Ватсона – в [92, 93, 38, 39, 94, 40], критериев Жанга – в работе [59]. Применение для проверки нормальности непараметрических критериев согласия рассматривается в разделе 3.

Традиционно для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону применяются критерии согласия типа χ^2 . Применение (классического) критерия χ^2 Пирсона

для проверки нормальности предусматривает оценивание неизвестных параметров закона по группированным данным. Применение данного критерия с оцениванием параметров по негруппированным данным имеет свои особенности. В последнем случае целесообразным является применение модифицированных критериев, в частности, критерия Никулина-Рао-Робсона [97, 98, 45]. Применение для проверки нормальности критериев согласия типа χ^2 рассматривается в разделе 4.

В разделе 5 рассматривается проверка нормальности погрешностей в классических экспериментах.

В разделе 6 обсуждаются некоторые проблемы, связанные с использованием критериев в “нестандартных” ситуациях.

Большинство таблиц процентных точек (квантилей), необходимых при формировании статистического вывода по соответствующему критерию, для удобства вставлены в параграфы с описанием свойств этого критерия, так же, как и таблицы с оценками мощности. В приложение вынесены лишь наиболее громоздкие таблицы.

1. Общие положения

1.1. Общие сведения о проверке статистических гипотез

При проверке гипотез о виде закона распределения различают простые и сложные гипотезы. Простая проверяемая гипотеза имеет вид $H_0: F(x) = F(x, \theta)$, где $F(x, \theta)$ – функция распределения вероятностей, с которой проверяют согласие наблюдаемой выборки X_1, X_2, \dots, X_n объемом n , а θ – известное значение параметра (скалярного или векторного).

Сложная проверяемая гипотеза имеет вид $H_0: F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, где Θ – область определения параметра θ .

При проверке гипотезы о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону проверяемая гипотеза имеет вид $H_0:$

$$F(x) \in \{F(x, \mu, \sigma), \mu \in (0, \infty), \sigma(0, \infty)\}, \text{ где } F(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}} dx$$

– функция распределения вероятностей нормального закона.

Для проверки этой гипотезы может использоваться ряд критериев, построенных специально для проверки принадлежности именно нормальному закону, а также применяться совокупность непараметрических критериев согласия и критериев согласия типа χ^2 .

Тот факт, что проверяется сложная гипотеза особенно существенен для применения непараметрических критериев согласия, так как не могут быть использованы классические результаты для этих критериев, имеющие место при проверке простых гипотез [95]. Свои особенности применения в этом случае имеют и критерии согласия типа χ^2 .

С каждым из критериев, используемым для проверки гипотезы H_0 , связана некоторая статистика S , измеряющая в соответствии с некоторой мерой расстояние между теоретическим законом распределения вероятностей и эмпирическим законом, определяемым выборкой. В силу случайности извлекаемых выборок случайными оказываются и значения статистики S , вычисляемые в соответствии с

этим выборками. При справедливости проверяемой гипотезы H_0 статистика S подчиняется некоторому распределению $G(S|H_0)$.

Схема проверки гипотезы заключается в следующем. Область определения статистики разбивается на два подмножества, одно из которых представляет собой критическую область, и попадание в которую при справедливости H_0 маловероятно. При попадании вычисленного по выборке значения S^* статистики S в критическую область проверяемая гипотеза H_0 отклоняется (отвергается). В противном случае – нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

Заметим, что неотклонение гипотезы H_0 в процессе проверки не означает, что она справедлива. Истинный закон распределения реальных случайных величин остается всегда неизвестным. Результат проверки свидетельствует лишь о том, что этот закон, возможно, не очень сильно отличается, в данном случае, от нормального.

С другой стороны, может быть отклонена и справедливая гипотеза H_0 и эти самым совершена ошибка 1-го рода. При проверке гипотез, как правило, задают вероятность ошибки 1-го рода α (уровень значимости), допуская тем самым возможность отклонения H_0 и возможность такой ошибки.

При построении критериев стремятся к использованию одномерных статистик, что упрощает построение критической области. При этом критерии могут быть правосторонними, левосторонними и двусторонними, что определяет построение критической области.

Все непараметрические критерии согласия и критерии типа χ^2 – правосторонние, и проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики. Среди специальных критериев проверки нормальности большинство правосторонних и двусторонних, но есть и левосторонний критерий (Шапиро-Уилка).

В случае правостороннего критерия граница критической области (критическое значение) $S_{1-\alpha}$, определяется уравнением

$$\alpha = \int_{S_{1-\alpha}}^{\infty} g(s|H_0) ds = 1 - G(S_{1-\alpha}|H_0), \quad (1.1)$$

где $g(s|H_0)$ – условная плотность распределения статистики при справедливости H_0 . Для используемых на практике критериев асимптотические (предельные) распределения $G(S|H_0)$ соответствующих статистик при условии истинности гипотезы H_0 , как правило, известны. Критическое значение $S_{1-\alpha}$ обычно берут из соответствующей таблицы процентных точек (квантилей распределения $G(S|H_0)$) или вычисляют.

В принятой практике статистического анализа обычно полученное значение статистики S^* сравнивают с критическим значением $S_{1-\alpha}$ при заданном уровне значимости α . Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют, если $S^* > S_{1-\alpha}$ (рис. 1.1).

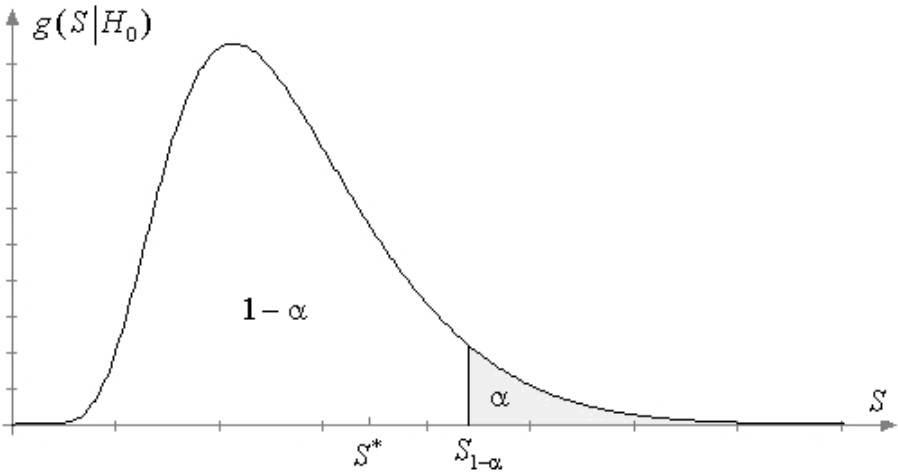


Рис. 1.1. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критическое значение для правостороннего критерия

Больше информации о степени согласия можно почерпнуть из «достигнутого уровня значимости»: величины вероятности возможного превышения полученного значения статистики при справедливости нулевой гипотезы (**p-value**)

$$P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{\infty} g(s|H_0) ds = 1 - G(S^*|H_0). \quad (1.2)$$

Именно эта вероятность позволяет судить о том, насколько хорошо выборка согласуется с теоретическим распределением, так как по существу представляет собой вероятность истинности нулевой гипотезы (рис. 1.2). Гипотезу о согласии не отвергают, если $P\{S > S^*\} > \alpha$.

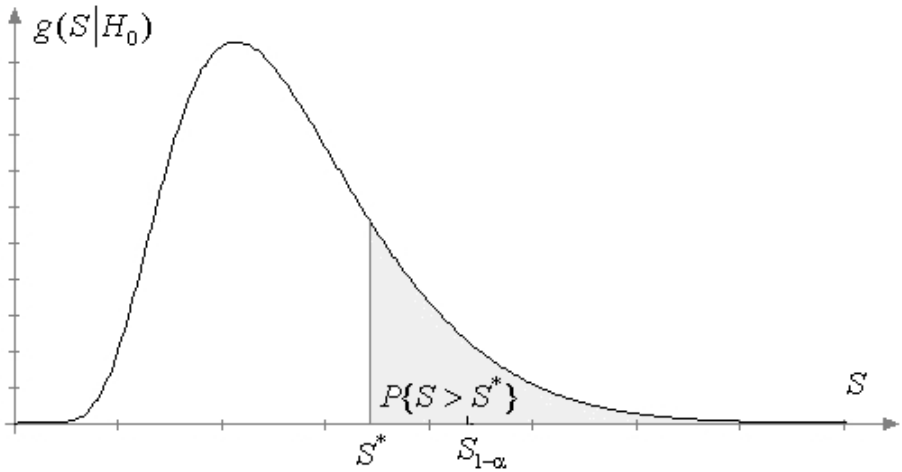


Рис. 1.2. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и достигнутый уровень значимости

В случае левостороннего критерия граница критической области S_α , определяется уравнением

$$\alpha = \int_{-\infty}^{S_\alpha} g(s|H_0) ds = G(S_\alpha|H_0). \quad (1.3)$$

Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют, если $S^* < S_\alpha$ (рис. 1.3). Достигнутый уровень значимости (**p**-value) в этом случае определяется выражением

$$P\{S < S^*\} = \int_{-\infty}^{S^*} g(s|H_0) ds = G(S^*|H_0). \quad (1.4)$$

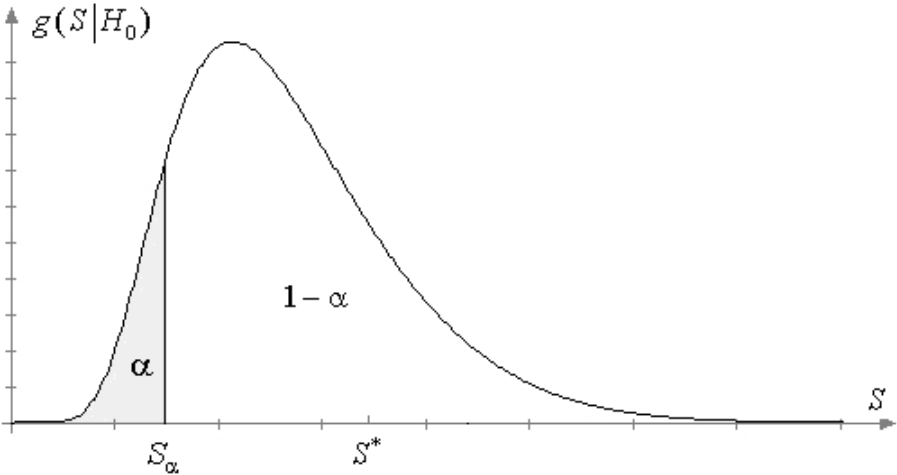


Рис. 1.3. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критическое значение для левостороннего критерия

В случае двустороннего критерия критическая область состоит из двух частей. И проверяемая гипотеза H_0 отклоняется, если $S^* < S_{\alpha/2}$ или $S^* > S_{1-\alpha/2}$. А достигнутый уровень значимости (**p-value**) в этом случае определяется соотношением

$$p_{value} = 2 \min \left\{ G(S^*|H_0), 1 - G(S^*|H_0) \right\}. \quad (1.5)$$

Задачи оценивания параметров и проверки гипотез опираются на выборки независимых случайных величин. Случайность самой выборки предопределяет, что возможны и ошибки в результатах статистических выводов. С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов: ошибка первого рода состоит в том, что отклоняют гипотезу H_0 , когда она верна; ошибка второго рода состоит в том, что принимают (не отклоняют) гипотезу H_0 , в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1 . Уровень значимости α

задает вероятность ошибки первого рода. Обычно, используя критерии проверки гипотез, не рассматривают конкретную конкурирующую гипотезу. В таком случае при проверке гипотез о виде закона можно считать, что конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1: F(x) \neq F(x, \theta_0)$.

Если же гипотеза H_1 задана и имеет, например, вид $H_1: F(x) = F_1(x, \theta)$, то задание величины α для используемого критерия проверки гипотез определяет и вероятность ошибки второго рода β . Ошибка второго рода заключается в том, что не отклоняется гипотеза H_0 , когда на самом деле справедлива гипотеза H_1 .

Вероятность ошибки второго рода β для правостороннего критерия определяется выражением

$$\beta = \int_{-\infty}^{S_{1-\alpha}} g(s|H_1) ds, \quad (1.6)$$

для левостороннего – выражением

$$\beta = \int_{S_\alpha}^{\infty} g(s|H_1) ds, \quad (1.7)$$

а для двустороннего – соотношением

$$\beta = \int_{S_{\alpha/2}}^{S_{1-\alpha/2}} g(s|H_1) ds. \quad (1.8)$$

Для конкретной альтернативы H_0 и H_1 задание вероятности ошибки 1-го рода определяет и вероятность ошибки 2-го рода. Рис. 1.4 поясняет это для правостороннего критерия. На рис. 1.4 $g(s|H_0)$ отображает плотность распределения статистики S при справедливости гипотезы H_0 , а $g(s|H_1)$ – плотность распределения при справедливости H_1 .

Мощность критерия представляет собой величину $1 - \beta$. Очевидно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении α , тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1 . Особенно

важно, чтобы используемый критерий хорошо различал близкие конкурирующие гипотезы. Графически требование максимальной мощности критерия означает, что на рис. 1.4 плотности распределений статистики $g(s|H_0)$ и $g(s|H_1)$ должны быть максимально «раздвинуты».

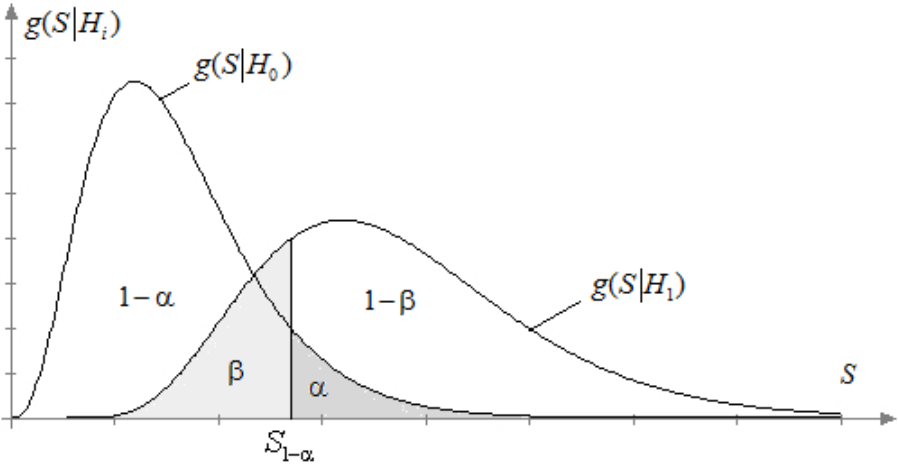


Рис. 1.4. Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез H_0 и H_1 в случае правостороннего критерия

Аналогичным образом можно проиллюстрировать вероятности ошибок второго рода и мощности для левостороннего и двустороннего критериев.

Очевидно, что при проверке любой статистической гипотезы желательно использовать наиболее мощный критерий, который для заданной вероятности ошибки первого рода обеспечивает минимальную вероятность ошибки второго рода относительно любой конкурирующей гипотезы H_1 . Ещё лучше использовать равномерно наиболее мощный критерий, который для любого заданного α обеспечивает минимальное значение β . Однако существование такого критерия для проверки конкретной гипотезы H_0 является редчайшим исключением. Нет такого и среди критериев, которые могут использоваться для проверки гипотезы о принадлежности наблюдаемой выборки нормальному закону.

1.2. Конкурирующие гипотезы

В данном руководстве при исследовании распределений статистик проверяемой гипотезе H_0 всегда соответствует принадлежность наблюдаемой выборки нормальному закону распределения

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2} \right\}. \quad (1.9)$$

При исследовании зависимости распределений статистик от вида наблюдаемого закона и исследовании мощности критериев рассматривалось целое множество конкурирующих распределений. Но в разделах 2-4 основные свойства критериев демонстрируются только на альтернативах, позволяющих показать как достоинства, так и некоторые ранее неизвестные недостатки отдельных критериев.

В качестве таких конкурирующих гипотез при исследовании мощности критериев рассмотрена принадлежность анализируемой выборки следующим законам: конкурирующая гипотеза H_1 соответствует обобщённому нормальному закону (семейству распределений) с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp \left\{ -\left(\frac{|x - \theta_0|}{\theta_1} \right)^{\theta_2} \right\} \quad (1.10)$$

и параметром формы $\theta_2 = 4$; гипотеза H_2 – распределению Лапласа с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\theta_1} \exp \{ -|x - \theta_0| / \theta_1 \}, \quad (1.11)$$

гипотеза H_3 – логистическому распределению с плотностью

$$f(x) = \frac{\pi}{\theta_1 \sqrt{3}} \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} \Big/ \left[1 + \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} \right]^2, \quad (1.12)$$

очень близкому к нормальному. При этом, если это не влияло на результаты исследований, выборки, как правило, моделировались с параметром масштаба $\theta_1 = 1$ и параметром сдвига $\theta_0 = 0$. На рис. 1.5 показаны функции плотности распределений, соответствующих H_1 , H_2 , H_3 , при значениях параметров масштаба, при которых они наиболее близки стандартному нормальному закону.

Такой выбор конкурирующих гипотез (конкурирующих законов) имеет под собой определенные основания. Гипотеза H_2 , соответствующая распределению Лапласа, является наиболее далекой от H_0 . При различении этих двух гипотез проблем обычно не возникает.

Логистическое распределение, соответствующее конкурирующей гипотезе H_3 , это распределение очень близкое к нормальному закону. И эти два закона, как правило, трудно различать с использованием критериев согласия.

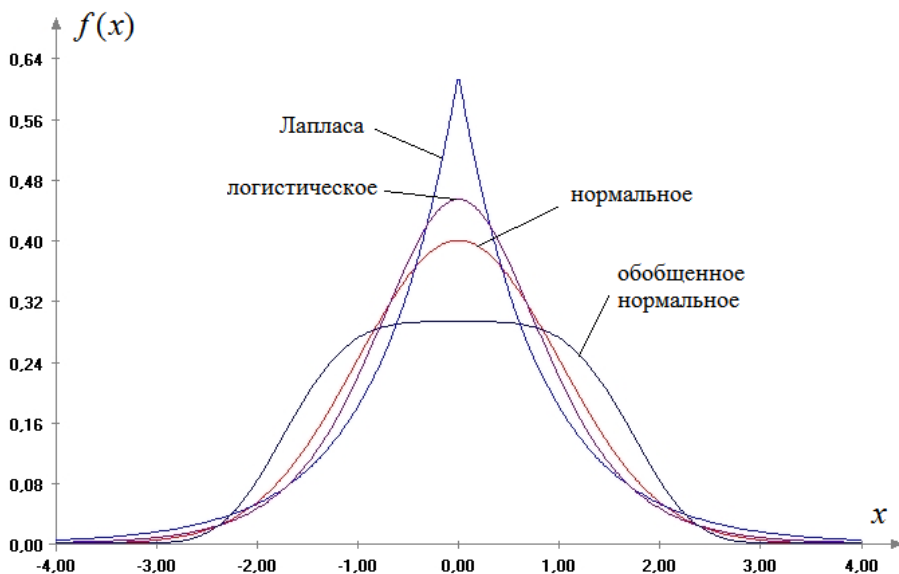


Рис. 1.5. Плотности законов распределения, соответствующие рассматриваемым гипотезам H_i

Конкурирующая гипотеза H_1 , которой соответствует обобщённый нормальный закон с параметром формы $\theta_2 = 4$, представляет собой “лакмусовую бумагу”, на которой проявились скрытые недостатки отдельных критериев. Ряд критериев, предназначенных для проверки гипотезы о нормальности, при ограниченных объемах выборок n не способен отличать законы, близкие к такому, от нормального закона. Оказалось, что мощность $1 - \beta$ относительно гипотезы H_1 при малых заданных вероятностях ошибок первого рода α и ограниченных (малых) n для целого ряда критериев представляет собой величину, меньшую α . Образно говоря, “с позиции критерия” это означает, что закон, соответствующий H_1 , является “более нормальным, чем нормальный”. А сам этот факт свидетельствует о смещенности критерия.

Оценки мощности относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 , приводимые при описании критериев, позволяют, сравнивая их, оценить достоинства и недостатки конкретных критериев, и подсказать, применение какого критерия предпочтительней в имеющейся ситуации.

2. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона

2.1. Критерий проверки на симметричность

Данный критерий [10, 5] предназначен для проверки гипотез о симметричности наблюдаемого закона (против наличия асимметрии) при объемах выборки $8 \leq n \leq 5000$. Статистика критерия

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3}, \quad (2.1)$$

при вычислении которой оценки используемых центральных моментов (в том числе $\mu_2 = E[(X - \mu)^2] = \sigma^2$) вычисляются по выборке X_1, X_2, \dots, X_n в соответствии с соотношением

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^j, \quad (2.2)$$

где

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Критерий двусторонний: проверяется гипотеза $H_0: \sqrt{\beta_1} = 0$ при конкурирующей гипотезе о наличии асимметрии $\sqrt{\beta_1} > 0$ (положительная асимметрия) или $\sqrt{\beta_1} < 0$ (отрицательная асимметрия).

В стандарте [67] и первоисточниках [10, 5] приводятся только таблицы процентных точек (табл. А.1, приложение А). Ничего не говорится о виде распределения. Распределение статистики (2.1) в случае нормального закона является симметричным и зависит от числа наблюдений (рис. 2.1). В [64] говорится, что распределение статистики (2.1) очень быстро приближается к нормальному с нулевым математическим ожиданием и асимптотической дисперсией $6(n-2)/[(n+1)(n+3)]$.

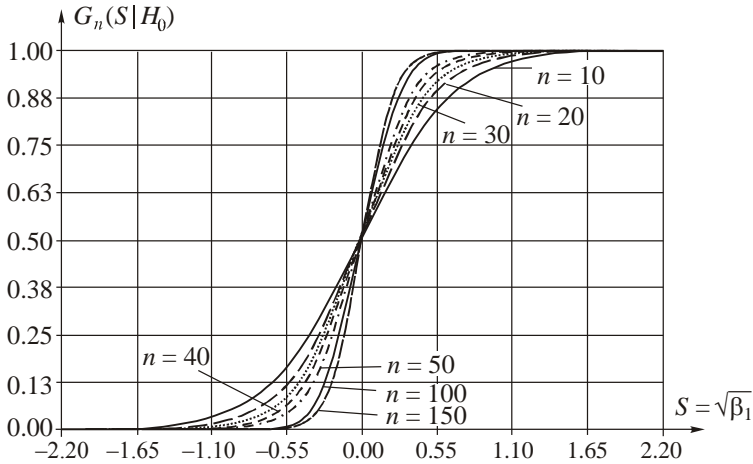


Рис. 2.1. Распределения статистики (2.1) в зависимости от объема выборки при $n = 10, 20, 40, 30, 50, 100, 150$ в случае нормального закона

Критерий, использующий статистику (2.1), является критерием проверки только на симметричность. Его использование полезно при проверке отклонений от нормального закона, но неотклонение гипотезы о симметричности на основании предположений о нормальности закона не может служить подтверждением нормальности (условие необходимое, но недостаточное), так как распределение статистики (2.1) зависит от вида наблюдаемого закона (рис. 2.2).

Нормальное распределение не единственное симметричное распределение. Поэтому проверяемая гипотеза о симметричности может необоснованно и отклоняться, и не отклоняться. Например, в случае принадлежности наблюдаемых выборок распределению семейства (2.2) с параметром формы $\theta_2 = 4$ (при справедливости H_1) и использования процентных точек для статистики (2.1), построенных в предположении нормальности закона, гипотеза о симметричности не будет отклоняться с большим достигаемым уровнем значимости.

Статистику (2.1) в ряде случаев используют совместно со статистикой (2.3) критерия проверки на эксцесс. В стандарте [67] рассматривается критерий с такой двумерной статистикой (совместный критерий в разделе 2.3), однако критерий несколько

неудобен в использовании из-за сложности задания критической области.

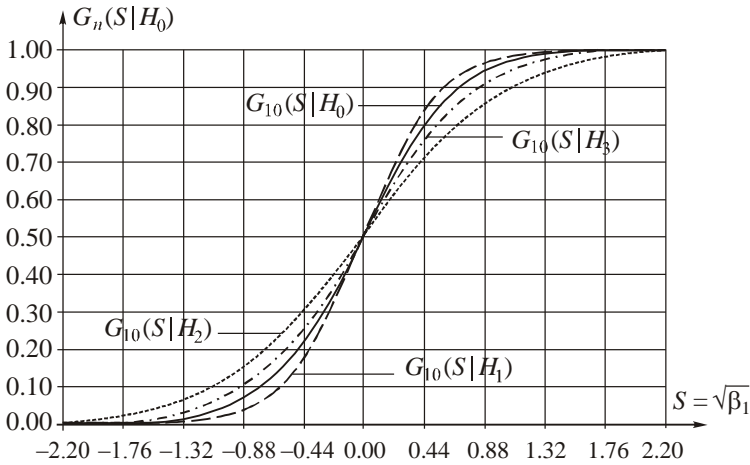


Рис. 2.2. Распределения статистики критерия проверки на симметричность в зависимости от гипотез H_i при объеме выборок $n = 10$

Совместно эти статистики используются также в критерии, изложенном в разделе 2.6, и в критерии Д'Агостино, представленном в разделе 2.8.

2.2. Критерий проверки на эксцесс

В стандарте [67] предусмотрено использование критерия проверки на эксцесс [5, 11] при объемах выборок $8 \leq n \leq 5000$. Статистика критерия проверки на значение эксцесса имеет вид

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4}. \quad (2.3)$$

Критерий двусторонний: проверяется гипотеза вида $H_0: \beta_2 = 3$ при конкурирующих гипотезах $\beta_2 > 3$ (большой эксцесс) или $\beta_2 < 3$ (меньший эксцесс).

В стандарте [67] и первоисточниках [5, 11] приводятся лишь таблицы процентных точек (табл. А.2, приложение А). Распределение статистики зависит от объема рассматриваемых выборок. В [64] говорится, что распределение статистики (2.3) даже при больших объемах выборок n оказывается далеким от нормального. В этом можно убедиться, посмотрев на рис. 2.3, где приведены графики полученных в результате моделирования распределений статистики критерия проверки на эксцесс в зависимости от объема выборки n .

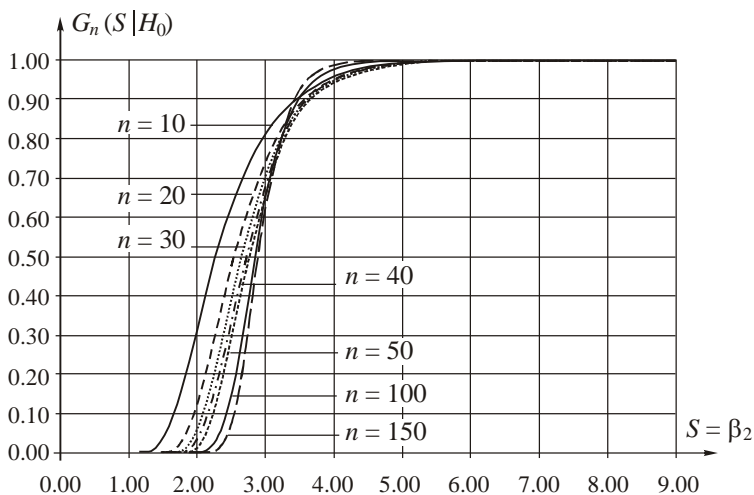


Рис. 2.3. Графики распределений статистики критерия проверки на эксцесс в зависимости от объема выборки при $n = 10, 20, 40, 30, 50, 100, 150$

Распределения статистики (2.3) были исследованы при наблюдаемых законах, соответствующих рассмотренным выше гипотезам H_i . Результаты исследований позволяют судить о мощности критерия проверки на эксцесс относительно различных конкурирующих гипотез.

Естественно, распределения статистики (2.3) зависят от наблюдаемого закона. На рис. 2.4 и 2.5 показано изменение распределения статистики (2.3) в зависимости от наблюдаемого закона при справедливости рассматриваемых конкурирующих гипотез H_i и объемах выборок $n = 10$ и $n = 50$.

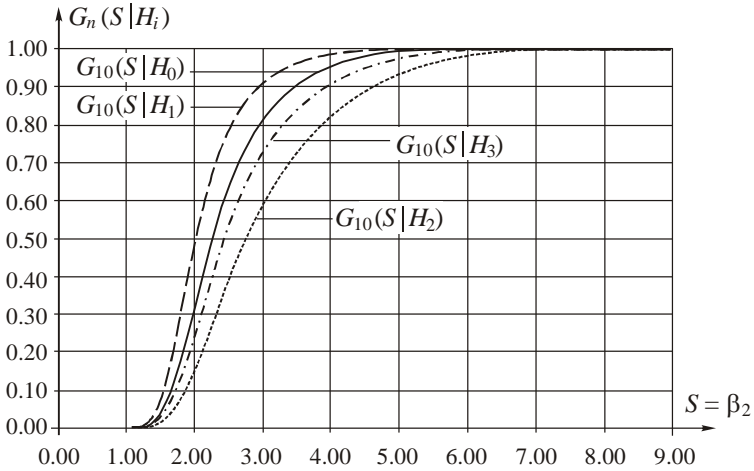


Рис. 2.4. Распределения статистики (2.3) критерия проверки на эксцесс в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 10$

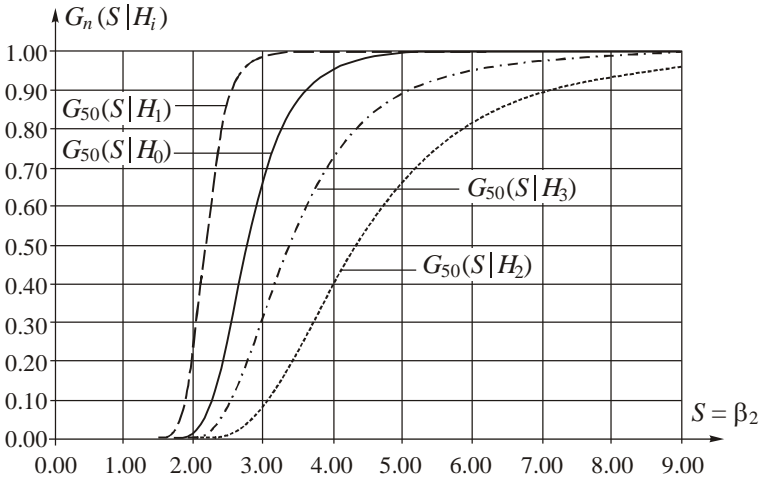


Рис. 2.5. Распределения статистики (3) критерия проверки на эксцесс в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 50$

Вместе с критерием симметричности данный критерий позволяет судить о степени отклонения наблюдаемой выборки от нормального

закона. Недостатком критерия является сильная зависимость распределения статистики (2.3) от объема выборок.

Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса [8] в стандарте рассматривается при объемах выборок $20 \leq n \leq 1000$ (там он назван многонаправленным критерием). Проверяемая гипотеза имеет вид $H_0: \sqrt{\beta_1} = 0$ и $\beta_2 = 3$ при конкурирующих гипотезах $\sqrt{\beta_1} \neq 0$ и (или) $\beta_2 \neq 3$. В стандарте приведены кривые, определяющие критическую область при уровне значимости $\alpha = 0.05$ и $\alpha = 0.01$.

При подготовке данного руководства такой совместный критерий не исследовался. Результаты исследования различных вариантов критериев, построенных на основе (совместного) использования статистик (2.1) и (2.3), и не вошедших в стандарт, рассмотрены ниже в разделах 2.6 и 2.8.

2.3. Критерий Шапиро–Уилка

Критерий Шапиро–Уилка [48, 50], базируется на анализе линейной комбинации разностей порядковых статистик. В стандарте [67] применение критерия предусмотрено при объемах выборок $8 \leq n \leq 50$. Сложность применения при больших объемах выборок затруднена из-за отсутствия в документе соответствующих коэффициентов. При объемах выборок $51 \leq n \leq 99$ коэффициенты и таблицы процентных точек можно найти в [50]. В стандарте критерий рекомендуют использовать при отсутствии априорной информации о типе возможного отклонения от нормальности в тех случаях, когда в качестве альтернативы можно выбрать гипотезу следующего вида: примерно симметричное распределение с $|\sqrt{\beta_1}| < 1/2$ и $\beta_2 < 3$ или асимметричное распределение (например, $|\sqrt{\beta_1}| > 1/2$). В противном случае рекомендуют критерий Эппса–Палли. Данная рекомендация неочевидна и требует подтверждения.

При построении статистики для вариационного ряда $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$, полученного по наблюдаемой выборке X_1, X_2, \dots, X_n , вычисляют величину

$$S = \sum_k a_k [X_{(n+1-k)} - X_{(k)}],$$

где индекс k изменяется от 1 до $n/2$ или от 1 до $(n-1)/2$ при четном и нечетном n соответственно. Коэффициенты a_k приведены в стандарте и первоисточниках [48, 50] (табл. А.3, приложение А). Статистика критерия имеет вид

$$W = S^2 / \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad (2.4)$$

Критерий левосторонний: гипотеза о нормальности отвергается при малых значениях статистики W . В стандарте и литературе отсутствует информация об аналитическом виде распределения статистики, приводятся лишь процентные точки (табл. А.4, приложение А).

Как и в предыдущих случаях, распределения статистики (2.4) исследовались методами статистического моделирования. На рис. 2.6 показано изменение распределения статистики критерия Шапиро–Уилка в зависимости от объема выборки, принадлежащей нормальному закону.

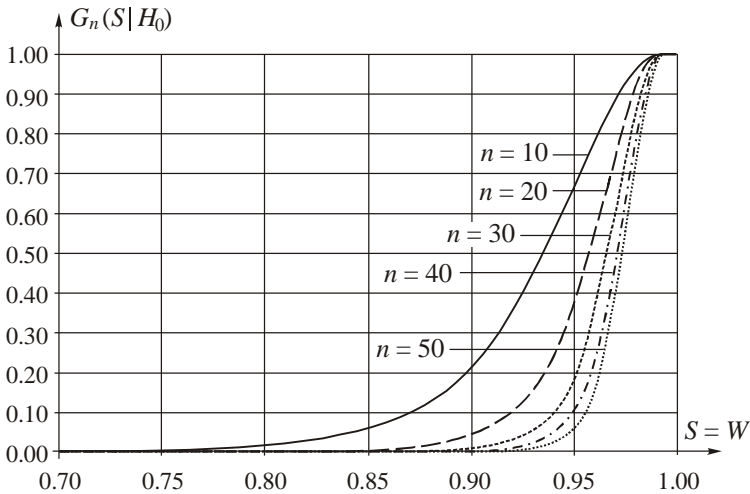


Рис. 2.6. Графики распределения статистики критерия Шапиро–Уилка в зависимости от объема выборки при $n = 10, 20, 40, 30, 50$

Распределения статистики (2.4) исследовались при различных наблюдаемых законах. Исследовалась также мощность критерия. В качестве проверяемой гипотезы H_0 рассмотрен нормальный закон распределения с параметром масштаба, равным 1, и параметром сдвига, равным 0. В качестве близких конкурирующих гипотез рассмотрены гипотезы: H_1 – выборка соответствует семейству распределений (1.10) с параметром формы, равным 4, H_2 – распределению Лапласа (1.11) с параметрами (0,1), H_3 – логистическому распределению (1.12) с параметрами (0,1).

Например, на рис. 2.7 приведены полученные условные распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.4) при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объеме выборок $n = 10$.

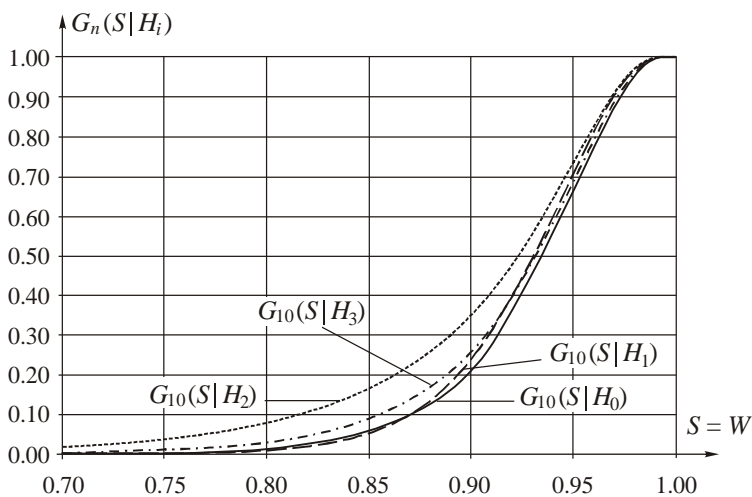


Рис. 2.7. Условные распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.4) при справедливости гипотез при объеме выборок $n = 10$

Результаты исследований показали, что при малых объемах выборок (10...20 наблюдений) критерий Шапиро–Уилка не способен различать гипотезы H_0 и H_1 . Еще в меньшей степени критерий замечает различие между нормальным распределением и распределением семейства (1.10) с параметром формы $\theta_2 = 3$. Более того, по отношению

к конкурирующей гипотезе H_1 критерий оказывается смещенным. Но с ростом числа наблюдений мощность критерия по распознаванию гипотез H_0 и H_1 растет.

На рис. 2.8 для сравнения показаны условные распределения статистики (2.4) при $n = 50$.

Значения мощности критерия Шапиро–Уилка по отношению к конкурирующим гипотезам H_1 , H_2 , H_3 при различных значениях уровня значимости α (вероятности ошибки первого рода) приведены соответственно в табл. 2.1–2.3.

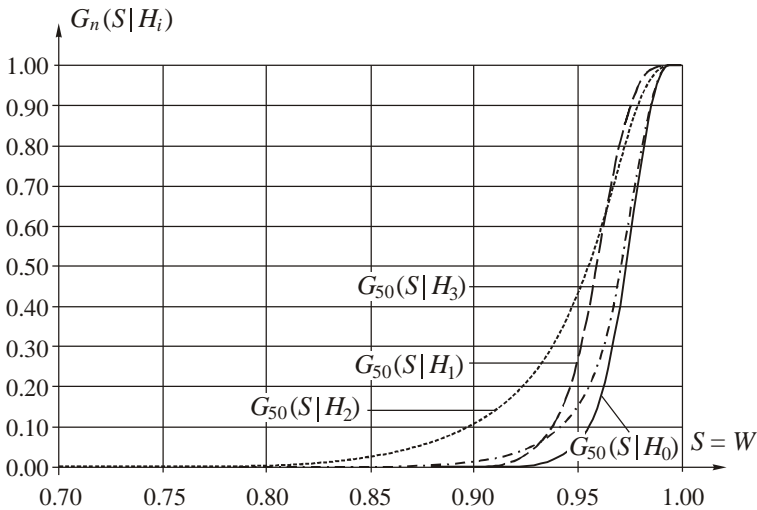


Рис. 2.8. Условные распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.4) при справедливости гипотез при объеме выборок $n = 50$

Как показывают в том числе и наши исследования, мощность критериев, специально построенных для проверки отклонения от нормальности, таких как Шапиро–Уилка и Эппса–Палли, на объемах выборок $n \leq 50$ выше мощности непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, типа ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова и типа Ω^2 Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез [101], которые в такой ситуации мощнее критериев типа χ^2 [102].

Таблица 2.1

**Мощность критерия Шапиро–Уилка относительно гипотезы H_1
(по отношению к распределению семейства (1.10) с параметром $\theta_2 = 4$)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.165	0.105	0.047	0.020	0.006
20	0.206	0.135	0.060	0.024	0.007
30	0.289	0.201	0.101	0.046	0.014
40	0.395	0.294	0.167	0.087	0.033
50	0.495	0.389	0.242	0.140	0.061

Таблица 2.2

**Мощность критерия Шапиро–Уилка относительно гипотезы H_2
(по отношению к распределению Лапласа)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.284	0.225	0.154	0.105	0.062
20	0.411	0.348	0.262	0.197	0.135
30	0.486	0.422	0.333	0.262	0.191
40	0.529	0.467	0.378	0.305	0.230
50	0.564	0.502	0.414	0.341	0.264

Таблица 2.3

**Мощность критерия Шапиро–Уилка относительно гипотезы H_3
(по отношению к логистическому закону)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.192	0.139	0.082	0.048	0.024
20	0.236	0.182	0.117	0.077	0.044
30	0.256	0.201	0.135	0.093	0.057
40	0.257	0.203	0.140	0.098	0.063
50	0.256	0.203	0.141	0.101	0.066

Заметим, что с применением критериев согласия при малых объемах выборок вообще трудно различать близкие законы. Однако, например, непараметрические критерии согласия Колмогорова, типа ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова и типа Ω^2 Андерсона–Дарлинга, Купера и Ватсона не имеют выявленного в работе [84] недостатка, присущего критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Палли: неспособность отличать от нормального закона распределения семейства (1.10) с более плоскими плотностями распределений ($c \beta_2 < 3$).

2.4. Критерий Эппса–Палли

Этот критерий [4, 3, 17, 25] базируется на сравнении эмпирической и теоретической характеристических функций. В стандарте предусмотрено его применение при $8 \leq n \leq 200$. Процентные точки в таком диапазоне даны с пропусками (табл. А.5, приложение А).

Статистика критерия, вычисляемая по наблюдаемой выборке X_1, X_2, \dots, X_n , имеет вид

$$T_{EP} = 1 + \frac{n}{\sqrt{3}} + \frac{2}{n} \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \exp \left\{ -\frac{(X_j - X_k)^2}{2\hat{\mu}_2} \right\} - \sqrt{2} \sum_{j=1}^n \exp \left\{ -\frac{(X_j - \bar{X})^2}{4\hat{\mu}_2} \right\}, \quad (2.5)$$

где $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Выборка может быть не

упорядочена, порядок наблюдений произволен, но он должен быть неизменным в течение всех проводимых вычислений. Гипотезу о нормальности отвергают при больших значениях статистики.

Распределения статистики (2.5) исследовались методами статистического моделирования. На рис. 2.9 показаны распределения статистики критерия Эппса–Палли в зависимости от объема выборок, принадлежащих нормальному закону. На рисунке наблюдается «пучок» распределений. Распределения статистик критерия незначительно меняются с ростом объемов выборок n (в отличие от

распределений других рассмотренных здесь статистик) при нормальном законе распределения случайной величины. С ростом n наблюдается быстрая сходимость распределения статистики к некоторому предельному.

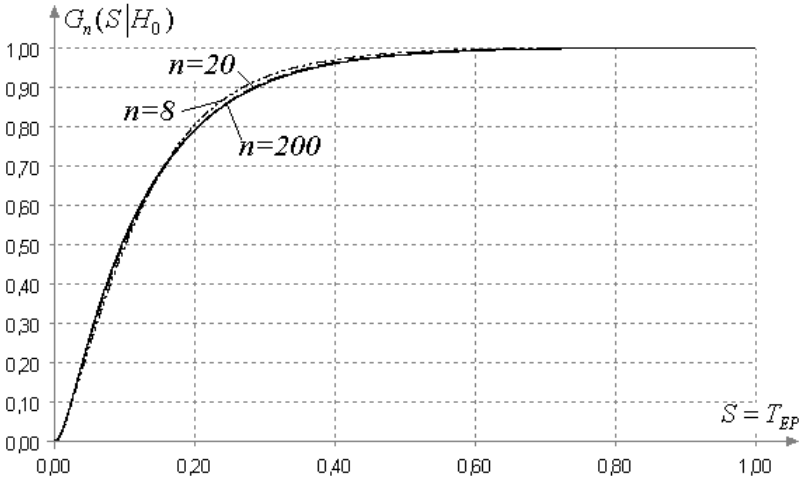


Рис. 2.9. Графики распределений статистики критерия Эпса–Палли в зависимости от объема выборки при $n = 10, 20, 40, 30, 50, 100, 150$

Процентные точки распределений статистики (2.5) при различных объемах выборок отличаются существенно, но вероятности вида $P\{T_{EP} > T_{EP}^*\}$, вычисленные по распределениям статистики (2.5) при различных n , где T_{EP}^* – значение статистики, полученное по выборке, будут достаточно близкими.

В частности, распределения статистики критерия Эпса–Палли при различных объемах выборок n достаточно хорошо аппроксимируются бета-распределениями III рода с функцией плотности

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{B(\theta_0, \theta_1)} \frac{t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1}}{[1 + (\theta_2 - 1)t]^{\theta_0 + \theta_1}},$$

где $t = (x - \theta_4) / \theta_3 \in [0, 1]$. Если пренебречь зависимостью статистики (2.5) от объема выборки n , то при $15 < n < 50$ для приближенного вычисления достигаемого уровня значимости $P\{T_{EP} > T_{EP}^*\}$ можно использовать бета-распределение III рода с параметрами $\theta_0 = 1.8645$, $\theta_1 = 2.5155$, $\theta_2 = 5.8256$, $\theta_3 = 0.9216$, $\theta_4 = 0.0008$. Соответствующая функция распределения представляет собой некоторую среднюю для «пучка» распределений, приведенного на рис. 2.9.

При $n \geq 50$ для вычисления достигаемого уровня значимости $P\{T_{EP} > T_{EP}^*\}$ можно использовать предельное распределение, приближением которого является бета-распределение III рода со значениями параметров $\theta_0 = 1.7669$, $\theta_1 = 2.1668$, $\theta_2 = 6.7594$, $\theta_3 = 0.91$, $\theta_4 = 0.0016$.

Исследования распределений статистики критерия Эппса–Палли при справедливости конкурирующих гипотез H_1 , H_2 , H_3 и оценка мощности критерия по отношению к данным гипотезам показали, что критерий имеет тот же недостаток, что и критерий Шапиро–Уилка: он оказывается смещенным относительно тех же конкурирующих гипотез.

Подтверждением этому является картина, показанная на рис. 2.10, где представлены условные функции распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.5) при справедливости гипотез H_0 , H_1 , H_2 , H_3 и объеме выборок $n = 10$.

При $n = 10$ мощность критерия Эппса–Палли по отношению к гипотезе H_1 меньше (!) уровня значимости (при $\alpha \leq 0.1$). Это означает, что при верной гипотезе H_1 при проверке нормальности предпочтение всегда будет отдаваться гипотезе H_0 . При $n = 20$ распределения $G_{20}(S|H_0)$ и $G_{20}(S|H_1)$ в области значений функций распределения, больших 0.95, практически неразличимы, а при $n = 50$ критерий уже способен различать гипотезы H_0 и H_1 (рис. 2.11).

Значения мощности критерия Эппса–Палли по отношению к альтернативам H_1 , H_2 , H_3 , которые можно сравнить с соот-

ветствующими значениями для критерия Шапиро–Уилка, приведены в табл. 2.4 – 2.6.

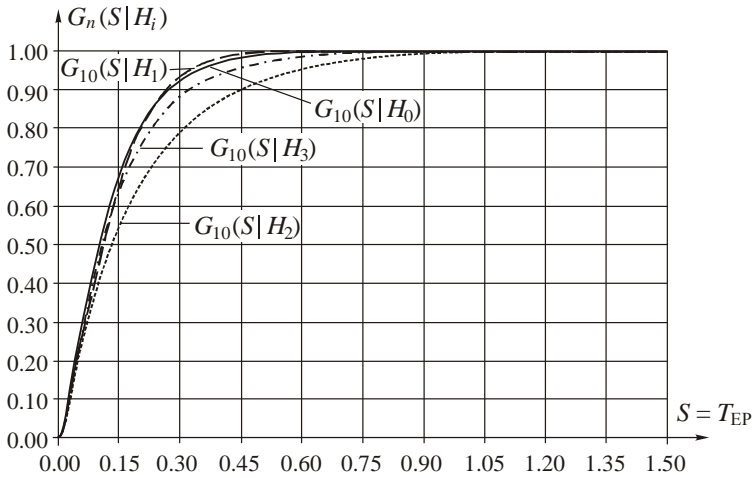


Рис. 2.10. Условные распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.5) и справедливости гипотез при объеме выборок $n = 10$

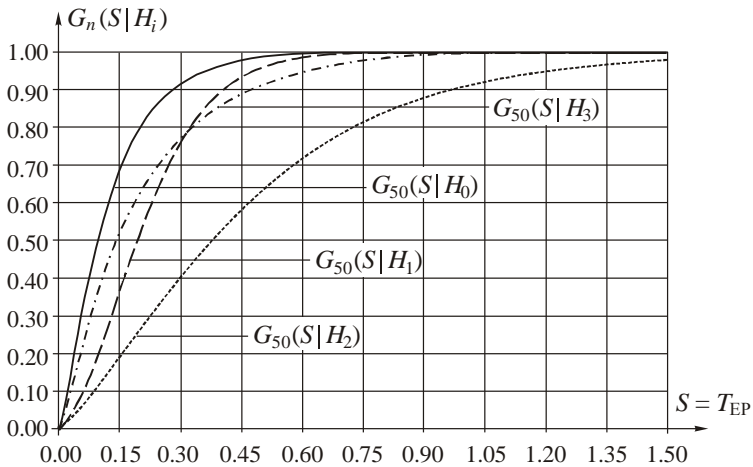


Рис. 2.11. Условные распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.5) при справедливости гипотез при объеме выборок $n = 50$

Таблица 2.4

Мощность критерия Эппса–Палли относительно гипотезы H_1
(по отношению к распределению семейства (1.10) с параметром $\theta_2 = 4$)

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.149	0.090	0.038	0.016	0.005
20	0.198	0.124	0.053	0.021	0.007
30	0.257	0.169	0.076	0.032	0.010
40	0.320	0.221	0.107	0.048	0.015
50	0.383	0.275	0.143	0.068	0.022
100	0.658	0.545	0.366	0.223	0.101
150	0.835	0.752	0.592	0.426	0.244
200	0.928	0.880	0.765	0.622	0.425
300	0.989	0.977	0.940	0.977	0.748

Таблица 2.5

Мощность критерия Эппса–Палли относительно гипотезы H_2
(по отношению к распределению Лапласа)

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.300	0.240	0.164	0.111	0.064
20	0.422	0.355	0.263	0.194	0.127
30	0.525	0.454	0.352	0.271	0.187
40	0.614	0.544	0.438	0.347	0.248
50	0.690	0.623	0.516	0.422	0.315
100	0.906	0.870	0.801	0.724	0.619
150	0.975	0.961	0.931	0.889	0.821
200	0.994	0.990	0.978	0.961	0.927
300	1	0.999	0.998	0.996	0.991

Таблица 2.6

**Мощность критерия Эппса–Палли относительно гипотезы H_3
(по отношению к логистическому закону)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.199	0.145	0.085	0.050	0.025
20	0.236	0.178	0.112	0.070	0.038
30	0.265	0.204	0.131	0.084	0.047
40	0.290	0.227	0.148	0.097	0.055
50	0.317	0.249	0.166	0.110	0.063
100	0.429	0.353	0.250	0.175	0.108
150	0.529	0.449	0.335	0.244	0.157
200	0.616	0.537	0.418	0.316	0.213
300	0.750	0.682	0.566	0.460	0.337

По отношению к конкурирующей гипотезе H_3 (логистическому закону) на объемах выборок $n \leq 50$ критерий Эппса–Палли мощнее критерия Шапиро–Уилка при больших уровнях значимости ($\alpha = 0.1$) и уступает критерию Шапиро–Уилка по мощности при малых уровнях значимости ($\alpha = 0.01$).

2.5. Модифицированный критерий Шапиро–Уилка

Необходимость проверки отклонения от нормального распределения с использованием нескольких независимых выборок возникает достаточно часто. Это бывает связано с тем, что каждая отдельная выборка оказывается слишком мала для обнаружения значимого отклонения от нормального распределения. В такой ситуации при выборках одинакового объема $n > 8$ стандарт [67] рекомендует применять модифицированный критерий Шапиро–Уилка, который позволяет принять решение по совокупности анализируемых выборок.

При проверке для каждой из h последовательно анализируемых выборок объемом n , отобранных из одной генеральной совокупности, подсчитывается значение W_j ($j = \overline{1, h}$) в соответствии с выражением

$$W_j = S_j^2 / \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Значения $S_j = \sum_k a_k [X_{(n+1-k)} - X_{(k)}]$ по соответствующей выборке вычисляются как и в критерии Шапиро–Уилка, где индекс k изменяется от 1 до $n/2$ или от 1 до $(n-1)/2$ при четном и нечетном n соответственно. Коэффициенты a_k приведены в стандарте и первоисточниках [10, 5] (табл. А.3, приложение А).

Для совместного критерия вычисляют значения C_j по формуле

$$C_j = \gamma(n) + \delta(n)v_j,$$

где $v_j = \ln \left\{ \frac{W_j - E(n)}{1 - W_j} \right\}$. Коэффициенты $\gamma(n)$, $\delta(n)$ и $E(n)$ для преобразования W_j и C_j табулированы [67, 6] и приведены в данном руководстве (табл. А.6, приложение А).

Утверждается, что если основное распределение вероятностей нормальное, то величины C_j приблизительно подчиняются нормальному распределению. Статистика модифицированного критерия имеет вид

$$S_M = \sqrt{h} \cdot \bar{C}, \quad (2.6)$$

где $\bar{C} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h C_j$, и должна подчиняться стандартному нормальному закону.

Проверяемая гипотеза о принадлежности выборок нормальному закону отклоняется при уровне значимости α , если $S_M < u_\alpha$, где u_α – α -квантиль стандартного нормального распределения (левосторонний критерий). Заметим, что в стандарте [67] в формуле (19) – ошибка!

К сожалению, наши исследования показали, что распределение статистики (2.6) лишь очень приближенно подчиняется стандартному

нормальному закону и зависит от n и h . При конкретных комбинациях n и h условное распределение статистики $G_{n \cdot h}(S_M | H_0)$ может существенно отличаться от стандартного нормального закона, что является существенным недостатком критерия. Как правило, функция распределения статистики оказывается сдвинутой влево от стандартного нормального закона. Таким образом, принимая решение на основании процентных точек стандартного нормального закона в соответствии с $S_M < u_\alpha$, мы можем несправедливо отклонить верную гипотезу H_0 , т. е. вероятность ошибки первого рода на самом деле оказывается больше задаваемого α . На рис. 2.12 в качестве примера приведены распределения статистики $G_{n \cdot h}(S_M | H_0)$ при различных комбинациях n и h . Здесь же для сравнения представлена функция распределения стандартного нормального закона.

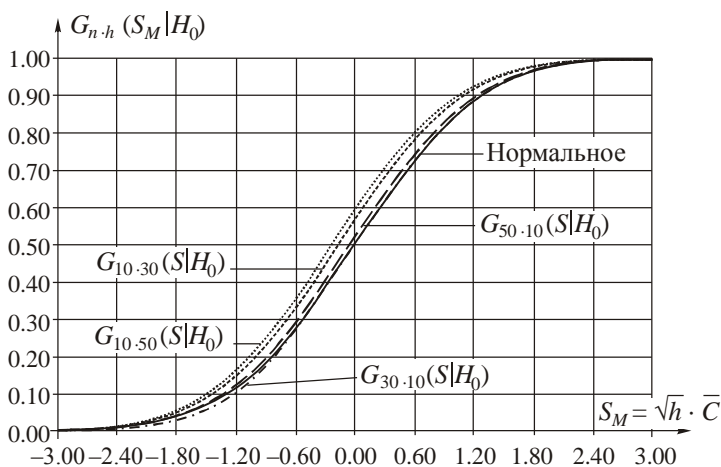


Рис. 2.12. Условные распределения $G_{n \cdot h}(S_M | H_0)$ статистики (2.6) при различных комбинациях n и h

Исследования показали, что модифицированный критерий Шапиро–Уилка, как и другие, при малых $n \cdot h$ (20...30 наблюдений в совокупности) не способен различить гипотезы H_0 и H_1 (отличить нормальный закон от семейства (1.10) с параметром $\theta_2 = 4$). Кроме

того, модифицированный критерий Шапиро–Уилка при малых $n \cdot h < 100$ уступает по мощности критериям Эппса–Палли и Шапиро–Уилка, уступает он и непараметрическим критериям согласия. На рис. 2.13 приведены распределения статистики (2.6) при $n \cdot h = 10 \cdot 10$ и справедливости различных гипотез H_i .

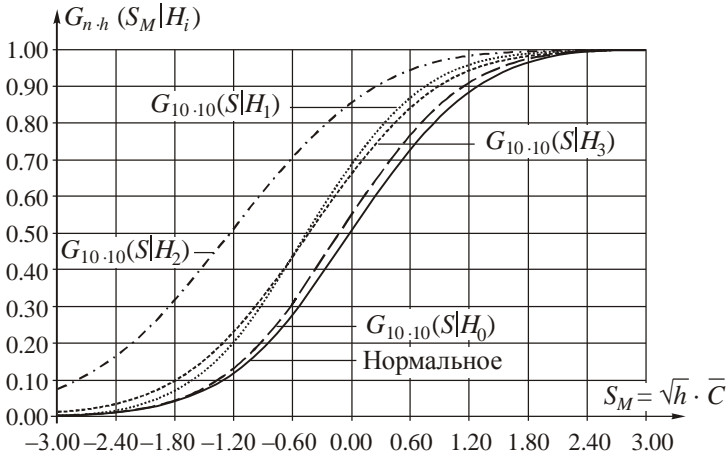


Рис. 2.13. Условные распределения $G_{n \cdot h}(S_M | H_i)$ статистики (2.6) при справедливости гипотез H_i при $n \cdot h = 10 \cdot 10$

Совокупность недостатков критерия позволяет *не рекомендовать* его для применения.

2.6. Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса

Ниже рассмотрен ряд критериев, не имеющих отношения к стандарту [67], статистики которых измеряют отклонения от нормальности, как правило, с использованием отклонений статистик (2.1) и (2.3) от значений, соответствующих нормальному закону. В [8] и [15], где приводятся полезные сведения о ряде критериев проверки отклонения от нормального закона, рассмотрена одномерная статистика на базе статистик (2.1) и (2.3)

$$E_p^a = \frac{n(\sqrt{\hat{\beta}_1})^2}{6} + \frac{n(\hat{\beta}_2 - 3)^2}{24} = \frac{n\left(\frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3}\right)^2}{6} + \frac{n\left(\frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} - 3\right)^2}{24}, \quad (2.7)$$

которая асимптотически подчиняется χ_2^2 -распределению. В качестве нормирующих коэффициентов в ней взяты первые члены асимптотических дисперсий асимптотически нормальных распределений статистик (2.1) и (2.3) [64]. В [26, 27] говорится об асимптотической оптимальности критерия при проверке нормальности регрессионных остатков. Критерий со статистикой (2.7) очень часто в источниках упоминается под именем авторов работ [26, 27].

Наши исследования распределений статистики (2.7) при различных объемах выборок показали, что они настолько плохо сходятся к асимптотическому предельному χ_2^2 -распределению, что последним обоснованно можно пользоваться лишь при объемах выборок, превышающих несколько тысяч наблюдений. Рис. 2.14 иллюстрирует сходимость распределения статистики (2.7) к предельному χ_2^2 -распределению в зависимости от объема выборок n в случае нормального закона (при справедливости H_0).

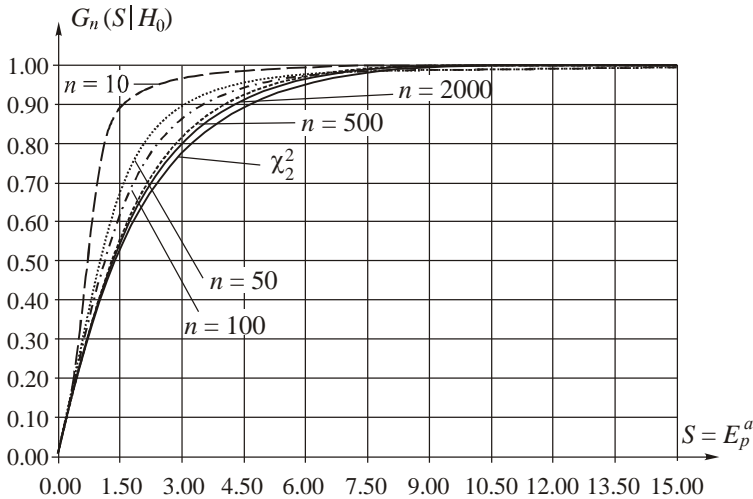


Рис. 2.14. Распределения статистики (2.7) при различных объемах выборок и асимптотически предельное χ_2^2 -распределение

А рис. 2.15 демонстрирует распределения статистики в зависимости от справедливости различных гипотез при объеме выборок $n = 10$.

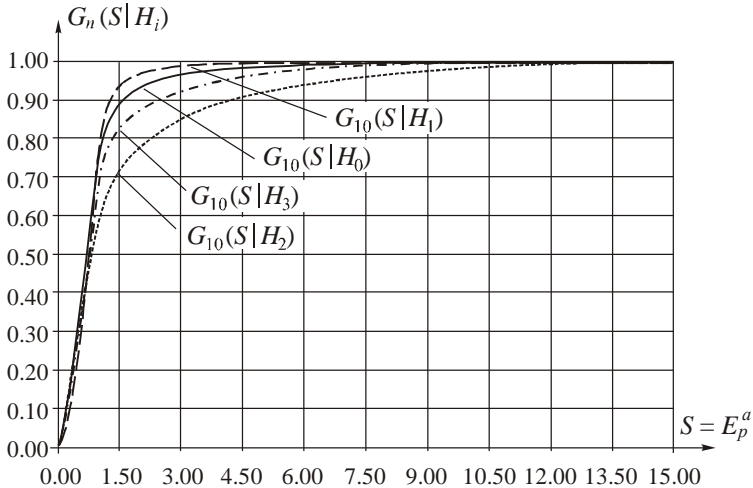


Рис. 2.15. Распределения статистики (2.7) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 10$

2.7. Модификация Д'Агостино критерия проверки на симметричность

В работе [11] предложена модификация критерия проверки симметричности. В такой модификации на основании следующих соотношений статистика (2.1) преобразуется в статистику z_1 , приближенно подчиняющуюся стандартному нормальному закону:

$$b = \frac{3(n^2 + 27n - 70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)}, \quad \omega^2 = -1 + \{2(b-1)\}^{1/2},$$

$$\delta = \frac{1}{\left\{ \log(\sqrt{\omega^2}) \right\}^{1/2}}, \quad y = \sqrt{\hat{\beta}_1} \left\{ \frac{\omega^2 - 1}{2} \frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)} \right\}^{1/2},$$

$$z_1 = \delta \log \left\{ y + (y^2 + 1)^{1/2} \right\}. \quad (2.8)$$

Исследования распределений статистики (2.8) при различных объемах выборок показали, что они очень хорошо согласуются со стандартным нормальным законом.

На рис. 2.16, 2.17 показаны условные функции распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.8) при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объеме выборок $n = 10$ и $n = 100$.

По мощности критерий со статистикой (2.8) идентичен критерию со статистикой (2.1), но он удобней, так как опирается на стандартное нормальное распределение.

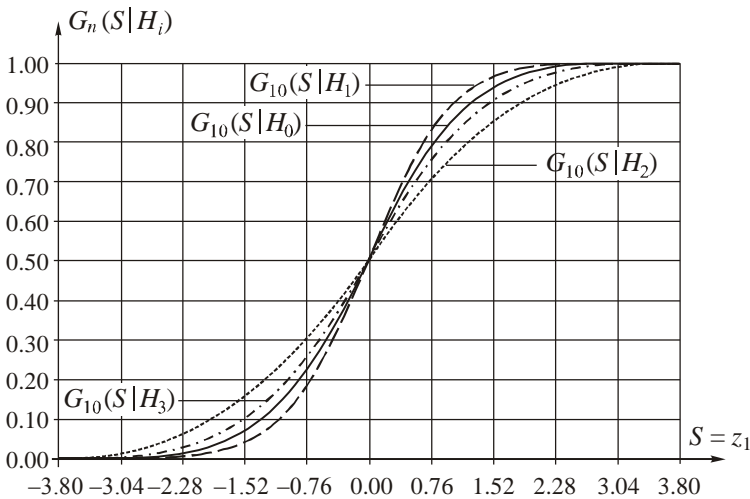


Рис. 2.16. Условные распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.8) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 10$

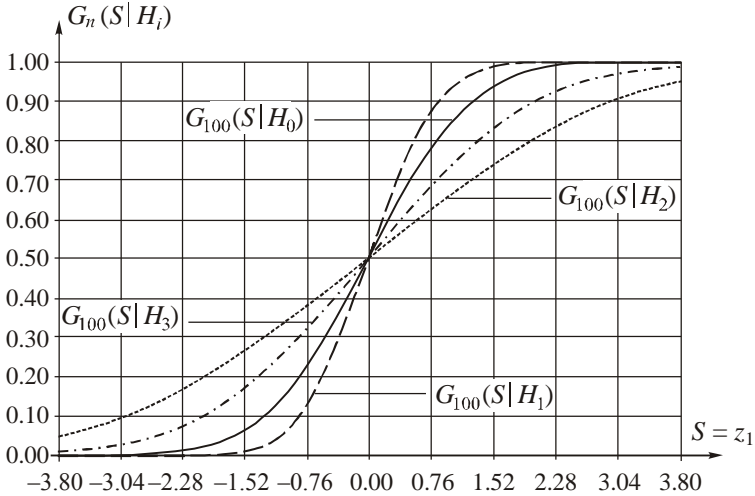


Рис. 2.17. Условные распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.8) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 100$

2.8. Модификация Д'Агостино критерия проверки на симметричность и значение эксцесса

В работе [10] предложено преобразование статистик (2.3) и (2.1) к статистике z_2 , приближенно распределенной в соответствии со стандартным нормальным законом, с помощью следующих соотношений:

$$\delta = (n-3)(n+1)(n^2 + 15n - 4),$$

$$a = \frac{(n-2)(n+5)(n+7)(n^2 + 27n - 70)}{6\delta},$$

$$c = \frac{(n-7)(n+5)(n+7)(n^2 + 2n - 5)}{6\delta},$$

$$k = \frac{(n+5)(n+7)(n^3 + 37n^2 + 11n - 313)}{12\delta},$$

$$\alpha = a + \beta_1 c, \quad \chi = (\hat{\beta}_2 - 1 - \hat{\beta}_1) 2k,$$

$$z_2 = \left\{ \left(\frac{\chi}{2\alpha} \right)^{1/3} - 1 + \frac{1}{9\alpha} \right\} (9\alpha)^{1/2}. \quad (2.9)$$

Исследования распределений статистики (2.9) при справедливой гипотезе H_0 и различных объемах выборок показали, что $G_n(z_2|H_0)$ достаточно хорошо согласуются со стандартным нормальным законом (несколько хуже, чем z_1 , но хорошо).

Критерий двусторонний: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется, если $z_2 < u_\alpha$ или $z_2 > u_{1-\alpha}$.

Исследование мощности критерия со статистикой (2.9) по отношению к конкурирующим гипотезам H_1, H_2, H_3 (и ряду других) показало, что данный критерий не обладает недостатком, свойственным критериям Шапиро-Уилка и Эппса-Палли по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 . По оценкам мощности относительно других конкурирующих гипотез при малых объемах выборок он практически не уступает критериям Шапиро-Уилка и Эппса-Палли.

На рис. 2.18 и 2.19 представлены условные функции распределения $G_n(S|H_i)$ статистики (2.9) при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объемах выборок $n = 10$ и $n = 100$. Рисунки позволяют судить о мощности критерия со статистикой (2.9).

Оценки мощности критерия относительно гипотез H_1, H_2, H_3 при различных объемах выборок представлены в табл. 2.7–2.9.

Достоинством критерия со статистикой (2.9) является возможность использовать в качестве предельного распределения стандартный нормальный закон. Статистика критерия учитывает отклонения от симметричности и от эксцесса нормального распределения.

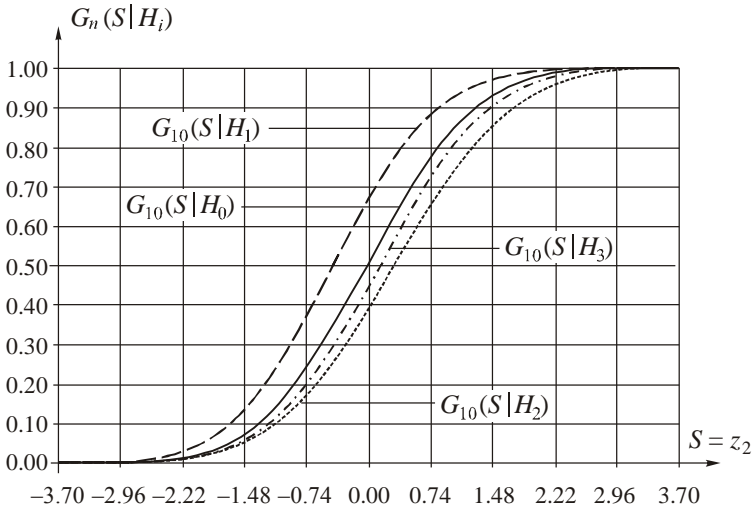


Рис. 2.18. Условные распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.9) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 10$

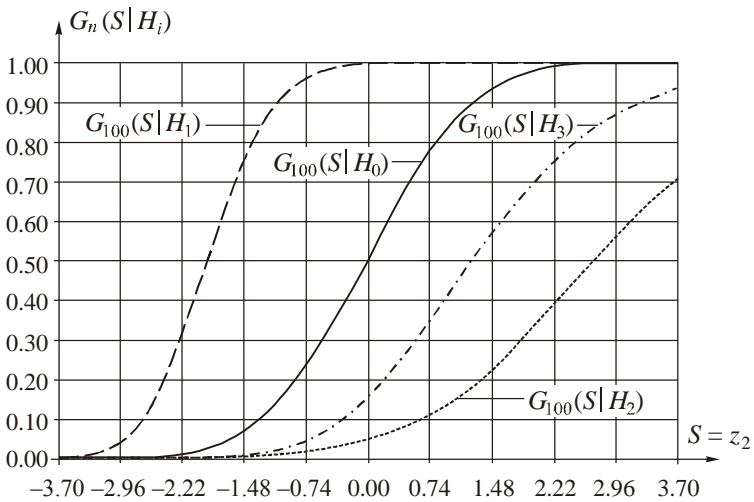


Рис. 2.19. Условные распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.9) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 100$

Таблица 2.7

**Мощность критерия со статистикой Z_2 относительно гипотезы H_1
(по отношению к распределению семейства (1.10) с параметром $\theta_2 = 4$)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.175	0.120	0.062	0.32	0.013
20	0.248	0.180	0.103	0.057	0.026
30	0.341	0.260	0.158	0.093	0.045
40	0.433	0.343	0.223	0.140	0.071
50	0.521	0.428	0.292	0.192	0.103
100	0.830	0.763	0.635	0.503	0.349
150	0.952	0.922	0.850	0.758	0.619
200	0.988	0.978	0.948	0.902	0.812
300	0.999	0.999	0.996	0.989	0.970

Таблица 2.8

**Мощность критерия со статистикой Z_2 относительно гипотезы H_2
(по отношению к распределению Лапласа)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.213	0.156	0.092	0.055	0.027
20	0.326	0.259	0.176	0.118	0.071
30	0.415	0.345	0.250	0.181	0.117
40	0.493	0.421	0.319	0.240	0.164
50	0.560	0.489	0.385	0.299	0.210
100	0.796	0.745	0.654	0.565	0.455
150	0.910	0.881	0.824	0.757	0.661
200	0.961	0.947	0.915	0.873	0.805
300	0.993	0.990	0.982	0.971	0.947

Таблица 2.9

**Мощность критерия со статистикой Z_2 относительно гипотезы H_3
(по отношению к логистическому закону)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.164	0.112	0.058	0.031	0.013
20	0.203	0.145	0.083	0.048	0.023
30	0.238	0.178	0.109	0.067	0.035
40	0.273	0.210	0.134	0.086	0.048
50	0.307	0.241	0.160	0.106	0.061
100	0.459	0.387	0.286	0.212	0.140
150	0.585	0.513	0.407	0.316	0.223
200	0.683	0.617	0.511	0.414	0.308
300	0.820	0.770	0.679	0.588	0.475

При малых n и близких альтернативах критерий не уступает по мощности критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Палли. В отличие от критериев Шапиро–Уилка и Эппса–Палли *данный критерий способен успешно отличать от нормального закона распределения семейства (1.10) с более плосковершинными* по сравнению с нормальным законом плотностями.

2.9. Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса Д’Агостино

В [10] на базе статистик z_1 и z_2 рассмотрена одномерная статистика вида

$$E_p = z_1^2 + z_2^2, \quad (2.10)$$

приближенно распределенная как χ_2^2 -распределение. Критерий правосторонний: проверяемая гипотеза о нормальности отклоняется при больших значениях статистики (2.10).

Исследование распределений данной статистики показало, что в отличие от статистики (2.7) распределение статистики (2.10) очень хорошо согласуется с χ^2_2 -распределением уже при достаточно малых n .

Значения мощности критерия относительно гипотез H_1 , H_2 , H_3 при различных объемах выборок представлены в табл. 2.10–2.12.

По отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3 критерий не уступает по мощности критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Палли. Однако недостаток, свойственный этим критериям, у него выражен даже более ярко: при малых n вследствие смещенности данный критерий не позволяет надежно различать гипотезы H_1 и H_0 (см. рис. 2.20, 2.21 и табл. 2.10).

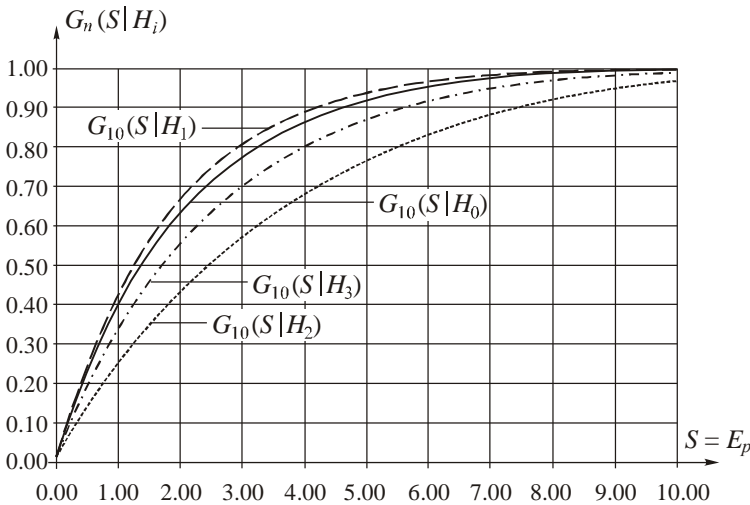


Рис. 2.20. Условные распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.10) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 10$

На рис. 2.20 и по табл. 2.10 особенно заметно, что закон распределения, соответствующий гипотезе H_1 , при объеме выборки

$n = 10$ данным критерием будет признан «более нормальным», чем нормальный закон.

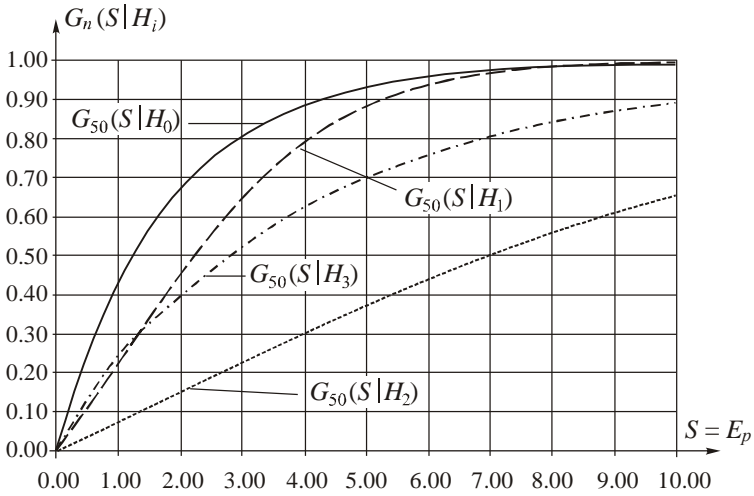


Рис. 2.21. Условные распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.10) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 50$

Таблица 2.10

Значения мощности критерия относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.119	0.076	0.036	0.018	0.008
20	0.122	0.072	0.028	0.011	0.003
30	0.156	0.093	0.035	0.012	0.003
40	0.203	0.124	0.048	0.016	0.004
50	0.258	0.164	0.067	0.023	0.05
100	0.572	0.436	0.239	0.109	0.028
150	0.809	0.704	0.495	0.294	0.110
200	0.929	0.872	0.723	0.528	0.271
300	0.993	0.984	0.948	0.869	0.686

Таблица 2.11

Значения мощности критерия относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.342	0.271	0.179	0.114	0.061
20	0.495	0.421	0.315	0.233	0.153
30	0.595	0.523	0.414	0.322	0.227
40	0.673	0.605	0.496	0.400	0.295
50	0.732	0.671	0.568	0.471	0.358
100	0.905	0.871	0.805	0.732	0.627
150	0.968	0.952	0.919	0.875	0.805
200	0.989	0.983	0.968	0.946	0.905
300	0.999	0.998	0.996	0.991	0.982

Таблица 2.12

Значения мощности критерия относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.218	0.158	0.090	0.050	0.023
20	0.288	0.224	0.145	0.093	0.051
30	0.339	0.272	0.186	0.126	0.075
40	0.381	0.312	0.222	0.156	0.098
50	0.417	0.347	0.254	0.184	0.118
100	0.554	0.485	0.384	0.302	0.216
150	0.656	0.592	0.492	0.405	0.308
200	0.733	0.676	0.583	0.496	0.393
300	0.842	0.800	0.725	0.648	0.550

2.10. Критерий Фросини

Статистика критерия Фросини [18, 19] имеет вид

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left| \Phi(z_i) - \frac{i-0.5}{n} \right|, \quad (2.11)$$

где элементы выборки x_i , $i = \overline{1, n}$, упорядочены по возрастанию;

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}; \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2;$$

$\Phi(z_i)$ – функция распределения стандартного нормального закона $N(0,1)$.

Применение критерия несколько осложняется тем, что условные распределения $G(B_n | H_0)$ статистики критерия Фросини при справедливости проверяемой гипотезы H_0 зависят от объемов выборок n . Характер этой зависимости иллюстрирует рис. 2.22.

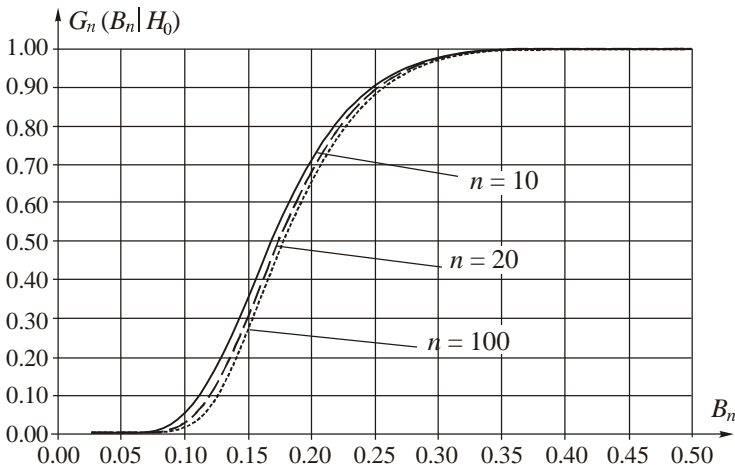


Рис. 2.22. Зависимость распределения $G(B_n | H_0)$ статистики B_n от объема выборки

С ростом n распределения $G(B_n|H_0)$ статистики смещаются вправо, однако достаточно быстро сходятся к некоторому предельному распределению. При объемах выборок $n > 100$ распределения статистики уже существенно не меняются.

Полученная в [19] таблица процентных точек для распределений статистики Фросини наиболее доступна в [72]. Критерий правосторонний: гипотеза о принадлежности выборки нормальному закону отклоняется при больших значениях статистики. В табл. 2.13 представлены значения процентных точек для статистики критерия Фросини, полученные в работе [88] и расширяющие таблицы, приводимые в [19, 72], на большие значения объемов выборок n .

Таблица 2.13

Процентные точки для статистик критерия Фросини

n	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	0.233	0.250	0.277	0.302	0.332
20	0.237	0.255	0.283	0.308	0.338
30	0.239	0.257	0.284	0.310	0.342
40	0.239	0.257	0.285	0.310	0.342
50	0.240	0.258	0.285	0.312	0.342
60	0.241	0.258	0.286	0.312	0.343
80	0.241	0.258	0.286	0.312	0.344
100	0.241	0.258	0.286	0.312	0.344
150	0.241	0.259	0.287	0.313	0.345
200	0.241	0.259	0.287	0.313	0.345
300	0.242	0.259	0.288	0.314	0.345
1000	0.242	0.260	0.2875	0.313	0.345

В качестве модели предельного закона для распределения статистики Фросини можно использовать бета-распределение III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{B(\theta_0, \theta_1)} \frac{t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1}}{[1 + (\theta_2 - 1)t]^{\theta_0 + \theta_1}},$$

где $t = (x - \theta_4) / \theta_3 \in [0, 1]$, при значениях параметров $\theta_0 = 4.923$, $\theta_1 = 13.2152$, $\theta_2 = 3.0715$, $\theta_3 = 1$, $\theta_4 = 0.076$. Отличием действительного распределения статистики (2.11) от предложенной модели предельного закона можно практически пренебречь при $n > 50$.

На рис. 2.23 приведены графики распределения статистики B_n при справедливости различных гипотез (при различных наблюдаемых законах) для объемов выборок $n = 10$, которые позволяют судить о мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез. Оценки мощности критерия Фросини относительно конкурирующей гипотезы H_1 приведены в табл. 2.14, а мощности критерия по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 2.15 и 2.16 соответственно.

У критерия Фросини отсутствует недостаток, свойственный при малых n ($n \leq 20$) критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Палли по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 [84].

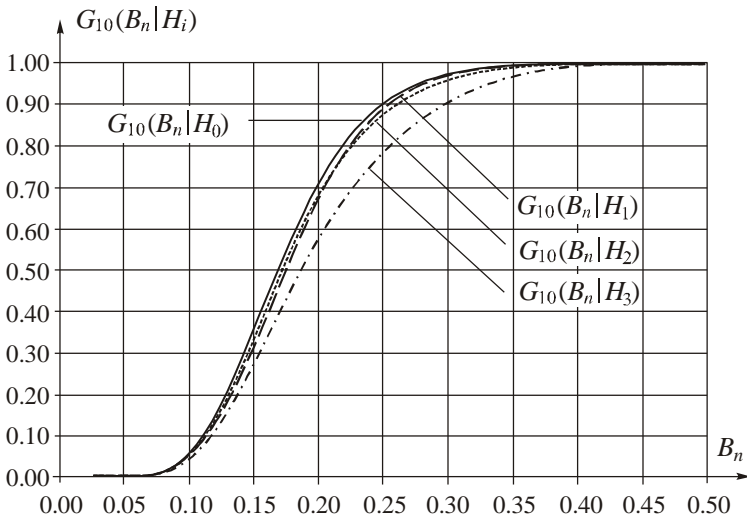


Рис. 2.23. Условные распределения $G(B_n | H_i)$ статистики B_n при объеме выборок $n = 10$

Таблица 2.14

**Значения мощности критерия Фросини
относительно гипотезы H_1**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.175	0.116	0.057	0.027	0.010
20	0.222	0.155	0.080	0.040	0.015
30	0.272	0.196	0.108	0.057	0.024
40	0.324	0.240	0.139	0.077	0.033
50	0.374	0.285	0.173	0.100	0.046
100	0.601	0.505	0.360	0.243	0.138
150	0.767	0.687	0.546	0.416	0.270
200	0.874	0.816	0.701	0.576	0.418
300	0.968	0.946	0.892	0.817	0.694

Таблица 2.15

**Значения мощности критерия Фросини
относительно гипотезы H_2**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.278	0.216	0.141	0.093	0.053
20	0.406	0.336	0.242	0.175	0.113
30	0.515	0.443	0.340	0.259	0.179
40	0.610	0.539	0.432	0.341	0.247
50	0.689	0.623	0.518	0.424	0.319
100	0.910	0.878	0.816	0.744	0.648
150	0.978	0.967	0.941	0.908	0.850
200	0.995	0.992	0.983	0.970	0.945
300	1.000	1.000	0.999	0.998	0.995

Таблица 2.16

**Значения мощности критерия Фросини
относительно гипотезы H_3**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.183	0.129	0.073	0.041	0.020
20	0.211	0.154	0.091	0.055	0.028
30	0.235	0.175	0.107	0.066	0.035
40	0.256	0.194	0.121	0.075	0.041
50	0.277	0.212	0.135	0.086	0.048
100	0.374	0.300	0.205	0.139	0.083
150	0.461	0.384	0.276	0.197	0.123
200	0.542	0.463	0.348	0.257	0.168
300	0.675	0.601	0.483	0.381	0.271

В то же время можно заметить, что критерий Фросини обладает не очень высокой мощностью и, в частности, уступает по мощности критериям согласия Андерсона–Дарлингга и типа χ^2 Никулина.

2.11. Критерии Хегази–Грина

Хегази и Грин в [24] предложили критерии со статистиками

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |z_i - \eta_i|, \quad (2.12)$$

$$T_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{z_i - \eta_i\}^2, \quad (2.13)$$

где $z_i = \frac{x^{(i)} - \bar{x}}{s}$; $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$; $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$; η_i – математическое ожидание i -й порядковой статистики стандартного нор-

мального закона, которое можно найти из соотношения $\eta_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистик. Подчеркнем, что в статистике должна использоваться именно несмещенная оценка дисперсии, это не учтено в [72].

Распределения этих статистик очень сильно зависят от объема выборки. Например, зависимость условных распределений $G(T_1|H_0)$ статистики T_1 от n иллюстрирует рис. 2.24.

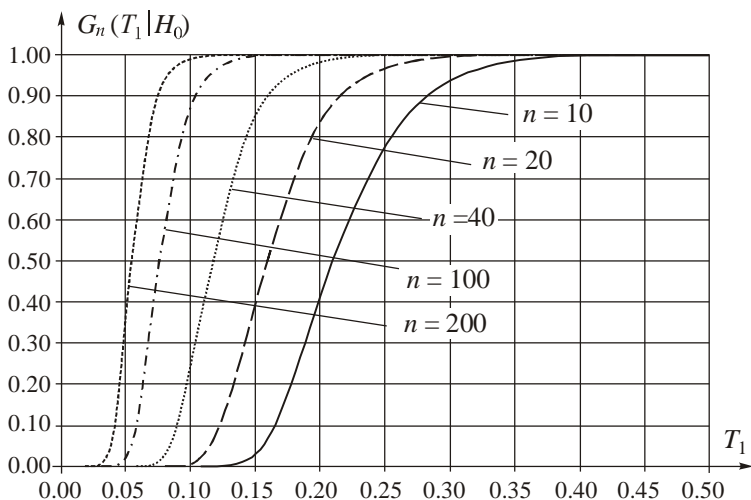


Рис. 2.24. Зависимость распределений статистики T_1 от объема выборки

Таблицы процентных точек для данных критериев при некоторых объемах выборок приводятся в [24, 72].

В табл. 2.17 представлены процентные точки для статистик T_1 и T_2 критерия Хегази–Грина, полученные в работе [88] и расширяющие таблицы, приведенные в [24, 72].

На рис. 2.25 показаны условные функции распределения $G(T_1|H_i)$ статистики T_1 при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объемах выборок $n=10$. При $n=10$ и $n=20$ критерий практически не

различает гипотезы H_0 и H_1 (аналогично критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Палли он оказывается смещенным). Но уже при $n \geq 30$ для всех задаваемых уровней значимости α критерий способен различать эти конкурирующие гипотезы.

На рис. 2.26 приведены условные функции распределения $G(T_2 | H_i)$ статистики T_2 при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 и объемах выборок $n=10$. Как видим, относительно конкурирующей гипотезы H_1 этот критерий также оказывается смещенным. Распределение $G(T_2 | H_1)$ смещено влево относительно распределения $G(T_2 | H_0)$ и, следовательно, при справедливости H_1 критерий с большей уверенностью признает истинность H_0 .

Таблица 2.17

Процентные точки для статистик T_1 и T_2 критерия Хегази–Грина

n	$1-\alpha$									
	T_1					T_2				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	0.268	0.285	0.312	0.338	0.370	0.112	0.127	0.153	0.180	0.216
20	0.205	0.218	0.239	0.259	0.284	0.072	0.082	0.100	0.118	0.143
30	0.172	0.183	0.201	0.218	0.239	0.054	0.061	0.074	0.088	0.107
40	0.151	0.161	0.177	0.191	0.210	0.043	0.049	0.060	0.070	0.085
50	0.136	0.146	0.160	0.173	0.190	0.036	0.041	0.050	0.059	0.071
60	0.126	0.134	0.147	0.159	0.174	0.031	0.035	0.043	0.050	0.061
80	0.110	0.117	0.128	0.139	0.152	0.024	0.028	0.033	0.039	0.047
100	0.099	0.105	0.115	0.125	0.137	0.020	0.023	0.028	0.032	0.039
150	0.082	0.087	0.095	0.103	0.113	0.014	0.016	0.019	0.023	0.027
200	0.071	0.075	0.083	0.090	0.098	0.011	0.012	0.015	0.017	0.021
300	0.058	0.062	0.068	0.073	0.080	0.008	0.009	0.010	0.012	0.014

Полученные оценки мощности критериев Хегази–Грина относительно рассмотренных конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 приведены в табл. 2.18–2.120.

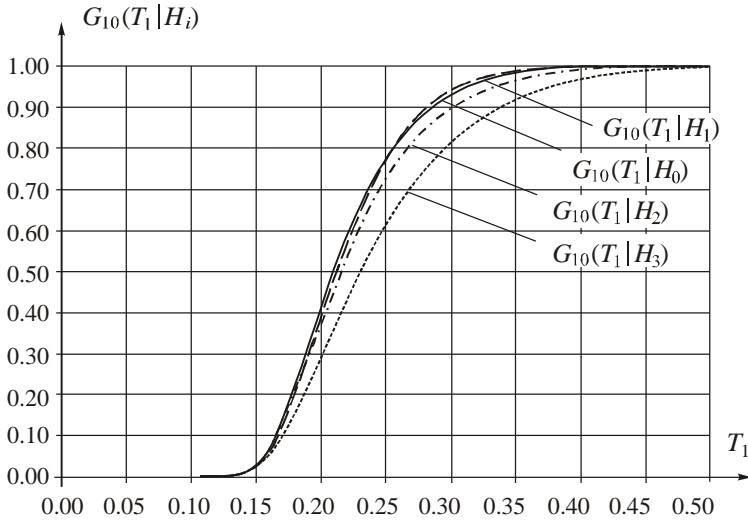


Рис. 2.25. Условные распределения $G_n(T_1 | H_i)$ статистики T_1 и справедливости гипотез при объеме выборок $n = 10$

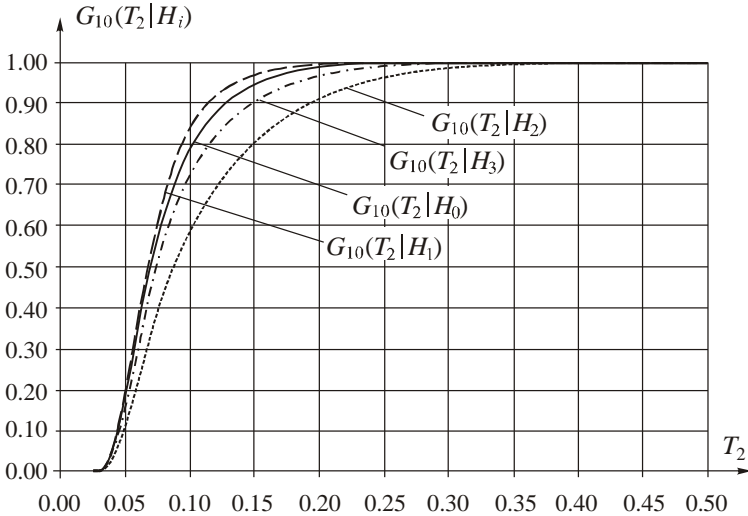


Рис. 2.26. Условные распределения $G_n(T_2 | H_i)$ статистики T_2 и справедливости гипотез при объеме выборок $n = 10$

Таблица 2.18

Значения мощности критериев Хегази–Грина относительно гипотезы H_1

n	α									
	T_1					T_2				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.148	0.095	0.043	0.019	0.007	0.110	0.067	0.028	0.012	0.004
20	0.172	0.112	0.052	0.023	0.008	0.085	0.046	0.016	0.006	0.001
30	0.209	0.140	0.068	0.032	0.011	0.084	0.044	0.014	0.004	0.001
40	0.253	0.176	0.090	0.044	0.016	0.095	0.050	0.016	0.005	0.001
50	0.302	0.218	0.118	0.060	0.023	0.113	0.061	0.020	0.006	0.001
60	0.352	0.261	0.148	0.079	0.032	0.137	0.077	0.026	0.008	0.001
80	0.455	0.356	0.221	0.129	0.058	0.198	0.119	0.045	0.015	0.003
100	0.552	0.450	0.302	0.191	0.096	0.271	0.175	0.075	0.028	0.006
150	0.751	0.665	0.517	0.378	0.229	0.484	0.360	0.195	0.094	0.030
200	0.877	0.818	0.700	0.570	0.402	0.680	0.562	0.370	0.219	0.093
300	0.976	0.959	0.912	0.843	0.723	0.913	0.854	0.720	0.561	0.352

Таблица 2.19

Значения мощности критериев Хегази–Грина относительно гипотезы H_2

n	α									
	T_1					T_2				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.307	0.242	0.161	0.106	0.060	0.347	0.277	0.185	0.123	0.071
20	0.454	0.382	0.282	0.207	0.135	0.517	0.441	0.332	0.247	0.165
30	0.569	0.496	0.390	0.302	0.213	0.632	0.559	0.447	0.350	0.251
40	0.661	0.594	0.486	0.392	0.290	0.718	0.651	0.542	0.443	0.332
50	0.736	0.674	0.572	0.478	0.368	0.782	0.723	0.622	0.525	0.410
60	0.793	0.740	0.646	0.554	0.441	0.832	0.781	0.688	0.596	0.480
80	0.877	0.838	0.764	0.685	0.580	0.900	0.863	0.791	0.712	0.605
100	0.928	0.901	0.846	0.783	0.693	0.941	0.915	0.862	0.799	0.705
150	0.983	0.974	0.953	0.924	0.875	0.985	0.976	0.954	0.923	0.870
200	0.996	0.994	0.987	0.976	0.955	0.996	0.993	0.986	0.973	0.948
300	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996	1.000	1.000	0.999	0.997	0.993

Значения мощности критериев Хегази–Грина относительно гипотезы H_3

n	α									
	T_1					T_2				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.197	0.141	0.081	0.047	0.022	0.219	0.160	0.093	0.055	0.027
20	0.241	0.180	0.111	0.068	0.036	0.291	0.225	0.146	0.095	0.053
30	0.277	0.212	0.136	0.087	0.048	0.346	0.277	0.189	0.128	0.077
40	0.307	0.240	0.158	0.103	0.059	0.393	0.321	0.225	0.158	0.099
50	0.336	0.267	0.179	0.120	0.070	0.433	0.359	0.260	0.187	0.121
60	0.362	0.291	0.198	0.135	0.081	0.469	0.394	0.290	0.213	0.140
80	0.411	0.337	0.238	0.167	0.104	0.530	0.455	0.347	0.262	0.181
100	0.456	0.380	0.275	0.198	0.127	0.581	0.508	0.399	0.310	0.218
150	0.554	0.478	0.366	0.276	0.185	0.685	0.917	0.509	0.423	0.310
200	0.638	0.564	0.451	0.352	0.249	0.760	0.699	0.598	0.504	0.394
300	0.765	0.703	0.597	0.497	0.380	0.861	0.817	0.736	0.653	0.544

Оба критерия Хегази–Грина демонстрируют более высокую мощность по сравнению с критериями Шапиро–Уилка и Эппса–Палли относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 . Однако по отношению к гипотезам типа H_1 при малых объемах выборок оба критерия также оказываются смещенными, особенно критерий со статистикой T_2 (смещение даже больше, чем у критериев Шапиро–Уилка и Эппса–Палли).

2.12. Критерий Гири

Гири в работах [20, 21, 22] рассмотрел критерий проверки отклонения от нормального закона, основанный на статистике

$$d = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|, \quad (2.14)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Критерий является двусторонним, и гипотеза о нормальности не отклоняется, если $d_{\alpha/2} \leq d \leq d_{1-\alpha/2}$.

Зависимость условных распределений $G(d|H_0)$ статистики (2.14) от n иллюстрирует рис. 2.27.

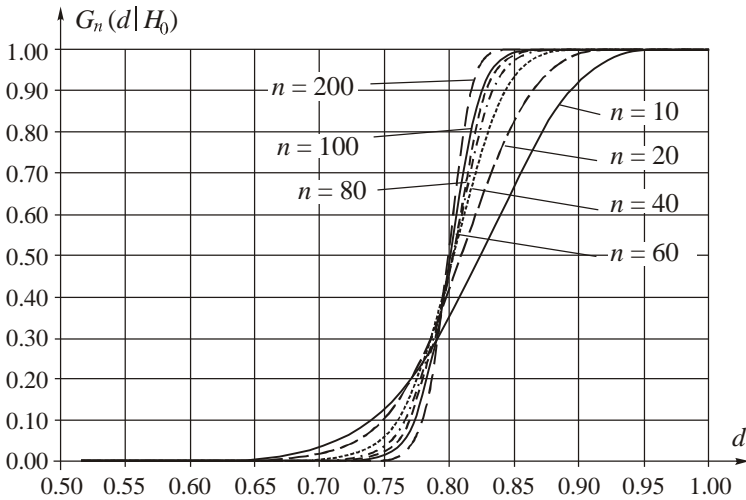


Рис. 2.27. Зависимость распределений статистики d от объема выборки

Автор критерия утверждает, что статистика критерия при $n \geq 50$ распределена асимптотически нормально. Выражения для математического ожидания и дисперсии асимптотического закона представлены, например, в [72]. Однако на самом деле распределения статистики асимметричны и плохо аппроксимируются нормальным законом, тем более, с указанными в [72] параметрами.

Таблицы процентных точек для некоторых объемов выборок приводятся в [21].

В табл. 2.21 представлены процентные точки $d_{\alpha/2}$ и $d_{1-\alpha/2}$ статистики критерия Гири, полученные в работе [88]. Эти результаты расширяют область применения критерия.

На рис. 2.28 показаны условные функции распределения $G(d|H_i)$ статистики d при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объеме выборки $n=10$. Проверяемая гипотеза отклоняется при значениях статистики, меньших $d_{\alpha/2}$ и больших $d_{1-\alpha/2}$.

Полученные значения оценок мощности относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 представлены в табл. 2.22–2.24. Критерий Гире с простой статистикой (2.14) достаточно уверенно демонстрирует высокую мощность по отношению к различным конкурирующим гипотезам.

Таблица 2.21

Процентные точки для статистики d критерия Гире

n	α									
	0.15		0.10		0.05		0.025		0.01	
	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$
10	0.729	0.902	0.715	0.911	0.691	0.924	0.670	0.935	0.644	0.948
20	0.741	0.870	0.730	0.878	0.713	0.889	0.697	0.899	0.678	0.910
30	0.749	0.857	0.740	0.863	0.726	0.873	0.713	0.881	0.697	0.891
40	0.754	0.848	0.747	0.854	0.735	0.863	0.724	0.871	0.710	0.879
50	0.758	0.843	0.752	0.848	0.741	0.856	0.731	0.863	0.719	0.871
60	0.761	0.839	0.755	0.844	0.746	0.851	0.737	0.858	0.726	0.865
80	0.766	0.833	0.761	0.838	0.752	0.844	0.745	0.850	0.736	0.857
100	0.769	0.829	0.764	0.833	0.757	0.839	0.750	0.845	0.742	0.851
150	0.774	0.824	0.770	0.827	0.764	0.832	0.759	0.836	0.753	0.841
200	0.777	0.820	0.774	0.823	0.769	0.827	0.764	0.831	0.759	0.836
300	0.781	0.816	0.778	0.818	0.774	0.822	0.770	0.825	0.766	0.829

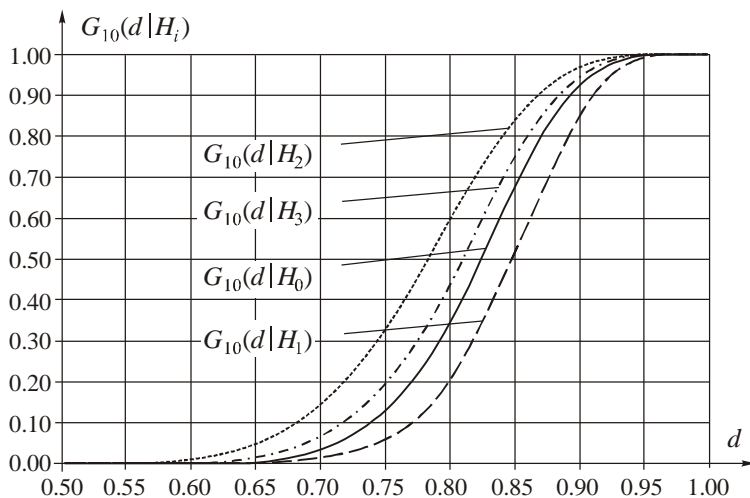


Рис. 2.28. Условные распределения $G_n(d|H_i)$ статистики d критерия Гири при справедливости различных гипотез и объеме выборок $n = 10$

Таблица 2.22

Значения мощности критерия Гири относительно конкурирующей гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.174	0.120	0.064	0.034	0.014
20	0.247	0.181	0.105	0.061	0.029
30	0.329	0.253	0.158	0.097	0.050
40	0.409	0.326	0.215	0.138	0.075
50	0.480	0.394	0.273	0.182	0.103
60	0.546	0.457	0.328	0.228	0.136
80	0.662	0.577	0.441	0.328	0.211
100	0.750	0.674	0.544	0.424	0.294
150	0.888	0.840	0.742	0.635	0.496
200	0.953	0.927	0.866	0.790	0.669
300	0.992	0.987	0.969	0.941	0.885

Таблица 2.23

Значения мощности критерия Гири относительно конкурирующей гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.267	0.204	0.130	0.082	0.043
20	0.442	0.371	0.274	0.201	0.132
30	0.583	0.513	0.408	0.321	0.229
40	0.694	0.630	0.528	0.435	0.330
50	0.776	0.722	0.628	0.535	0.425
60	0.838	0.792	0.709	0.625	0.519
80	0.917	0.888	0.829	0.764	0.671
100	0.958	0.940	0.902	0.855	0.784
150	0.993	0.988	0.978	0.963	0.934
200	0.999	0.998	0.996	0.992	0.983
300	1	1	1	1	0.999

Таблица 2.24

Значения мощности критерия Гири относительно конкурирующей гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.182	0.127	0.069	0.038	0.017
20	0.227	0.169	0.103	0.063	0.033
30	0.267	0.205	0.132	0.086	0.049
40	0.305	0.240	0.161	0.108	0.064
50	0.338	0.272	0.188	0.129	0.079
60	0.372	0.303	0.214	0.151	0.096
80	0.431	0.361	0.266	0.195	0.128
100	0.486	0.415	0.313	0.235	0.160
150	0.602	0.532	0.426	0.337	0.243
200	0.695	0.631	0.527	0.433	0.329
300	0.822	0.773	0.684	0.598	0.486

Основной проблемой, ограничивающей применение критерия Гири на практике, является необходимость опираться на таблицы процентных точек.

2.13. Критерий Дэвида–Хартли–Пирсона

В критерии Дэвида–Хартли–Пирсона [12] рассматривается отношение размаха выборки к выборочному стандартному отклонению, и его статистика имеет вид

$$U = \frac{R}{s}, \quad (2.15)$$

где $R = x_{\max} - x_{\min}$ – размах выборки; $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ –

несмещенная оценка дисперсии.

Рис. 2.29 иллюстрирует зависимость распределений статистики U от объема выборки при справедливости проверяемой гипотезы.

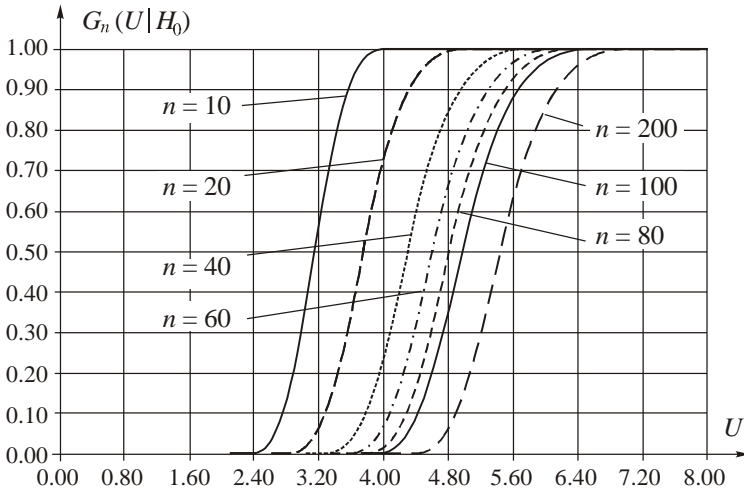


Рис. 2.29. Зависимость распределений статистики U от объема выборки

Критерий двусторонний: гипотеза о нормальности распределения отвергается, если $U < U_{\alpha/2}$ или $U > U_{1-\alpha/2}$. В табл. 2.25 приведены процентные точки критерия.

На рис. 2.30 показаны условные распределения $G(U|H_i)$ статистики U при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 и объемах выборок $n = 10$.

Таблица 2.25

Процентные точки для статистики U критерия Дэвида–Хартли–Пирсона

n	0.15		0.1		0.05		0.025		0.01	
	$\alpha/2$	$1-\alpha/2$	$\alpha/2$	$1-\alpha/2$	$\alpha/2$	$1-\alpha/2$	$\alpha/2$	$1-\alpha/2$	$\alpha/2$	$1-\alpha/2$
10	2.723	3.624	2.670	3.686	2.593	3.778	2.530	3.854	2.458	3.936
20	3.240	4.392	3.178	4.488	3.087	4.633	3.012	4.763	2.927	4.915
30	3.535	4.787	3.469	4.896	3.374	5.066	3.293	5.217	3.203	5.400
40	3.741	5.046	3.674	5.162	3.574	5.345	3.493	5.507	3.401	5.708
50	3.900	5.236	3.831	5.356	3.729	5.546	3.644	5.720	3.550	5.929
60	4.028	5.384	3.958	5.508	3.856	5.704	3.769	5.886	3.674	6.106
80	4.230	5.607	4.158	5.735	4.054	5.937	3.967	6.124	3.870	6.354
100	4.382	5.774	4.311	5.905	4.206	6.112	4.117	6.302	4.018	6.536
150	4.656	6.059	4.583	6.191	4.477	6.405	4.388	6.600	4.288	6.838
200	4.847	6.255	4.774	6.388	4.668	6.600	4.578	6.799	4.474	7.044
300	5.111	6.512	5.037	6.645	4.931	6.858	4.841	7.056	4.741	7.303

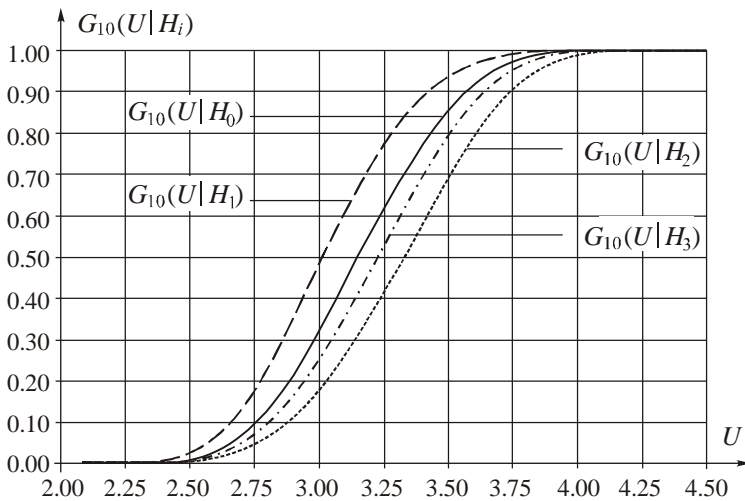


Рис. 2.30. Условные распределения $G(U|H_i)$ статистики U при справедливости различных гипотез и объемах выборок $n=10$

Полученные оценки мощности для рассматриваемых конкурирующих гипотез приведены в табл. 2.26–2.28. Мощность критерия относительно H_1 практически совпадает с мощностью критерия Гири, однако он существенно уступает последнему по отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3 .

Таблица 2.26

**Значения мощности критерия Дэвида–Хартли–Пирсона
относительно конкурирующей гипотезы H_1**

n	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.176	0.121	0.064	0.034	0.014
20	0.251	0.185	0.107	0.061	0.028
30	0.338	0.259	0.162	0.098	0.049
40	0.417	0.332	0.217	0.140	0.075
50	0.488	0.400	0.273	0.181	0.101
60	0.552	0.461	0.327	0.224	0.132
80	0.658	0.569	0.428	0.314	0.199
100	0.734	0.655	0.519	0.396	0.264
150	0.856	0.798	0.685	0.569	0.424
200	0.919	0.878	0.793	0.694	0.554
300	0.971	0.952	0.906	0.844	0.744

Таблица 2.27

**Значения мощности критерия Дэвида–Хартли–Пирсона
относительно конкурирующей гипотезы H_2**

n	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.218	0.157	0.091	0.052	0.026
20	0.357	0.289	0.199	0.134	0.078

30	0.444	0.375	0.278	0.205	0.135
40	0.513	0.443	0.342	0.263	0.183
50	0.568	0.499	0.396	0.310	0.224
60	0.615	0.546	0.441	0.352	0.259
80	0.688	0.623	0.518	0.427	0.325
100	0.741	0.680	0.579	0.486	0.380
150	0.832	0.781	0.690	0.601	0.493
200	0.884	0.842	0.764	0.682	0.574
300	0.940	0.913	0.857	0.790	0.695

Таблица 2.28

**Значения мощности критерия Дэвида–Хартли–Пирсона
относительно конкурирующей гипотезы H_3**

n	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.168	0.114	0.059	0.031	0.013
20	0.220	0.161	0.094	0.054	0.026
30	0.258	0.197	0.124	0.079	0.043
40	0.291	0.228	0.150	0.101	0.059
50	0.319	0.255	0.174	0.119	0.073
60	0.345	0.279	0.194	0.135	0.084
80	0.391	0.322	0.232	0.167	0.108
100	0.429	0.359	0.264	0.195	0.130
150	0.508	0.436	0.334	0.255	0.178
200	0.566	0.494	0.390	0.304	0.217
300	0.656	0.587	0.479	0.387	0.287

В целом на основании анализа мощности относительно различных конкурирующих гипотез можно констатировать, что критерий Дэвида–Хартли–Пирсона по оценкам мощности уступает остальным рассмотренным в [88] критериям.

2.14. Критерий Шпигельхальтера

Статистика этого критерия [51] базируется на комбинации статистик критериев Гири [20] и Дэвида, Хартли и Пирсона [12] и имеет вид

$$T' = \left\{ (C_n U)^{-(n-1)} + g^{-(n-1)} \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (2.16)$$

где $C_n = \frac{1}{2n} (n!)^{\frac{1}{n-1}}$; U – статистика (2.15) критерия Дэвида–Хартли–

Пирсона; $g = \frac{d}{\sqrt{(n-1)/n}}$; d – статистика (2.14) критерия Гири.

Проверяемая гипотеза о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону по критерию Шпигельхальтера отклоняется при больших значениях статистики T' .

Значения процентных точек для статистики T' критерия Шпигельхальтера, полученные в результате моделирования, приведены в табл. 2.29.

Зависимость распределения статистики T' от объема выборки в случае справедливости проверяемой гипотезы иллюстрирует рис. 2.31.

Однако данный критерий **имеет очень существенный недостаток**: критерий со статистикой (2.16) способен отличить от нормального закона далеко не все конкурирующие распределения. В частности, это касается конкурирующей гипотезы H_1 .

Мощность любого корректно построенного критерия должна увеличиваться с ростом n . В принципе, так и происходит с мощностью критерия Шпигельхальтера по отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3 .

Совсем другая картина наблюдается относительно гипотезы H_1 . На рис. 2.32–2.34 показаны условные функции распределения $G(T' | H_i)$ статистики T' при справедливости гипотез H_0 , H_1 , H_2 , H_3 и объемах выборок $n = 10, 50, 300$.

Процентные точки для статистики T' критерия Шпигельхальтера

n	α				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	1.323	1.344	1.380	1.416	1.460
20	1.311	1.331	1.365	1.396	1.435
30	1.301	1.318	1.346	1.373	1.407
40	1.293	1.308	1.332	1.355	1.383
50	1.288	1.302	1.323	1.342	1.366
60	1.285	1.297	1.316	1.334	1.355
80	1.281	1.292	1.308	1.322	1.340
100	1.279	1.288	1.302	1.314	1.329
150	1.275	1.283	1.294	1.304	1.315
200	1.273	1.279	1.289	1.297	1.308
300	1.270	1.275	1.283	1.290	1.298

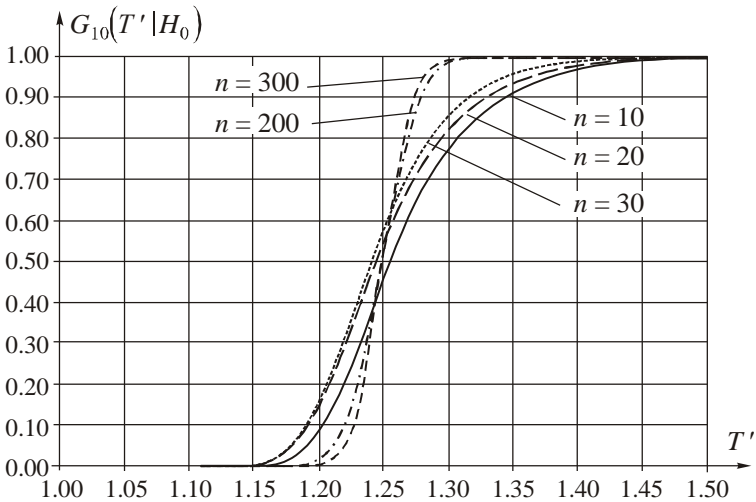


Рис. 2.31. Зависимость распределения статистики T' от объема выборки в случае нормального закона

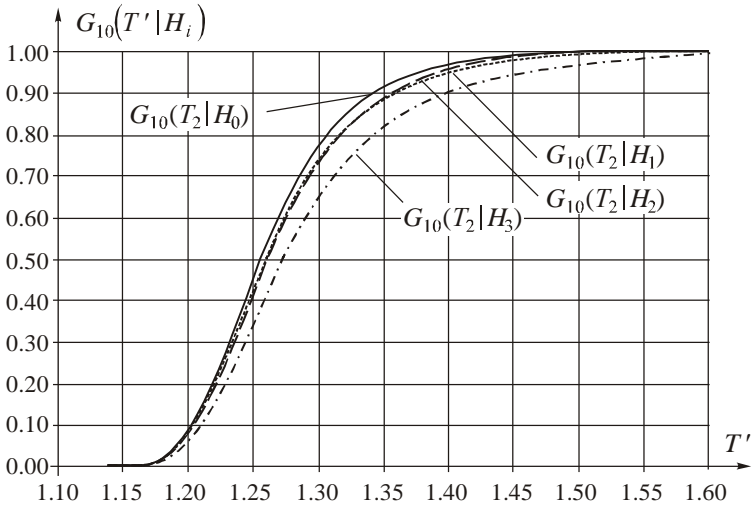


Рис. 2.32. Условные распределения $G(T' | H_i)$ статистики T' при объеме выборок $n = 10$

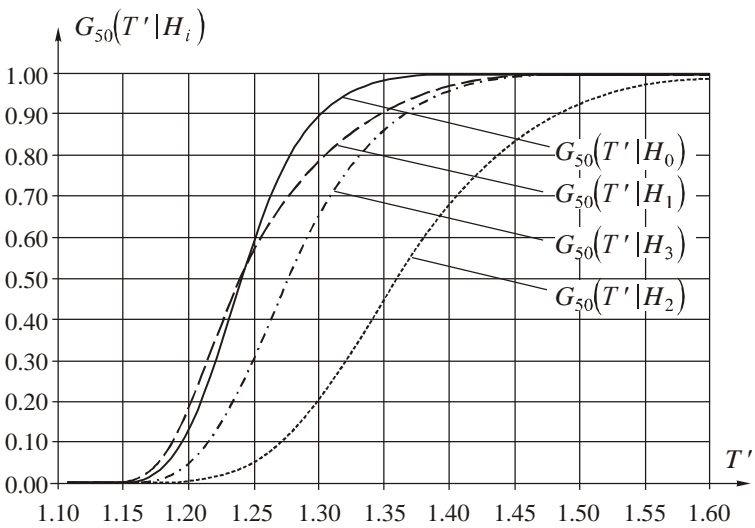


Рис. 2.33. Условные распределения $G(S | H_i)$ статистики T' при объеме выборок $n = 50$

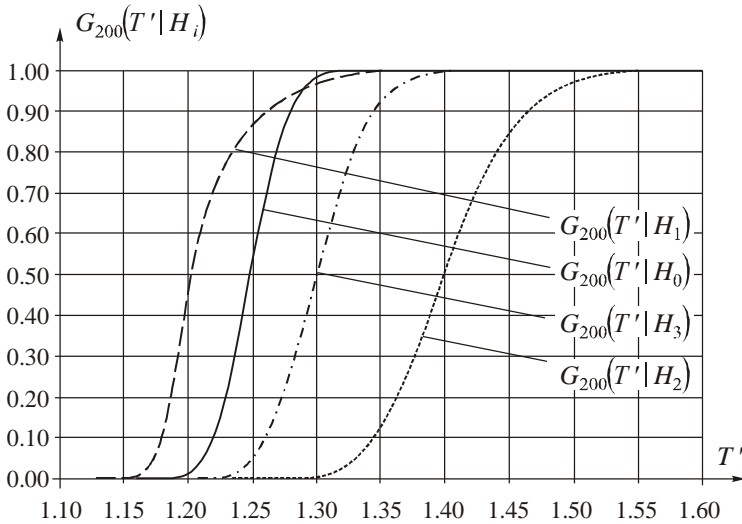


Рис. 2.34. Условные распределения $G(S | H_i)$ статистики T' при объеме выборки $n = 200$

Можно видеть, что вследствие “специфичного” поведения условного распределения $G(T' | H_1)$ с ростом объема выборки мощность критерия по отношению к гипотезе H_1 при $n \geq 50$ начинает уменьшаться. Далее с ростом n критерий оказывается смещенным относительно гипотезы H_1 и вовсе не способен различать гипотезы H_0 и H_1 .

Оценки мощности критерия Шпигельхальтера по отношению к гипотезе H_1 приведены в табл. 2.30, а оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 2.31 и 2.32 соответственно.

Как можно видеть, по отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3 критерий демонстрирует хорошую мощность, выше чем у критериев Шапиро-Уилка и Эппса-Палли или других специальных критериев нормальности. Однако ситуация с необычным поведением распределения $G(T' | H_1)$ заставляет быть осторожным, так как даже

при больших объёмах выборок применение критерия может привести к неверному выводу.

Таблица 2.30

Мощность критерия Шпигельхальтера относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.183	0.125	0.064	0.031	0.011
20	0.231	0.172	0.103	0.060	0.028
30	0.256	0.202	0.133	0.086	0.046
40	0.262	0.213	0.149	0.103	0.060
50	0.256	0.211	0.153	0.110	0.068
100	0.182	0.154	0.117	0.089	0.062
150	0.118	0.099	0.075	0.057	0.040
200	0.075	0.063	0.047	0.036	0.025
300	0.030	0.025	0.018	0.013	0.010

Таблица 2.31

Мощность критерия Шпигельхальтера относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.264	0.202	0.131	0.087	0.051
20	0.466	0.388	0.282	0.204	0.134
30	0.639	0.559	0.439	0.339	0.236
40	0.763	0.696	0.581	0.476	0.355
50	0.845	0.790	0.693	0.594	0.468
100	0.980	0.968	0.939	0.900	0.836
150	0.997	0.995	0.988	0.978	0.956
200	1.000	0.999	0.998	0.996	0.990
300	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Мощность критерия Шпигельхальтера относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.179	0.126	0.070	0.040	0.019
20	0.239	0.176	0.106	0.064	0.034
30	0.305	0.233	0.148	0.094	0.051
40	0.369	0.291	0.193	0.127	0.072
50	0.424	0.343	0.237	0.162	0.096
100	0.613	0.530	0.408	0.308	0.211
150	0.725	0.650	0.530	0.425	0.311
200	0.802	0.739	0.630	0.527	0.405
300	0.898	0.855	0.773	0.684	0.571

Поэтому, применяя критерий Шпигельхальтера, желательно для контроля убедиться, что и другие критерии приводят к тому же выводу о результатах проверки гипотезы H_0 .

2.15. Критерий Ройстона

Критерий Шапиро-Уилка [48] основывается на анализе порядковых статистик. В качестве статистики критерия вычисляют величину

$$W = \left(\sum_{j=1}^n a_j X_{(j)} \right)^2 / \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 .$$

В стандарте [67] предусмотрено применение критерия при $8 \leq n \leq 50$ и приведены соответствующие коэффициенты a_j . Применение же критерия при бóльших n затруднено из-за отсутствия коэффициентов в источниках. И хотя приближенный вариант критерия Шапиро-Уилка для $51 \leq n \leq 100$ приводится, например, в [50], табулирование точных значений a_j для произвольного объема не получило значительного внимания исследователей, в отличие от построения аппроксимаций (см. критерий Ройстона).

В [46] получены приближенные выражения, позволяющие вычислять статистику W при $4 \leq n \leq 2000$ и не требующие сложных

вычислений. Распределение такой статистики хорошо согласуется с опубликованными критическими точками, полученными для точных значений коэффициентов a_i .

Обозначим $c_i = (\tilde{\mathbf{m}}^T \tilde{\mathbf{m}})^{-1/2} \tilde{m}_i$, $\tilde{m}_i = \Phi^{-1}\{(i-3/8)(n+1/4)\}$, где $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона. Учитывая, что $a_i = -a_{n-i+1}$, приближенные коэффициенты \tilde{a}_i определяют, начиная с вычисления \tilde{a}_n и \tilde{a}_{n-1} в соответствии с соотношениями:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n = c_n + 0.221157x - 0.147981x^2 - 2.071190x^3 + \\ + 4.434685x^4 - 2.706056x^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{n-1} = c_{n-1} + 0.042981x - 0.293762x^2 - 1.752461x^3 + \\ + 5.682633x^4 - 3.582663x^5. \end{aligned}$$

где $x = n^{-1/2}$.

Затем, вычисляя нормализующие коэффициенты для \tilde{m}_i в соответствии с выражением

$$\phi = \begin{cases} (\tilde{\mathbf{m}}^T \tilde{\mathbf{m}} - 2\tilde{m}_n^2) / (1 - 2\tilde{a}_n^2), & n \leq 5, \\ (\tilde{\mathbf{m}}^T \tilde{\mathbf{m}} - 2\tilde{m}_n^2 - 2\tilde{m}_{n-1}^2) / (1 - 2\tilde{a}_n^2 - 2\tilde{a}_{n-1}^2), & n > 5, \end{cases}$$

получают остальные

$$\tilde{a}_i = \phi^{-1/2} \tilde{m}_i,$$

для $i = 2, \dots, n-1$ ($n \leq 5$) или $i = 3, \dots, n-2$ ($n > 5$).

Применение критерия существенно упрощается благодаря использованию следующего нормализующего преобразования [46]. Для $4 \leq n \leq 11$ вычисляют вспомогательные величины

$$w = -\ln(\gamma - \ln(1-W)),$$

$$\gamma = -2.273 + 0.459n,$$

$$\begin{aligned}\mu &= 0.5440 - 0.39978n + 0.025054n^2 - 0.0006714n^3, \\ \sigma &= \exp\left(1.3822 - 0.77857n + 0.062767n^2 - 0.0020322n^3\right).\end{aligned}$$

Для $12 \leq n \leq 2000$:

$$\begin{aligned}w &= \ln(1 - W), \\ \mu &= -1.5861 - 0.31082x - 0.083751x^2 + 0.0038915x^3, \\ \sigma &= \exp\left(-0.4803 - 0.082676x + 0.0030302x^2\right),\end{aligned}$$

где $x = \ln n$.

Если критерий Шапиро-Уилка левосторонний, то критерий Ройстона является правосторонним. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики

$$W_R = (w - \mu) / \sigma, \quad (2.18)$$

которая при справедливости H_0 приближенно описывается стандартным нормальным законом. Отличием распределения статистики (2.18) от стандартного нормального закона можно практически пренебречь при объёмах выборок $n > 30$ (см. рис. 2.35).

Оценки мощности критерия Ройстона по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведена в табл. 2.33, значения мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 2.34 и 2.35 соответственно.

Как можно видеть по табл. 2.33 у критерия Ройстона в меньшей мере, но сохранился недостаток, свойственный критерию Шапиро-Уилка относительно конкурирующих законов близких к закону, соответствующему гипотезе H_1 (см. рис. 2.36).

Относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 критерий Ройстона не уступает по мощности критериям Шапиро-Уилка и Эппса-Палли.

В программных системах статистического анализа под именем критерия Шапиро-Уилка, как правило, реализуется модификация Ройстона.

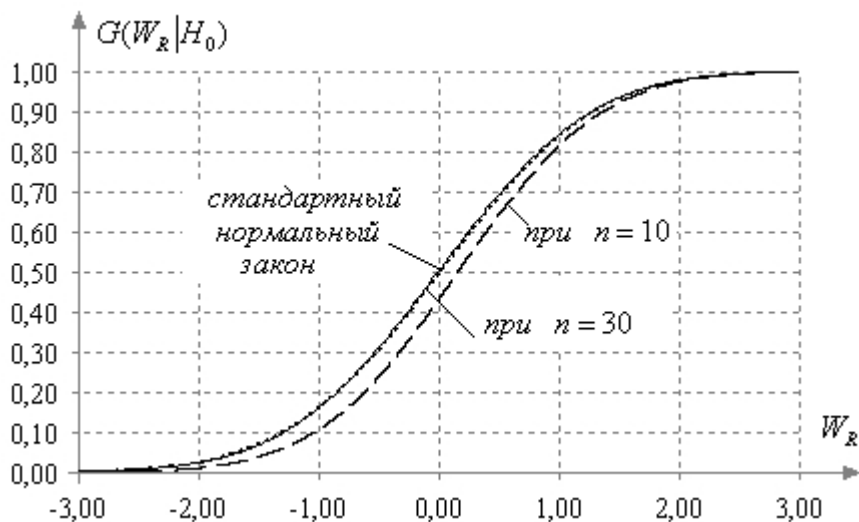


Рис. 2.35. Сходимость распределений $G(W_R | H_0)$ статистики Ройстона к стандартному нормальному закону

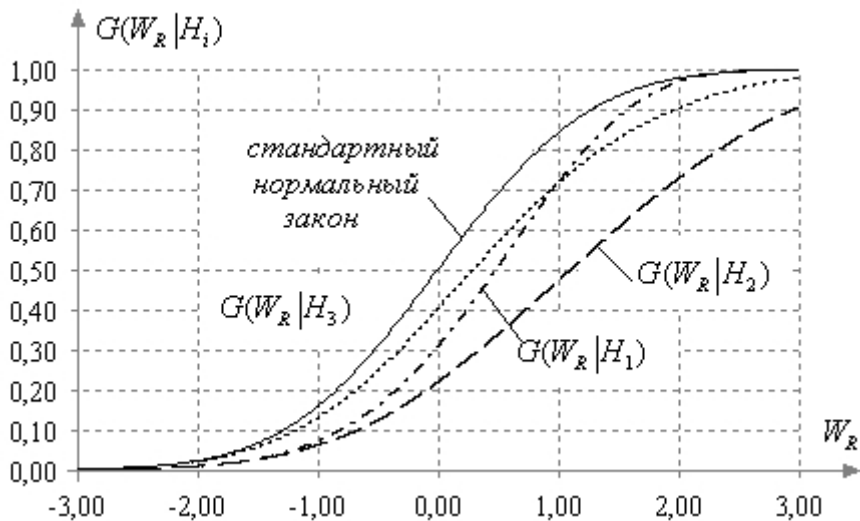


Рис. 2.36. Условные распределения $G(W_R | H_i)$ статистики W_R при объеме выборок $n = 30$

Таблица 2.33

Мощность критерия Ройстона относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.171	0.110	0.050	0.022	0.007
20	0.209	0.136	0.061	0.025	0.007
30	0.262	0.177	0.084	0.037	0.010
40	0.321	0.227	0.115	0.053	0.016
50	0.383	0.280	0.151	0.074	0.025
100	0.660	0.553	0.381	0.241	0.114
150	0.841	0.766	0.615	0.461	0.280
200	0.934	0.892	0.793	0.664	0.478
300	0.992	0.983	0.956	0.908	0.806

Таблица 2.34

Мощность критерия Ройстона относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.276	0.218	0.149	0.103	0.062
20	0.409	0.346	0.261	0.196	0.135
30	0.514	0.449	0.356	0.281	0.203
40	0.602	0.539	0.443	0.360	0.272
50	0.677	0.616	0.521	0.436	0.340
100	0.894	0.860	0.797	0.730	0.636
150	0.969	0.955	0.925	0.888	0.829
200	0.991	0.987	0.975	0.958	0.928
300	0.999	0.999	0.998	0.996	0.990

Таблица 2.35

Мощность критерия Ройстона относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.189	0.137	0.080	0.047	0.024
20	0.236	0.181	0.117	0.076	0.044
30	0.272	0.215	0.146	0.101	0.062
40	0.304	0.244	0.171	0.121	0.078
50	0.334	0.273	0.196	0.142	0.093
100	0.461	0.395	0.306	0.236	0.167
150	0.564	0.498	0.402	0.324	0.242
200	0.650	0.588	0.491	0.407	0.314
300	0.778	0.726	0.640	0.557	0.458

2.16. Рекомендации по применению

Как можно заметить по содержанию предшествующих параграфов данного раздела, среди рассмотренных критериев проверки гипотез о принадлежности выборок нормальному закону, специально разработанных для проверки нормальности, нет ни одного критерия без недостатка.

Применение критериев симметричности со статистиками (2.1) и (2.8) и критерия проверки гипотезы о значении эксцесса (2.3) корректно лишь при справедливости предположения о принадлежности выборки нормальному закону.

Применение совместного критерия проверки на симметричность и на значение эксцесса (2.7) может приводить к неверному выводу из-за плохой сходимости распределения статистики к асимптотически предельному χ_2^2 -распределению.

При малых n и α отмечается смещенность целого ряда критериев относительно гипотезы H_1 (Шапиро-Уилка (2.4), Эппса-Палли (2.5), совместного критерия Д'Агостино на основе статистик z_1 и z_2 (2.10), Хегази-Грина T_1 (2.12) и T_2 (2.13), Ройстона).

Серьёзная проблема с различением гипотез H_0 и H_1 у критерия Шпигельхальтера.

Явных недостатков не обнаружено у критериев Фросини (2.11), Гири (2.14), Дэвида–Хартли–Пирсона (2.15) и совместного критерия Д'Агостино проверки на симметричность и эксцесс со статистикой z_2 (2.9). Но общим недостатком критериев Фросини (2.11), Гири (2.14) и Дэвида–Хартли–Пирсона (2.15), как и ряда других, является зависимость распределений статистик от объемов выборок и неизвестность аналитических распределений статистик. Поэтому при принятии решения о результатах проверки гипотезы приходится ориентироваться на значения процентных точек, а в этом случае нельзя оценить достигнутый уровень значимости и, следовательно, трудно судить о степени соответствия или несоответствия наблюдаемой выборки нормальному закону. Следует отметить и то, что критерий Дэвида–Хартли–Пирсона относительно H_1 , H_2 и H_3 демонстрирует не самую высокую мощность.

В то же время нельзя указать критерия, который в любой ситуации (при любом n , любом α и любой конкурирующей гипотезе) имел бы явное преимущество в мощности.

Результаты сравнительного анализа критериев, проведенного в [88], в определенной степени иллюстрируют рис. 2.35–2.37, где показана зависимость мощности β из рассматриваемых критериев от объемов выборок относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 при вероятности ошибки первого рода $\alpha = 0.1$.

Опираясь на проведенные исследования свойств критериев и с учетом показанной ими мощности относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 , H_3 , рассмотренные в разделе 2 критерии можно проранжировать по мощности (примерно) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \text{Гири} \succ \text{Шпигельхальтера}^1 \succ \text{Хегази–Грина} (T_2)^2 \succ \\ & \succ \text{Хегази–Грина} (T_1)^3 \succ \text{Эпса–Палли}^3 \succ \text{Д'Агостино } z_2 \succ \\ & \text{Д'Агостино } (z_1 + z_2)^3 \succ \text{Дэвида–Хартли–Пирсона} \succ \text{Ройстона}^3 \succ \\ & \text{Шапиро–Уилка}^3 \succ \text{Фросини}. \end{aligned}$$

Однако при этом необходимо учитывать существенные недостатки следующих критериев.

¹⁾ Критерий Шпигельхальтера не способен отличить от проверяемой конкурирующие гипотезы типа H_1 .

2) Критерий Хегази–Грина со статистикой T_2 при малых объемах выборок вследствие смещения не способен отличать от проверяемой гипотезы H_0 конкурирующую гипотезу вида H_1 .

3) Критерий Хегази–Грина со статистикой T_1 , критерии Шапиро–Уилка, Ройстона, Эпса–Палли, критерий Д’Агостино на базе статистик z_1 и z_2 при малых объемах выборок также смещены относительно конкурирующих гипотез типа H_1 .

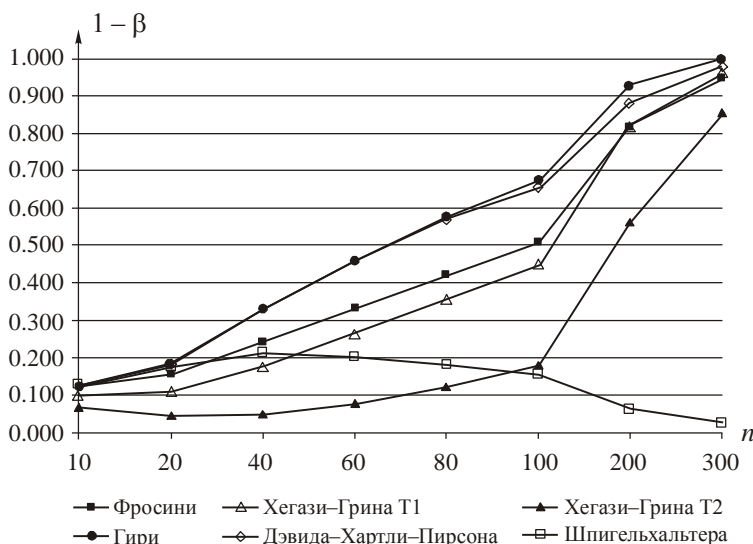


Рис. 2.35. Мощности критериев по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 в зависимости от n при $\alpha = 0.1$

В приводимой ниже табл. 2.36 вместе с наименованием приводятся ссылка на выражение, в соответствие с которым вычисляется статистика критерия, и оценки мощности критериев относительно H_1 , H_2 и H_3 при $n = 50$ и $\alpha = 0.1$. В графе “Примечание” указываются узкие места применения, положительные моменты, характеризующие свойства критерия, рекомендации по применению. Содержание таблицы должно позволить, с одной стороны, сориентироваться с выбором критерия, а с другой, – не ограничивать этот выбор единственным критерием.

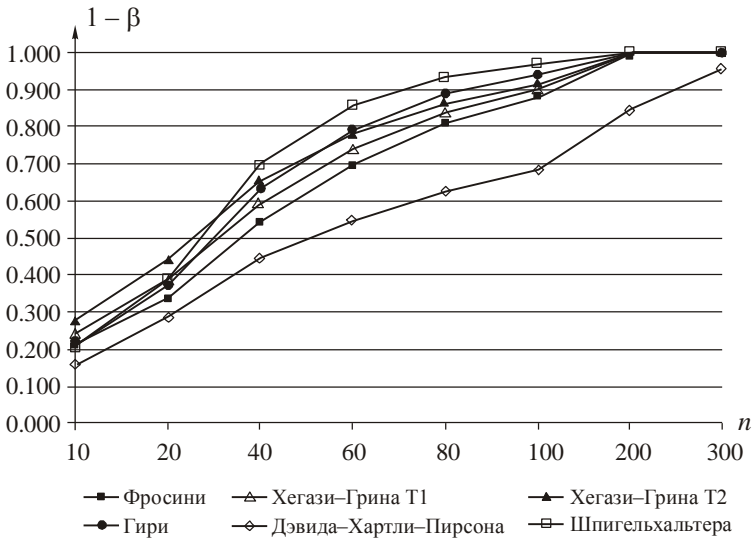


Рис. 2.36. Мощности критериев по отношению к конкурирующей гипотезе H_2 в зависимости от n при $\alpha = 0.1$

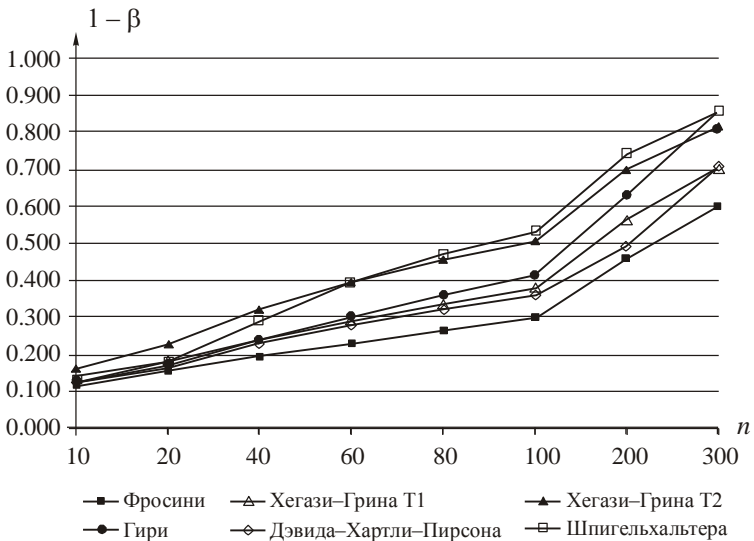


Рис. 2.37. Мощности критериев по отношению к конкурирующей гипотезе H_3 в зависимости от n при $\alpha = 0.1$

Таблица 2.36

**Краткие сведения о свойствах и рекомендации по применению
специальных критериев нормальности**

№	Критерий, статистика	Мощность относи- тельно гипотез			Примечание
		H_1	H_2	H_3	
1	Симметричности, (2.1)	–	–	–	Используются таблицы процентных точек. <i>Не является критерием проверки нормальности.</i>
2	Проверки на эксцесс, (2.3)	–	–	–	Используются таблицы процентных точек. <i>Не является критерием проверки нормальности.</i>
3	Шапиро-Уилка, (2.4)	0.389	0.502	0.203	Используются таблицы процентных точек для ограниченных объёмов $n \leq 50$. При малых n и α отмечается смещенность критерия относительно гипотезы H_1 . Рекомендуется применять совместно с другими критериями, которым не свойственен указанный недостаток.
4	Эпса-Палли, (2.5)	0.275	0.623	0.249	Используются таблицы процентных точек. Но есть модель предельного распределения. При малых n и α отмечается смещенность критерия относительно гипотезы H_1 . Рекомендуется применять совместно с другими критериями, которым не свойственен указанный недостаток.

Продолжение таблицы 2.36

5	Модифицированный Шапиро-Уилка, (2.6)	–	–	–	<p>Действительные распределения статистики в зависимости от комбинаций n и h могут существенно отличаться от асимптотического стандартного нормального закона.</p> <p>При $n \times h < 100$ и малых n и h отмечается смещенность критерия относительно гипотезы H_1.</p> <p><i>Применять не рекомендуется.</i></p>
6	Совместный критерий проверки на симметричность и эксцесс (Jarque-Bera), (2.7)	–	–	–	<p>Распределение статистики очень плохо сходится к асимптотическому предельному χ_2^2-распределению. Поэтому использование χ_2^2-распределения в качестве предельного при проверке может приводить к неоправданному неотклонению проверяемой гипотезы H_0.</p> <p><i>Применять не рекомендуется.</i></p>
7	Критерий симметричности Д'Агостино z_1 , (2.8)	–	–	–	<p>Его применение предпочтительнее критерия со статистикой (2.1), так как распределение статистики хорошо описывается стандартным нормальным законом.</p> <p><i>Не является критерием проверки нормальности.</i></p>

Продолжение таблицы 2.36

8	Критерий Д'Агостино проверки на симметричность и эксцесс z_2 , (2.9)	0.428	0.489	0.241	Распределение статистики достаточно хорошо описывается стандартным нормальным законом.
9	Совместный критерий Д'Агостино на основе статистик z_1 и z_2 , (2.10)	0.164	0.671	0.347	Распределение статистики хорошо сходится к предельному χ_2^2 -распределению. При малых n и α отмечается смещенность критерия относительно гипотезы H_1 . Рекомендуется применять совместно с другими критериями, которым не свойственен указанный недостаток.
10	Фросини, (2.11)	0.285	0.623	0.212	Используются таблицы процентных точек. При $n > 50$ в качестве модели предельного закона можно использовать бета-распределение III рода (см. раздел 2.10). Невысокая мощность.
11	Хегази-Грина T_1 , (2.12)	0.118	0.674	0.267	Зависимость распределения статистики от n . Используются таблицы процентных точек. При малых n и α отмечается смещенность критерия относительно гипотезы H_1 . Рекомендуется применять совместно с другими критериями, которым не свойственен указанный недостаток.

Продолжение таблицы 2.36

12	Хегази-Грина T_2 , (2.13)	0.061	0.723	0.359	<p>Зависимость распределения статистики от n. Используются таблицы процентных точек.</p> <p>При малых n и α отмечается смещенность критерия относительно гипотезы H_1.</p> <p>Рекомендуется применять совместно с другими критериями, которым не свойственен указанный недостаток.</p>
13	Гири, (2.14)	0.394	0.722	0.272	<p>Используются таблицы процентных точек.</p> <p>Распределения нормализованных статистик плохо аппроксимируются нормальным законом.</p>
14	Дэвида-Хартли-Пирсона, (2.15)	0.400	0.499	0.255	<p>Используются таблицы процентных точек.</p> <p>Относительно невысокая мощность.</p>
15	Шпигельхалтера, (2.16)	0.211	0.790	0.343	<p>Используются таблицы процентных точек.</p> <p>Достаточно высокая мощность относительно гипотез H_2 и H_3.</p> <p>Критерий не способен отличать от H_0 гипотезы, близкие к H_1 (см. раздел 2.14).</p> <p>Рекомендуется применять совместно с другими критериями, которым не свойственны проблемы с распознаванием гипотезы вида H_1.</p>

Окончание таблицы 2.36

16	Ройстона, (2.18)	0.280	0.616	0.273	<p>Распределение статистики при $n > 30$ хорошо описывается стандартным нормальным законом.</p> <p>В меньшей степени, чем у критерия Шапиро-Уилка, но при малых n и α проявляется смещенность относительно H_1.</p> <p>Рекомендуется применять совместно с другими критериями, которым не свойственен указанный недостаток.</p>
----	------------------	-------	-------	-------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Дополнительные сведения по сравнительному анализу критериев, используемых для проверки гипотезы о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону, в том числе, непараметрических критериев согласия и критериев согласия типа χ^2 изложены в разделе 5.8.

3. Непараметрические критерии согласия при проверке нормальности

3.1. Критерий Колмогорова

При проверке гипотезы H_0 о принадлежности выборки нормальному закону критерий Колмогорова [28] опирается на статистику

$$D_n = \sup_{|x| < \infty} |F_n(x) - F(x, \hat{\theta})|,$$

где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения; $F(x, \hat{\theta})$ – функция распределения нормального закона; $\hat{\theta}$ – оценка вектора параметров закона $\theta^T = (\mu, \sigma)$, найденная по этой же выборке; n – объем выборки.

При проверке гипотез с применением критерия Колмогорова рекомендуется использовать статистику с поправкой Большева [63, 65] в форме [64]

$$S_K = \sqrt{n}D_n + \frac{1}{6\sqrt{n}} = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \quad (3.1)$$

где $D_n = \max(D_n^+, D_n^-)$, $D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_{(i)}, \hat{\theta}) \right\}$,

$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ F(x_{(i)}, \hat{\theta}) - \frac{i-1}{n} \right\}$, $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ – здесь и далее,

элементы вариационного ряда, построенного по исходной выборке X_1, X_2, \dots, X_n .

Зависимостью распределения статистики (3.1) от объема выборки можно практически пренебречь при $n > 25$ и использовать в качестве распределения статистики, например, при вычислении достигнутого уровня значимости (p-value) её предельное распределение. Следует отметить, что в зарубежных публикациях упоминаний о применении поправки Большева практически не встречается, и в критерии Колмогорова, как правило, используют статистику вида $\sqrt{n}D_n$,

вследствие чего вынуждены учитывать зависимость распределения данной статистики от объема выборки.

Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют при больших значениях статистики. Если же для вычисленного по выборке значения статистики S_K^* выполняется неравенство

$$P\{S > S_K^*\} > \alpha,$$

то нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

Распределение статистики (3.1) при справедливости H_0 зависит от того, какой из параметров нормального закона оценивался ($\hat{\mu}$ или $\hat{\sigma}$) или ($\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$), и существенно зависит от того, каким методом находились эти оценки [34, 31, 89, 103]. В любом случае эти распределения отличаются от распределения Колмогорова с функцией распределения

$$K(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 s^2},$$

которому подчиняется статистика (3.1) при проверке простой гипотезы (в случае известных параметров μ и σ) [28]. Сказанное выше справедливо для всех рассматриваемых ниже непараметрических критериев согласия.

Процентные точки и модели предельного распределения статистики (3.1) при справедливости H_0 и использовании для вычисления оценок $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ параметров нормального закона методом максимального правдоподобия представлены в таблицах 3.1 и 3.2 соответственно [34, 31, 89, 103]. Напомним, что для параметров нормального закона оценки максимального правдоподобия (ОМП) совпадают с оценками по методу моментов.

В таблице 3.2 (и в последующих) через $B_{III}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ обозначено бета-распределение III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1} \left(1 - \frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1) \frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}}, \quad (3.2)$$

через $\gamma(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ – гамма-распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0} \Gamma(\theta_0)} (x - \theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-(x - \theta_2)/\theta_1}. \quad (3.3)$$

Таблица 3.1

Процентные точки распределения статистики Колмогорова при использовании метода максимального правдоподобия

Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
	0.9	0.95	0.99
σ	1.190	1.327	1.600
μ	0.888	0.963	1.114
μ и σ	0.835	0.909	1.057

Таблица 3.2

Аппроксимация предельных распределений статистики Колмогорова при использовании метода максимального правдоподобия

При оценивании σ	При оценивании μ	При оценивании μ и σ
$V_{III}(4.8849; 5.2341; 3.6279; 2.3872; 0.303)$	$V_{III}(5.2604; 7.4327; 2.1872; 1.4774; 0.30)$	$\gamma(6.4721; 0.0580; 0.2620)$

Оценки мощности критерия Колмогорова по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 3.3, значения мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 3.4 и 3.5 соответственно.

Среди непараметрических критериев согласия критерий Колмогорова относится к наименее мощным критериям. При проверке нормальности он, как правило, уступает большинству специальных критериев, ориентированных только на проверку гипотез о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону

Таблица 3.3

Мощность критерия Колмогорова относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.164	0.108	0.053	0.026	0.011
20	0.193	0.131	0.066	0.032	0.013
30	0.226	0.155	0.080	0.040	0.016
40	0.259	0.181	0.096	0.050	0.020
50	0.292	0.208	0.113	0.060	0.025
100	0.455	0.350	0.213	0.124	0.058
150	0.600	0.490	0.329	0.210	0.107
200	0.720	0.618	0.449	0.306	0.170
300	0.878	0.808	0.663	0.514	0.336

Таблица 3.4

Мощность критерия Колмогорова относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.269	0.206	0.130	0.083	0.045
20	0.376	0.302	0.205	0.139	0.082
30	0.468	0.388	0.278	0.196	0.121
40	0.549	0.468	0.349	0.254	0.164
50	0.621	0.540	0.415	0.312	0.209
100	0.853	0.797	0.692	0.582	0.449
150	0.948	0.920	0.857	0.780	0.662
200	0.983	0.972	0.941	0.895	0.811
300	0.999	0.997	0.991	0.981	0.956

Мощность критерия Колмогорова относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.180	0.126	0.069	0.038	0.017
20	0.200	0.143	0.080	0.045	0.021
30	0.217	0.156	0.089	0.051	0.024
40	0.232	0.169	0.098	0.056	0.027
50	0.247	0.181	0.106	0.062	0.030
100	0.316	0.240	0.148	0.090	0.046
150	0.382	0.297	0.191	0.120	0.063
200	0.443	0.354	0.235	0.151	0.082
300	0.556	0.462	0.324	0.223	0.130

3.2. Критерий Купера

В критерии Купера [29] в качестве меры расстояния между эмпирическим и теоретическим законом рассматривается величина

$$V_n = \sup_{-\infty < x < \infty} \left\{ F_n(x) - F(x, \hat{\theta}) \right\} - \inf_{-\infty < x < \infty} \left\{ F_n(x) - F(x, \hat{\theta}) \right\},$$

которая вычисляется в соответствии с выражением

$$V_n = D_n^+ + D_n^-,$$

где D_n^+ , D_n^- определены выше в разделе 3.1.

Если параметры теоретического закона $F(x, \theta)$ известны, то предельным распределением $G(\sqrt{n}V_n | H_0)$ статистики $\sqrt{n}V_n$ при справедливости проверяемой гипотезы H_0 является [29, 52]:

$$G(s | H_0) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} 2(4m^2 s^2 - 1)e^{-2m^2 s^2}.$$

Для снижения зависимости распределения статистики от n в [53] предложена модификации статистики

$$V = V_n \left(\sqrt{n} + 0.155 + \frac{0.24}{\sqrt{n}} \right). \quad (3.4)$$

Зависимостью распределения статистики (3.4) от объема выборки можно пренебречь при $n \geq 20$.

В [38, 92] предложено применять в критерии Купера статистику в следующей модификации

$$V_n^{mod} = \sqrt{n}V_n + \frac{1}{3\sqrt{n}}, \quad (3.5)$$

где идея использования поправки вытекает из выражения для статистики критерия согласия Смирнова [64, с. 81]. Зависимостью распределения статистики (3.5) от объема выборки можно практически пренебречь при $n \geq 30$.

Для случая проверки нормальности, когда ОМП параметров $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ вычисляются по анализируемой выборке, процентные точки и модели предельного распределения статистики (3.5), соответствующего справедливости H_0 , представлены соответственно в таблицах 3.6 и 3.7 [39, 93, 94, 40]. Эти же таблицы можно использовать и для статистики (3.4).

Таблица 3.6

Процентные точки распределения статистики Купера при использовании метода максимального правдоподобия

Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
	0.9	0.95	0.99
σ	1.494	1.611	1.847
μ	1.540	1.662	1.908
μ и σ	1.402	1.505	1.709

Таблица 3.7

Аппроксимация предельных распределений статистики Купера при использовании метода максимального правдоподобия

При оценивании σ	При оценивании μ	При оценивании μ и σ
$V_{III}(6.3057; 8.1797; 2.3279; 2.4413; 0.5370)$	$V_{III}(5.5932; 7.6149; 2.1484; 2.3961; 0.5630)$	$V_{III}(7.4917; 8.0016; 2.4595; 2.1431; 0.4937)$

Оценки мощности критерия Купера по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 3.8, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 3.9 и 3.10 соответственно.

Таблица 3.8

Мощность критерия Купера относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.185	0.125	0.064	0.032	0.013
20	0.228	0.161	0.087	0.046	0.020
30	0.237	0.199	0.114	0.063	0.028
40	0.319	0.239	0.143	0.083	0.040
50	0.365	0.279	0.172	0.104	0.052
100	0.569	0.474	0.335	0.229	0.133
150	0.724	0.639	0.499	0.375	0.244
200	0.834	0.766	0.640	0.514	0.367
300	0.946	0.914	0.839	0.749	0.614

Таблица 3.9

Мощность критерия Купера относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.253	0.191	0.121	0.077	0.044
20	0.377	0.306	0.215	0.152	0.095
30	0.390	0.325	0.238	0.174	0.116
40	0.579	0.506	0.398	0.309	0.219
50	0.659	0.589	0.480	0.387	0.286
100	0.891	0.853	0.779	0.700	0.596
150	0.968	0.953	0.919	0.876	0.807
200	0.992	0.987	0.973	0.954	0.918
300	1	0.999	0.998	0.995	0.989

Таблица 3.10

Мощность критерия Купера относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.171	0.119	0.064	0.035	0.016
20	0.194	0.139	0.079	0.045	0.022
30	0.214	0.156	0.091	0.054	0.028
40	0.236	0.174	0.105	0.064	0.033
50	0.256	0.192	0.118	0.073	0.039
100	0.346	0.273	0.181	0.119	0.069
150	0.429	0.350	0.246	0.170	0.104
200	0.505	0.423	0.309	0.221	0.140
300	0.633	0.554	0.433	0.333	0.228

3.3. Критерий Крамера–Мизеса–Смирнова

Статистика критерия ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова имеет вид

$$S_{\omega} = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left\{ F(x_{(i)}, \hat{\theta}) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2. \quad (3.6)$$

При простой проверяемой гипотезе, когда параметры теоретического закона $F(x, \theta)$ известны, при справедливости H_0 статистика (3.6) в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a1(s)$, имеющей вид [64]

$$a1(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1/2)\sqrt{4j+1}}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \exp \left\{ -\frac{(4j+1)^2}{16s} \right\} \times \\ \times \left\{ I_{\frac{1}{4}} \left[\frac{(4j+1)^2}{16s} \right] - I_{\frac{1}{4}} \left[\frac{(4j+1)^2}{16s} \right] \right\},$$

где $I_{\frac{1}{4}}(\cdot), I_{\frac{1}{4}}(\cdot)$ – модифицированные функции Бесселя вида

$$I_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, |z| < \infty, |\arg z| < \pi.$$

Процентные точки и модели предельного распределения статистики (3.6) при справедливости H_0 о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону в случае использования ОМП параметров $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$, определяемых по этой же выборке представлены соответственно в таблицах 3.11 и 3.12 [34, 31, 89, 103]. В таблице 3.12 через $Sb(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ обозначено распределение Sb-Джонсона с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_1 \theta_2}{\sqrt{2\pi}(x - \theta_3)(\theta_2 + \theta_3 - x)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x - \theta_3}{\theta_2 + \theta_3 - x} \right]^2 \right\}.$$

Таблица 3.11

Процентные точки распределения статистики Крамера–Мизеса–Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия

Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
	0.9	0.95	0.99
σ	0.327	0.442	0.725
μ	0.134	0.165	0.238
μ и σ	0.103	0.126	0.178

Таблица 3.12

Аппроксимация предельных распределений статистики Крамера–Мизеса–Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия

При оценивании σ	При оценивании μ	При оценивании μ и σ
Sb(3.153; 0.9448; 2.5477; 0.0160)	$B_{III}(4.433; 3.6365; 13.920; 0.6632; 0.0084)$	$B_{III}(4.1153; 4.1748; 11.035; 0.5116; 0.009)$

Оценки мощности критерия Крамера–Мизеса–Смирнова по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 3.13, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 3.14 и 3.15 соответственно.

Таблица 3.13

Мощность критерия Крамера–Мизеса–Смирнова относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.173	0.115	0.056	0.026	0.010
20	0.216	0.149	0.076	0.038	0.014
30	0.262	0.187	0.101	0.052	0.021
40	0.310	0.227	0.129	0.070	0.030
50	0.358	0.269	0.159	0.090	0.040
100	0.577	0.477	0.331	0.218	0.118
150	0.743	0.656	0.508	0.374	0.232
200	0.855	0.790	0.663	0.531	0.369
300	0.961	0.934	0.868	0.780	0.641

Таблица 3.14

Мощность критерия Крамера–Мизеса–Смирнова относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.279	0.217	0.142	0.093	0.054
20	0.407	0.336	0.242	0.174	0.12
30	0.516	0.444	0.339	0.256	0.175
40	0.609	0.537	0.429	0.338	0.243
50	0.688	0.621	0.514	0.418	0.313
100	0.909	0.875	0.810	0.736	0.634
150	0.976	0.965	0.937	0.901	0.839
200	0.995	0.991	0.982	0.967	0.939
300	1	1	0.999	0.997	0.994

Мощность критерия Крамера–Мизеса–Смирнова относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.183	0.129	0.073	0.041	0.019
20	0.209	0.152	0.089	0.053	0.027
30	0.231	0.172	0.104	0.063	0.033
40	0.254	0.191	0.118	0.073	0.039
50	0.274	0.209	0.132	0.083	0.045
100	0.369	0.294	0.198	0.132	0.076
150	0.452	0.373	0.264	0.184	0.112
200	0.531	0.449	0.330	0.240	0.153
300	0.663	0.585	0.461	0.357	0.246

3.4. Критерий Ватсона

Статистика критерия Ватсона [57, 58] используется в следующей удобной для расчетов форме

$$U_n^2 = \sum_{i=1}^n \left(F(x_{(i)}, \hat{\theta}) - \frac{i - \frac{1}{2}}{n} \right)^2 - n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(x_{(i)}, \hat{\theta}) - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12n}. \quad (3.7)$$

При простой проверяемой гипотезе и известных параметрах теоретического закона $F(x, \theta)$ в случае справедливости H_0 статистика (3.7) в пределе подчиняется закону с функцией распределения [57, 58] вида

$$G(s|H_0) = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{-2m^2 \pi^2 s}.$$

Следует подчеркнуть, что зависимость распределения статистики (3.7) от объема выборки выражена слабо. Однако в [6] для случая проверки простых гипотез процентные точки приведены для распределения модифицированной статистики в форме

$$U_n^{2*} = (U_n^2 - 0.1/n + 0.1/n^2)(1 + 0.8/n).$$

В случае проверки нормальности с вычислением ОМП параметров $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ по анализируемой выборке можно воспользоваться процентными точками и моделями предельных распределений статистики (3.7), соответствующих справедливости H_0 , представленными соответственно в таблицах 3.16 и 3.17 [39, 93, 40, 94].

Таблица 3.16

Процентные точки распределения статистики Ватсона при использовании метода максимального правдоподобия

Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
	0.9	0.95	0.99
σ	0.122	0.151	0.221
μ	0.127	0.157	0.228
μ и σ	0.096	0.116	0.164

Таблица 3.17

Аппроксимация предельных распределений статистики Ватсона при использовании метода максимального правдоподобия

При оценивании σ	При оценивании μ	При оценивании μ и σ
$V_{III}(8.8122; 3.7536; 29.8074; 0.7171; 0.0019)$	$V_{III}(3.6769; 4.4438; 9.8994; 0.6805; 0.0082)$	$V_{III}(3.5230; 4.4077; 9.2281; 0.4785; 0.0104)$

Оценки мощности критерия Ватсона по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 3.18, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 3.19 и 3.20 соответственно.

Среди непараметрических критериев согласия критерий Ватсона по мощности делит 2-ю – 3-ю позицию с критерием Крамера-Мизеса-Смирнова.

Таблица 3.18

Мощность критерия Ватсона относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.183	0.123	0.062	0.030	0.011
20	0.230	0.161	0.085	0.045	0.018
30	0.280	0.204	0.115	0.062	0.027
40	0.331	0.248	0.147	0.084	0.039
50	0.382	0.293	0.181	0.107	0.052
100	0.607	0.512	0.369	0.254	0.148
150	0.770	0.690	0.553	0.423	0.282
200	0.875	0.818	0.705	0.583	0.429
300	0.969	0.947	0.893	0.819	0.699

Таблица 3.19

Мощность критерия Ватсона относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.267	0.206	0.133	0.087	0.050
20	0.398	0.328	0.235	0.170	0.110
30	0.513	0.441	0.338	0.257	0.178
40	0.610	0.540	0.434	0.346	0.252
50	0.691	0.626	0.523	0.430	0.327
100	0.914	0.883	0.822	0.755	0.681
150	0.979	0.968	0.944	0.913	0.860
200	0.995	0.992	0.984	0.973	0.950
300	1	1	0.999	0.998	0.995

Таблица 3.20

Мощность критерия Ватсона относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.177	0.124	0.068	0.038	0.018
20	0.201	0.145	0.084	0.049	0.025
30	0.223	0.165	0.099	0.060	0.031
40	0.246	0.185	0.114	0.071	0.038
50	0.268	0.204	0.128	0.081	0.044
100	0.367	0.294	0.200	0.135	0.080
150	0.456	0.379	0.272	0.193	0.121
200	0.538	0.458	0.344	0.253	0.166
300	0.673	0.599	0.481	0.380	0.270

3.5. Критерий Андерсона–Дарлингга

В критерии согласия Ω^2 Андерсона–Дарлингга [1, 2] используется статистика

$$S_{\Omega} = -n - 2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(x_{(i)}, \hat{\theta}) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n} \right) \ln(1 - F(x_{(i)}, \hat{\theta})) \right\}. \quad (3.8)$$

При справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 , когда параметры теоретического закона $F(x, \theta)$ известны, статистика (3.8) в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a_2(s)$, имеющей вид [64]

$$a_2(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{s} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(j+1/2)(4j+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \exp\left\{-\frac{(4j+1)^2 \pi^2}{8s}\right\} \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp\left\{\frac{s}{8(y^2+1)} - \frac{(4j+1)^2 \pi^2 y^2}{8s}\right\} dy.$$

Процентные точки и модели предельных распределений

статистики (3.6) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону в случае вычисления ОМП параметров $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ по этой же выборке представлены в таблицах 3.21 и 3.22 [34, 31, 89, 103].

Таблица 3.21

Процентные точки распределения статистики Андерсона–Дарлингга при использовании метода максимального правдоподобия

Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
	0.9	0.95	0.99
σ	1.743	2.309	3.704
μ	0.892	1.087	1.552
μ и σ	0.630	0.750	1.032

Таблица 3.22

Аппроксимация предельных распределений статистики Андерсона–Дарлингга при использовании метода максимального правдоподобия

При оценивании σ	При оценивании μ	При оценивании μ и σ
$V_{III}(3.4638; 2.330; 35.7115; 12.603; 0.105)$	$V_{III}(4.1081; 5.0598; 16.9721; 7.9065; 0.09)$	$V_{III}(4.7262; 4.6575; 9.4958; 2.717; 0.0775)$

Оценки мощности критерия Андерсона–Дарлингга по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 3.23, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 3.24 и 3.25 соответственно.

Непараметрический критерий Андерсона–Дарлингга представляет собой один из наиболее мощных критериев согласия. В этом можно убедиться, сравнив оценки его мощности относительно гипотез H_1 , H_2 и H_3 с оценками других непараметрических критериев согласия и с оценками мощности специальных критериев нормальности.

Таблица 3.23

Мощность критерия Андерсона–Дарлинга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.171	0.113	0.055	0.025	0.009
20	0.216	0.148	0.076	0.038	0.014
30	0.268	0.192	0.104	0.055	0.022
40	0.322	0.238	0.138	0.076	0.033
50	0.377	0.287	0.174	0.100	0.045
100	0.623	0.526	0.378	0.258	0.146
150	0.795	0.719	0.579	0.445	0.294
200	0.899	0.848	0.742	0.621	0.458
300	0.980	0.964	0.922	0.859	0.750

Таблица 3.24

Мощность критерия Андерсона–Дарлинга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.285	0.223	0.148	0.098	0.057
20	0.417	0.347	0.253	0.184	0.120
30	0.527	0.455	0.351	0.268	0.186
40	0.619	0.549	0.442	0.351	0.256
50	0.696	0.630	0.526	0.432	0.326
100	0.911	0.879	0.816	0.745	0.647
150	0.977	0.966	0.939	0.905	0.846
200	0.995	0.991	0.982	0.969	0.942
300	1	1	0.999	0.997	0.994

Мощность критерия Андерсона–Дарлинга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.188	0.133	0.076	0.043	0.021
20	0.221	0.163	0.098	0.060	0.031
30	0.248	0.187	0.116	0.073	0.039
40	0.274	0.210	0.134	0.085	0.047
50	0.297	0.230	0.150	0.097	0.055
100	0.402	0.327	0.228	0.157	0.095
150	0.493	0.415	0.304	0.220	0.140
200	0.577	0.498	0.380	0.285	0.189
300	0.710	0.639	0.523	0.418	0.304

3.6. Критерии Жанга

В [59] и в последующих работах [60, 61, 62] были предложены непараметрические критерии согласия, статистики которых имеют вид:

$$Z_A = -\sum_{i=1}^n \left[\frac{\ln \{F(x_{(i)}, \hat{\theta})\}}{n-i+\frac{1}{2}} + \frac{\ln \{1-F(x_{(i)}, \hat{\theta})\}}{i-\frac{1}{2}} \right], \quad (3.9)$$

$$Z_C = \sum_{i=1}^n \left[\ln \left\{ \frac{[F(x_{(i)}, \hat{\theta})]^{-1} - 1}{(n-\frac{1}{2}) / (i-\frac{3}{4}) - 1} \right\} \right]^2 \quad (3.10)$$

$$Z_K = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \ln \left\{ \frac{i - \frac{1}{2}}{nF(x_{(i)}, \hat{\theta})} \right\} + \left(n - i + \frac{1}{2} \right) \ln \left[\frac{n - i + \frac{1}{2}}{n\{1 - F(x_{(i)}, \hat{\theta})\}} \right] \right). \quad (3.11)$$

Применение критериев со статистиками (3.9) – (3.11) осложняет сильная зависимость распределений статистик от объема выборки n .

Естественно, зависимость от n сохраняется и в случае проверки сложных гипотез, когда по анализируемой выборке оцениваются параметры закона.

Процентные точки статистик (3.9) – (3.11) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону в случае вычисления оценок параметров

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{и} \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2}$$

по этой же выборке представлены в таблицах 3.26 – 3.28, которые заимствованы в [59].

Оценки мощности критерия Жанга со статистикой Z_A по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 3.29, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 3.30 и 3.31 соответственно. Соответствующие оценки мощности критерия Жанга со статистикой Z_C представлены в таблицах 3.32–3.34, для критерия со статистикой Z_K – в таблицах 3.35–3.37.

Справедливость утверждений автора критериев о их более высокой мощности по сравнению с критериями Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга была подтверждена исследованиями [73, 38, 92, 40, 94], которые показали, что в общем случае критерии со статистиками Z_C и Z_A имеют преимущество в мощности перед всеми остальными непараметрическими критериями согласия.

Однако при проверке нормальности критерии со статистиками Z_C и Z_A обладают тем же самым недостатком, что и некоторые специальные критерии, в частности, критерии Шапиро и Эппса-Палли. Критерий со статистикой Z_A при $n=10, 20$ не способен отличать, закон соответствующий гипотезе H_1 от нормального (см. табл. 3.29). В меньшей степени, но тем же недостатком обладает критерий со статистикой Z_C (см. табл. 3.32 при малых уровнях значимости α).

Таблица 3.26

Процентные точки распределения статистики Z_A Жанга при проверке нормальности

n	0.80	0.90	0.95	0.99	0.999
5	3.346	3.409	3.472	3.619	3.757
6	3.366	3.428	3.492	3.643	3.823
7	3.676	3.437	3.499	3.650	3.847
8	3.383	3.441	3.502	3.648	3.854
9	3.386	3.442	3.499	3.641	3.844
10	3.388	3.441	3.497	3.632	3.826
12	3.388	3.438	3.488	3.612	3.798
14	3.387	3.432	3.478	3.594	3.764
16	3.384	3.426	3.469	3.574	3.729
18	3.381	3.420	3.460	3.557	3.703
20	3.378	3.415	3.452	3.543	3.678
25	3.371	3.403	3.435	3.513	3.625
30	3.365	3.393	3.422	3.490	3.591
40	3.355	3.378	3.402	3.456	3.538
50	3.348	3.367	3.387	3.434	3.503
70	3.337	3.353	3.368	3.405	3.457
100	3.328	3.339	3.351	3.379	3.419
150	3.318	3.327	3.336	3.356	3.386
200	3.313	3.320	3.327	3.343	3.367
300	3.307	3.312	3.317	3.329	3.347
500	3.302	3.305	3.308	3.316	3.327
1000	3.297	3.298	3.300	3.305	3.311

Таблица 3.27

Процентные точки распределения статистики Z_C Жанга при проверке нормальности

n	0.80	0.90	0.95	0.99	0.999
5	3.002	3.639	4.213	5.460	6.757
6	3.433	4.158	4.849	6.382	8.280
7	3.797	4.610	5.385	7.196	9.635
8	4.123	5.007	5.864	7.908	10.954
9	4.404	5.350	6.267	8.545	12.102
10	4.659	5.663	6.650	9.138	13.115
12	5.105	6.209	7.304	10.156	15.147
14	5.486	6.669	7.862	11.103	16.969
16	5.808	7.065	8.352	11.838	18.474
18	6.099	7.422	8.767	12.493	19.899
20	6.362	7.752	9.157	13.150	21.149
25	6.918	8.438	9.984	14.432	23.753
30	7.375	8.998	10.662	15.580	26.091
40	8.109	9.888	11.733	17.223	29.333
50	8.683	10.594	12.583	18.480	31.707
70	9.540	11.640	13.835	20.399	35.532
100	10.452	12.758	15.171	22.242	39.126
150	11.488	14.027	16.628	24.405	42.354
200	12.244	14.934	17.714	25.839	44.611
300	13.276	16.179	19.139	27.523	46.663
500	14.567	17.717	20.927	29.760	49.888
1000	16.322	19.796	23.301	32.811	53.458

Таблица 3.28

Процентные точки распределения статистики Z_K Жанга при проверке нормальности

n	0.80	0.90	0.95	0.99	0.999
5	0.383	0.512	0.630	0.899	1.175
6	0.456	0.596	0.731	1.034	1.413
7	0.515	0.666	0.814	1.149	1.584
8	0.567	0.726	0.882	1.240	1.724
9	0.612	0.777	0.940	1.313	1.838
10	0.652	0.824	0.992	1.379	1.924
12	0.723	0.906	1.083	1.493	2.063
14	0.783	0.975	1.162	1.583	2.191
16	0.834	1.035	1.229	1.661	2.258
18	0.878	1.087	1.286	1.732	2.365
20	0.920	1.135	1.339	1.795	2.406
25	1.006	1.238	1.458	1.944	2.601
30	1.076	1.319	1.553	2.072	2.757
40	1.188	1.453	1.708	2.269	3.039
50	1.273	1.555	1.826	2.440	3.291
70	1.399	1.708	2.005	2.685	3.660
100	1.535	1.874	2.202	2.969	4.087
150	1.690	2.061	2.429	3.289	4.529
200	1.799	2.195	2.591	3.507	4.785
300	1.950	2.380	2.803	3.793	5.228
500	2.137	2.606	3.068	4.160	5.756
1000	2.385	2.904	3.422	4.620	6.300

Таблица 3.29

Мощность критерия Z_A Жанга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.127	0.078	0.033	0.014	0.005
20	0.148	0.090	0.036	0.014	0.004
30	0.199	0.128	0.056	0.023	0.006
40	0.263	0.180	0.087	0.039	0.012
50	0.333	0.239	0.127	0.063	0.022
100	0.650	0.548	0.389	0.259	0.139
150	0.844	0.775	0.641	0.503	0.335
200	0.939	0.901	0.815	0.706	0.545
300	0.992	0.985	0.962	0.923	0.841

Таблица 3.30

Мощность критерия Z_A Жанга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.321	0.254	0.170	0.113	0.065
20	0.440	0.368	0.269	0.196	0.128
30	0.523	0.449	0.342	0.258	0.176
40	0.592	0.518	0.406	0.314	0.221
50	0.650	0.578	0.465	0.368	0.266
100	0.845	0.793	0.698	0.600	0.479
150	0.938	0.908	0.847	0.772	0.662
200	0.977	0.963	0.929	0.882	0.800
300	0.997	0.995	0.987	0.974	0.944

Таблица 3.31

Мощность критерия Z_A Жанга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.210	0.153	0.090	0.052	0.025
20	0.259	0.198	0.126	0.080	0.045
30	0.291	0.228	0.149	0.098	0.057
40	0.318	0.252	0.169	0.113	0.070
50	0.340	0.272	0.185	0.126	0.075
100	0.434	0.358	0.256	0.180	0.112
150	0.514	0.435	0.321	0.233	0.148
200	0.588	0.507	0.387	0.289	0.189
300	0.706	0.633	0.512	0.403	0.282

Таблица 3.32

Мощность критерия Z_C Жанга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.163	0.101	0.041	0.017	0.004
20	0.211	0.130	0.049	0.014	0.002
30	0.277	0.179	0.071	0.020	0.002
40	0.348	0.238	0.104	0.033	0.003
50	0.421	0.300	0.142	0.049	0.005
100	0.715	0.599	0.390	0.201	0.045
150	0.879	0.806	0.635	0.420	0.150
200	0.955	0.917	0.808	0.634	0.322
300	0.995	0.988	0.961	0.895	0.688

Таблица 3.33

Мощность критерия Z_C Жанга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.281	0.226	0.158	0.110	0.066
20	0.385	0.331	0.257	0.199	0.137
30	0.467	0.413	0.335	0.269	0.195
40	0.539	0.485	0.405	0.333	0.249
50	0.601	0.548	0.467	0.392	0.299
100	0.815	0.773	0.703	0.628	0.524
150	0.921	0.896	0.848	0.790	0.697
200	0.969	0.956	0.928	0.890	0.820
300	0.995	0.992	0.985	0.974	0.947

Таблица 3.34

Мощность критерия Z_C Жанга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.195	0.142	0.086	0.052	0.026
20	0.236	0.186	0.126	0.086	0.051
30	0.267	0.217	0.155	0.112	0.071
40	0.296	0.245	0.182	0.135	0.089
50	0.321	0.270	0.205	0.156	0.105
100	0.427	0.374	0.302	0.243	0.176
150	0.513	0.460	0.384	0.317	0.238
200	0.589	0.537	0.457	0.386	0.298
300	0.711	0.662	0.584	0.510	0.411

Таблица 3.35

Мощность критерия Z_K Жанга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.176	0.118	0.058	0.028	0.010
20	0.192	0.130	0.066	0.032	0.012
30	0.212	0.144	0.072	0.035	0.013
40	0.240	0.164	0.083	0.041	0.015
50	0.268	0.186	0.096	0.047	0.017
100	0.444	0.334	0.191	0.103	0.042
150	0.618	0.500	0.324	0.193	0.088
200	0.757	0.651	0.465	0.305	0.157
300	0.917	0.856	0.717	0.554	0.349

Таблица 3.36

Мощность критерия Z_K Жанга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.259	0.198	0.126	0.082	0.046
20	0.398	0.326	0.232	0.164	0.103
30	0.498	0.424	0.319	0.238	0.159
40	0.579	0.504	0.392	0.302	0.210
50	0.644	0.569	0.455	0.357	0.254
100	0.844	0.788	0.685	0.579	0.449
150	0.934	0.901	0.827	0.737	0.607
200	0.974	0.955	0.909	0.844	0.733
300	0.995	0.992	0.978	0.953	0.895

Таблица 3.37

Мощность критерия Z_K Жанга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.176	0.123	0.068	0.038	0.018
20	0.221	0.162	0.097	0.058	0.029
30	0.258	0.195	0.123	0.078	0.043
40	0.289	0.225	0.146	0.097	0.055
50	0.316	0.249	0.167	0.111	0.066
100	0.424	0.349	0.248	0.176	0.112
150	0.509	0.430	0.317	0.231	0.151
200	0.580	0.499	0.379	0.284	0.191
300	0.692	0.614	0.492	0.386	0.271

Смещенность критериев Жанга со статистиками Z_C и Z_A по отношению к конкурирующим гипотезам близких к H_1 никем ранее не отмечалась. Этот недостаток заставляет относиться к критериям более осторожно, дублируя выводы с опорой на другие критерии.

3.7. О применении непараметрических критериев согласия

С учетом анализа мощности при проверке нормальности относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 , H_3 непараметрические критерии согласия можно расположить по предпочтению следующим образом:

Андерсона-Дарлинга \succ *Ватсона* \succ *Крамера-Мизеса-Смирнова* \succ
 \succ *Купера* \succ Z_A Жанга \succ Z_C Жанга \succ Z_K Жанга \succ *Колмогорова*.

Критерии Жанга имеют преимущество в мощности относительно близкой конкурирующей гипотезы H_3 . Однако относительно H_1 картина оказывается противоположной. Более того, при проверке нормальности критерии Жанга со статистиками Z_A и Z_C смещены

относительно H_1 . Особенно существенен этот недостаток у критерия со статистикой Z_A .

В табл. 3.38 для возможности сопоставления со специальными критериями нормальности приведены оценки мощности непараметрических критериев согласия относительно H_1 , H_2 и H_3 при $n=50$ и $\alpha=0.1$, указываются недостатки и положительные моменты, характеризующие свойства критериев при проверке нормальности.

Таблица 3.38

Краткие сведения о свойствах и рекомендации по применению для проверки нормальности непараметрических критериев согласия

№	Критерий	Мощность относительно гипотез			Примечание
		H_1	H_2	H_3	
1	Андерсона-Дарлинга	0.287	0.630	0.230	Как правило, отличается наиболее высокой мощностью среди непараметрических критериев согласия.
2	Ватсона	0.293	0.626	0.204	Практически не уступает по мощности критерию Андерсона-Дарлинга.
3	Крамера-Мизеса-Смирнова	0.269	0.621	0.209	Третий по предпочтительности непараметрический критерий согласия.
4	Купера	0.279	0.589	0.192	Как правило, всегда мощнее критерия Колмогорова, но уступает критериям Андерсона-Дарлинга, Ватсона, Крамера-Мизеса-Смирнова.
5	Колмогорова	0.208	0.540	0.181	Относительно всех конкурирующих гипотез по мощности, как правило, уступает остальным.
6	Z_A Жанга	0.239	0.578	0.272	Зависимость распределения статистики от n . Используются таблицы процентных точек. Достаточно высокая мощность

					относительно гипотез H_2 и H_3 . При малых n отмечается существенная смещенность критерия относительно гипотезы H_1 . Рекомендуется применять совместно с другими критериями, которым не свойственны проблемы с распознаванием гипотезы вида H_1 .
7	Z_C Жанга	0.300	0.548	0.270	Зависимость распределения статистики от n . Используются таблицы процентных точек. Достаточно высокая мощность относительно гипотез H_2 и H_3 . При малых n и α отмечается смещенность критерия относительно гипотезы H_1 . Рекомендуется применять совместно с другими критериями, которым не свойственны проблемы с распознаванием гипотезы вида H_1 .
8	Z_K Жанга	0.186	0.569	0.249	Зависимость распределения статистики от n . Используются таблицы процентных точек. Достаточно высокая мощность относительно гипотез H_2 и H_3 . Это, как правило, наименее мощный из критериев Жанга. Но у него нет смещенности относительно гипотезы H_1 , как у критериев со статистиками Z_A и Z_C .

Следует отметить, что критерии Андерсона-Дарлинга, Ватсона и Крамера-Мизеса-Смирнова в некоторых случаях не так уж сильно уступают в мощности специальным критериям нормальности.

4. Критерии согласия типа хи-квадрат при проверке нормальности

4.1. Критерий согласия χ^2 Пирсона

Процедура проверки гипотез с использованием критериев типа χ^2 предусматривает группирование исходной выборки X_1, X_2, \dots, X_n объемом n . Область определения случайной величины разбивают на k непересекающихся интервалов граничными точками

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k,$$

где x_0 – нижняя грань области определения случайной величины; x_k – верхняя грань. В соответствии с заданным разбиением подсчитывают количество наблюдений n_i , попавших в i -й интервал, и вероятности

попадания в интервал $P_i(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \theta) dx$, соответствующие теорети-

ческому закону с функцией плотности $f(x, \theta)$. При этом $n = \sum_{i=1}^k n_i$,

$\sum_{i=1}^k P_i(\theta) = 1$. В основе статистик, используемых в критериях согласия

типа χ^2 , лежит измерение отклонений n_i / n от $P_i(\theta)$.

Статистику критерия согласия χ^2 Пирсона вычисляют по формуле

$$X_n^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(n_i / n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}. \quad (4.1)$$

При справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 (когда известны все параметры теоретического закона) при $n \rightarrow \infty$ эта статистика подчиняется χ_r^2 -распределению с $r = k - 1$ степенями свободы. Плотность χ_r^2 -распределения описывается соотношением

$$g(s) = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} s^{r/2-1} e^{-s/2}.$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, если достигаемый уровень значимости превышает заданный уровень значимости α , то есть выполняется неравенство

$$P\{X_n^2 > X_n^{2*}\} = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} \int_{X_n^{2*}}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds > \alpha, \quad (4.2)$$

где X_n^{2*} – вычисленное в соответствии с формулой (4.1) значение статистики.

В случае проверки сложной гипотезы и справедливости H_0 при условии, что оценки параметров находятся в результате минимизации статистики X_n^2 по этой же самой выборке, статистика X_n^2 асимптотически подчиняется χ_r^2 -распределению с числом степеней свободы $r = k - m - 1$, где m – число оцененных параметров. Статистика X_n^2 имеет это же распределение, если в качестве метода оценивания выбирают метод максимального правдоподобия и оценки вычисляют **по сгруппированным** данным в результате максимизации по θ функции правдоподобия

$$L(\theta) = \gamma \prod_{i=1}^k P_i^{n_i}(\theta), \quad (4.3)$$

где γ – некоторая константа и $P_i(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \theta) dx$ – вероятность

попадания наблюдения в i -й интервал значений, зависящая от θ . Последнее справедливо для любых методов оценивания по группированным данным, приводящим к асимптотически эффективным оценкам.

При проверке согласия с нормальным законом и оценивании вектора параметров $\hat{\theta}^T = (\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ по группированной выборке

минимизацией статистики X_n^2 или максимизацией функции правдоподобия (4.3) вероятности попадания в интервал вычисляются в соответствии с соотношением

$$P_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-t^2/2} dx,$$

где $t_i = (x_i - \hat{\mu}) / \hat{\sigma}$. Проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, если достигнутый уровень значимости $P\{X_n^2 > X_n^{2*}\}$, вычисляемый по соответствующему χ_r^2 -распределению, превышает заданный уровень значимости α или если значение статистики X_n^{2*} меньше критического $\chi_{r,\alpha}^2$, определяемого из уравнения

$$\frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} \int_{\chi_{r,\alpha}^2}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds = \alpha. \quad (4.4)$$

При вычислении оценок максимального правдоподобия (ОМП) по **негруппированным** данным эта же статистика распределена как сумма независимых слагаемых $\chi_{k-m-1}^2 + \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2$, где ξ_1, \dots, ξ_m – стандартные нормальные случайные величины, независимые одна от другой и от χ_{k-m-1}^2 , а $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – некоторые числа между 0 и 1 [9, 104, 97], представляющие собой корни уравнения

$$|(1 - \lambda)\mathbf{J}(\theta) - \mathbf{J}_{\Gamma}(\theta)| = 0.$$

В данном уравнении $\mathbf{J}(\theta)$ – информационная матрица Фишера по негруппированным наблюдениям, элементы которой определяются соотношением

$$J(\theta_l, \theta_j) = \int \left(\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_l} \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_j} \right) f(x, \theta) dx, \quad (4.5)$$

а $\mathbf{J}_{\Gamma}(\theta)$ – информационная матрица по группированным наблюдениям

$$\mathbf{J}_\Gamma(\theta) = \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta)}{P_i(\theta)}. \quad (4.6)$$

Другими словами, распределение статистики (4.1) при использовании ОМП по негруппированным данным неизвестно и зависит, в том числе, от способа группирования. Эта неизвестная функция распределения статистики при k интервалах лежит между χ_{k-1}^2 - и χ_{k-m-1}^2 -распределениями.

При проверке нормальности с оцениванием по выборке ОМП параметров μ и σ по негруппированным данным можно воспользоваться таблицами асимптотически оптимального группирования А.7, А.8, приведенными в приложении А. При асимптотически оптимальном группировании минимизируются потери в информации Фишера о параметрах закона, связанные с группированием [69, 13, 103, 70, 102]. При использовании асимптотически оптимального группирования критерий χ^2 Пирсона обладает максимальной мощностью относительно очень близких конкурирующих гипотез [68, 76, 77, 103].

Для ситуации использования в критерии χ^2 Пирсона таблиц асимптотически оптимального группирования полученные процентные точки представлены в таблице 4.1, а построенные модели предельных распределений статистики (4.1) – в таблице 4.2, где через $V_{III}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ обозначено бета-распределение III рода (3.2).

В таблице А.7 граничные точки интервалов t_i , $i = 1, (k-1)$, приведены в виде, инвариантном относительно параметров μ и σ нормального закона. При вычислении статистики (4.1) границы x_i , разделяющие интервалы при данном k , находятся по значениям t_i , взятым из соответствующей строки таблицы, по соотношениям

$$x_i = \hat{\sigma} t_i + \hat{\mu},$$

где $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ – ОМП параметров, найденные по данной выборке. Затем подсчитывается число наблюдений n_i , попавших в каждый интервал. Вероятности попадания в интервал при вычислении значения статистики (4.1) берутся из соответствующей строки таблицы А.8.

Для принятия решения о результатах проверки гипотезы H_0

значение статистики X_n^{2*} сравнивается с соответствующим критическим $\tilde{\chi}_{k,\alpha}^2$, взятым из таблицы 4.1, или достигнутый уровень значимости $P\{X_n^2 > X_n^{2*}\}$ может быть найден по модели предельного закона, приведенной в соответствующей строке таблицы 4.2.

При проверке нормальности с вычислением по негруппированной выборке ОМП только параметра сдвига μ используется таблица асимптотически оптимальных граничных точек А.9 и таблица с соответствующими вероятностями попадания в интервалы А.10. Процентные точки представлены в таблице 4.3, а построенные модели предельных распределений статистики (4.1) – в таблице 4.4.

При проверке нормальности с вычислением по негруппированной выборке ОМП только параметра σ используются соответственно таблицы А.11 и А.12, процентные точки – из таблицы 4.5, а модели предельных распределений статистики (4.1) – из таблицы 4.6.

Таблица 4.1

Процентные точки $\tilde{\chi}_{k,\alpha}^2$ для статистики критерия Пирсона при оценивании параметров μ и σ

k	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
4	2.74	3.37	4.48	5.66	7.26
5	4.18	5.00	6.39	7.77	9.59
6	5.61	6.54	8.09	9.61	11.62
7	6.95	7.98	9.67	11.31	13.43
8	8.28	9.40	11.21	12.95	15.22
9	9.56	10.76	12.69	14.53	16.87
10	10.84	12.11	14.16	16.12	18.58
11	12.08	13.42	15.55	17.59	20.19
12	13.34	14.74	16.98	19.10	21.77
13	14.56	16.01	18.34	20.53	23.30
14	15.78	17.29	19.68	21.96	24.81
15	16.98	18.54	21.04	23.40	26.37

Таблица 4.2

Модели предельных распределений статистики критерия Пирсона при оценивании параметров μ и σ

k	Модель предельного распределения
4	$V_{III}(1.2463, 3.8690, 4.6352, 19.20, 0.005)$
5	$V_{III}(1.7377, 3.8338, 5.5721, 26.00, 0.005)$
6	$V_{III}(2.1007, 4.1518, 4.1369, 26.00, 0.005)$
7	$V_{III}(2.5019, 4.6186, 3.4966, 28.00, 0.005)$
8	$V_{III}(2.9487, 5.8348, 3.1706, 34.50, 0.005)$
9	$V_{III}(3.5145, 6.3582, 3.2450, 39.00, 0.005)$
10	$V_{III}(3.9756, 6.7972, 3.0692, 41.50, 0.005)$
11	$V_{III}(4.4971, 6.9597, 3.0145, 43.00, 0.005)$
12	$V_{III}(5.1055, 7.0049, 3.1130, 45.00, 0.005)$
13	$V_{III}(5.7809, 7.0217, 3.2658, 47.00, 0.005)$
14	$V_{III}(6.6673, 6.9116, 3.5932, 49.00, 0.005)$
15	$V_{III}(7.0919, 7.2961, 3.4314, 51.50, 0.005)$

Таблица 4.3

Процентные точки $\tilde{\chi}_{k,\alpha}^2$ для статистики критерия Пирсона при оценивании параметра μ

k	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
3	2.28	2.91	4.05	5.24	6.88
4	3.91	4.73	6.13	7.50	9.34
5	5.40	6.33	7.88	9.41	11.43
6	6.80	7.84	9.55	11.21	13.35
7	8.16	9.28	11.10	12.88	15.12
8	9.48	10.67	12.63	14.50	16.88
9	10.76	12.03	14.07	16.03	18.51
10	12.03	13.38	15.54	17.57	20.12

Таблица 4.4

Модели предельных распределений статистики критерия Пирсона при оценивании параметра μ

k	Модель предельного распределения
3	$V_{III}(0.9303, 2.6786, 6.3910, 17.50, 0.0)$
4	$V_{III}(1.3312, 2.8943, 4.1987, 17.50, 0.0)$
5	$V_{III}(1.7299, 4.6404, 3.2091, 26.40, 0.0)$
6	$V_{III}(2.1573, 6.9195, 2.7378, 37.00, 0.0)$
7	$V_{III}(2.6458, 7.3216, 2.6338, 39.25, 0.0)$
8	$V_{III}(3.2779, 7.0733, 2.9445, 41.50, 0.0)$
9	$V_{III}(3.8346, 7.1893, 2.9863, 43.50, 0.0)$
10	$V_{III}(4.3061, 7.5295, 2.8037, 44.70, 0.0)$

Таблица 4.5

Процентные точки $\tilde{\chi}_{k,\alpha}^2$ для статистики критерия Пирсона при оценивании параметра σ

k	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
3	2.58	3.19	4.28	5.47	7.04
4	4.10	4.91	6.29	7.68	9.51
5	5.51	6.44	8.00	9.53	11.50
6	6.89	7.92	9.62	11.26	13.39
7	8.21	9.33	11.14	12.91	15.16
8	9.52	10.70	12.66	14.53	16.94
9	10.79	12.06	14.10	16.06	18.59
10	12.05	13.38	15.54	17.60	20.23

Выбор числа интервалов. В таблицах приложения А.7–А.12 приведены значения относительной асимптотической информации Фишера, представляющие собой отношение

$$A = \det \mathbf{J}_\Gamma / \det \mathbf{J},$$

или отношение диагональных элементов соответствующих матриц.

При асимптотически оптимальном группировании относительно скалярного параметра и 10 или 11 интервалах в группированной выборке сохраняется около 98 % информации, при оптимальном группировании относительно вектора параметров и 15 интервалах – около 95 %. Дальнейшее увеличение числа интервалов существенного значения не имеет.

Таблица 4.6

Модели предельных распределений статистики критерия Пирсона при оценивании параметра σ

k	Модель предельного распределения
3	$V_{III}(1.0072, 3.6984, 4.6169, 20.00, 0.0)$
4	$V_{III}(1.5066, 3.5866, 4.6469, 23.00, 0.0)$
5	$V_{III}(1.9163, 4.4054, 3.7559, 27.00, 0.0)$
6	$V_{III}(2.2806, 6.9877, 2.8052, 37.00, 0.0)$
7	$V_{III}(2.7512, 7.3733, 2.6850, 39.25, 0.0)$
8	$V_{III}(3.3668, 7.1166, 2.9765, 41.50, 0.0)$
9	$V_{III}(3.9482, 7.1903, 3.0554, 43.50, 0.0)$
10	$V_{III}(4.6476, 7.3571, 3.1020, 44.70, 0.0)$

Конкретное число интервалов при асимптотически оптимальном группировании следует выбирать исходя из следующих соображений. При оптимальном группировании вероятности попадания в интервалы в общем случае не равны. Обычно минимальны вероятности попадания в крайние интервалы. Поэтому k желательно выбирать из условия $nP_i(\theta) \geq 5 \dots 10$ для любого интервала при оптимальном группировании.

По крайней мере, при выборе k следует придерживаться рекомендации $\min_i \{nP_i(\theta)\} > 1$. При выполнении этого условия дискретное распределение статистики (4.1) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 несущественно отличается от соответствующего асимптотического предельного распределения. При нарушении этого условия отличие истинного распределения

статистики от предельного будет приводить к увеличению вероятности ошибок 1-го рода по сравнению с заданным уровнем значимости α .

Следует учитывать, что при малых объемах выборок $n=10 \div 20$ дискретные распределения статистик существенно отличаются от асимптотических.

Условие $\min_i \{nP_i(\theta)\} > 1$ при выборе k ограничивает число интервалов сверху. Число интервалов группирования влияет на мощность критерия χ^2 Пирсона [78, 81, 82]. Совсем необязательно, что мощность критерия против интересующего нас конкурирующего закона (конкурирующей гипотезы) будет максимальной при верхней границе числа интервалов. В определенной степени при выборе k можно ориентироваться на оценки мощности критерия относительно рассматриваемых в руководстве конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 (в зависимости от k при различных n), представленные в таблицах 4.7–4.9.

Оценки мощности критерия χ^2 Пирсона по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 4.7, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 4.8 и 4.9 соответственно. При заданных n полужирным шрифтом выделены максимальные мощности при оптимальном выборе k .

Таблица 4.7

Мощность критерия χ^2 Пирсона относительно гипотезы H_1

n	k	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	4	0.235	0.146	0.043	0.032	0.002
20	4	0.211	0.146	0.068	0.048	0.018
	5	0.262	0.177	0.100	0.058	0.021
30	4	0.192	0.146	0.076	0.042	0.019
	5	0.312	0.216	0.136	0.079	0.043
40	4	0.200	0.133	0.074	0.041	0.022
	5	0.336	0.267	0.168	0.111	0.061
	6	0.304	0.218	0.126	0.077	0.035
	7	0.270	0.186	0.096	0.054	0.024

50	4	0.201	0.131	0.074	0.044	0.018
	5	0.401	0.311	0.204	0.129	0.068
	6	0.352	0.269	0.159	0.095	0.047
	7	0.310	0.220	0.130	0.071	0.032
100	4	0.208	0.150	0.083	0.045	0.020
	5	0.558	0.479	0.352	0.254	0.158
	6	0.555	0.461	0.328	0.227	0.130
	7	0.550	0.449	0.306	0.200	0.102
	8	0.482	0.380	0.247	0.155	0.081
	9	0.447	0.354	0.228	0.145	0.079
	10	0.427	0.333	0.218	0.138	0.070
150	6	0.698	0.617	0.490	0.376	0.253
	7	0.722	0.634	0.486	0.353	0.217
	8	0.673	0.573	0.415	0.287	0.165
	9	0.628	0.524	0.376	0.262	0.158
	10	0.600	0.504	0.365	0.256	0.155
200	9	0.783	0.695	0.548	0.417	0.279
	10	0.750	0.662	0.520	0.393	0.254
	11	0.722	0.638	0.501	0.376	0.243
300	11	0.907	0.858	0.756	0.646	0.492
	12	0.887	0.832	0.724	0.813	0.464
	13	0.885	0.828	0.719	0.595	0.440

Таблица 4.8

Мощность критерия χ^2 Пирсона относительно гипотезы H_2

n	k	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	4	0.267	0.206	0.074	0.058	0.01
20	4	0.264	0.177	0.104	0.067	0.037
	5	0.247	0.189	0.116	0.061	0.024
30	4	0.237	0.179	0.107	0.060	0.031
	5	0.312	0.261	0.153	0.103	0.044
40	4	0.254	0.189	0.114	0.067	0.037
	5	0.399	0.314	0.207	0.132	0.079

	6	0.359	0.282	0.192	0.121	0.063
	7	0.443	0.358	0.250	0.167	0.101
50	4	0.289	0.198	0.124	0.074	0.039
	5	0.491	0.381	0.259	0.168	0.095
	6	0.398	0.315	0.211	0.140	0.080
	7	0.500	0.423	0.312	0.225	0.138
100	4	0.328	0.252	0.158	0.099	0.052
	5	0.740	0.666	0.534	0.416	0.295
	6	0.592	0.507	0.374	0.268	0.164
	7	0.759	0.692	0.581	0.482	0.359
	8	0.692	0.618	0.499	0.392	0.273
	9	0.770	0.708	0.596	0.494	0.379
	10	0.741	0.672	0.563	0.458	0.332
150	6	0.736	0.659	0.532	0.415	0.286
	7	0.896	0.855	0.774	0.687	0.571
	8	0.832	0.775	0.675	0.573	0.444
	9	0.899	0.860	0.785	0.705	0.596
	10	0.873	0.827	0.743	0.653	0.538
200	9	0.962	0.943	0.903	0.854	0.778
	10	0.944	0.918	0.865	0.801	0.702
	11	0.964	0.946	0.908	0.880	0.786
300	11	0.996	0.993	0.985	0.973	0.949
	12	0.994	0.989	0.978	0.962	0.930
	13	0.996	0.993	0.985	0.974	0.950

Таблица 4.9

Мощность критерия χ^2 Пирсона относительно гипотезы H_3

n	k	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	4	0.221	0.150	0.046	0.034	0.003
20	4	0.194	0.125	0.059	0.038	0.016
	5	0.159	0.112	0.058	0.027	0.010
30	4	0.160	0.117	0.058	0.028	0.012
	5	0.169	0.125	0.062	0.034	0.012

40	4	0.169	0.113	0.059	0.029	0.014
	5	0.188	0.128	0.067	0.035	0.016
	6	0.189	0.134	0.075	0.039	0.016
	7	0.204	0.143	0.082	0.045	0.020
50	4	0.188	0.113	0.060	0.030	0.012
	5	0.208	0.143	0.073	0.038	0.016
	6	0.196	0.137	0.076	0.042	0.018
	7	0.214	0.155	0.088	0.050	0.023
100	4	0.192	0.134	0.069	0.036	0.014
	5	0.264	0.193	0.108	0.061	0.029
	6	0.244	0.176	0.100	0.056	0.024
	7	0.269	0.201	0.123	0.074	0.037
	8	0.276	0.209	0.126	0.075	0.037
	9	0.289	0.220	0.135	0.084	0.044
	10	0.303	0.231	0.146	0.090	0.047
150	6	0.296	0.220	0.133	0.078	0.038
	7	0.326	0.248	0.157	0.097	0.051
	8	0.329	0.252	0.160	0.100	0.052
	9	0.346	0.267	0.173	0.110	0.062
	10	0.359	0.284	0.191	0.124	0.072
200	9	0.407	0.328	0.225	0.152	0.090
	10	0.419	0.338	0.237	0.161	0.093
	11	0.432	0.355	0.250	0.175	0.105
300	11	0.543	0.462	0.346	0.256	0.165
	12	0.548	0.469	0.351	0.263	0.175
	13	0.566	0.486	0.373	0.280	0.190

4.2. Критерий согласия Никулина–Рао–Робсона

В работах [97, 98, 45] предложено видоизменение стандартной статистики X_n^2 , при котором предельное распределение есть обычное χ_{k-1}^2 -распределение (число степеней свободы не зависит от числа оцениваемых параметров). Неизвестные параметры распределения $F(x, \theta)$ в этом случае следует оценивать по негруппированным

данным методом максимального правдоподобия. При этом вектор $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_k)^T$ предполагают заданным, и граничные точки интервалов определяют по соотношениям $x_i(\theta) = F^{-1}(P_1 + \dots + P_i)$, $i = \overline{1, (k-1)}$. Предложенная статистика имеет вид [98]

$$Y_n^2(\theta) = X_n^2 + n^{-1} a^T(\theta) \Lambda(\theta) a(\theta), \quad (4.7)$$

где X_n^2 вычисляется по формуле (4.1).

Для законов распределения, определяемых только параметрами сдвига и масштаба,

$$\Lambda(\theta) = [\mathbf{J}(\theta) - \mathbf{J}_\Gamma(\theta)]^{-1}. \quad (4.8)$$

В случае нормального закона с вектором параметров $\theta^T = (\mu, \sigma)$ информационная матрица Фишера имеет вид

$$\mathbf{J}(\theta) = \begin{bmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 2/\sigma^2 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

элементы информационной матрицы по группированным данным $\mathbf{J}_\Gamma(\theta)$ определяются выражениями

$$J_\Gamma(\mu, \mu) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma^2 P_i(\theta)} (f(t_{i-1}) - f(t_i))^2,$$

$$J_\Gamma(\sigma, \sigma) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma^2 P_i(\theta)} (t_{i-1} f(t_{i-1}) - t_i f(t_i))^2,$$

$$J_\Gamma(\mu, \sigma) = J_\Gamma(\sigma, \mu) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma^2 P_i(\theta)} (f(t_{i-1}) - f(t_i))(t_{i-1} f(t_{i-1}) - t_i f(t_i)),$$

где $t_i = (x_i - \mu) / \sigma$, $t_0 = -\infty$, $t_k = \infty$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ – плотность стандартного нормального закона. Элементы вектора $a^T(\theta) = [a(\mu), a(\sigma)]$ находятся из соотношений

$$a(\mu) = \sum_{i=1}^k \frac{n_i (f(t_{i-1}) - f(t_i))}{\sigma P_i(\theta)},$$

$$a(\sigma) = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{\sigma P_i(\theta)} (t_{i-1} f(t_{i-1}) - t_i f(t_i)).$$

Как и в случае критерия Пирсона **при проверке нормальности** с оценением по выборке ОМП параметров μ и σ по негруппированным данным можно воспользоваться таблицами асимптотически оптимального группирования А.7, А.8 приложения А.

При вычислении статистики (4.7) границы x_i , разделяющие интервалы при данном k , находятся по значениям t_i , взятым из соответствующей строки таблицы, в соответствии с соотношением

$$x_i = \hat{\sigma} t_i + \hat{\mu},$$

где $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ – ОМП параметров, найденные по данной выборке. Затем подсчитывается число наблюдений n_i , попавших в каждый интервал. Вероятности $P_i(\theta)$ попадания в интервал при вычислении значения статистики (4.7) берутся из соответствующей строки таблицы А.8. При вычислении элементов вектора $a(\theta)$ и матрицы $\Lambda(\theta)$ используются табличные значения t_i и P_i и полученные оценки $\hat{\sigma}$.

Для принятия решения о результатах проверки гипотезы H_0 значение статистики Y_n^{2*} сравнивается с соответствующим критическим $\chi_{k-1, \alpha}^2$ или достигнутый уровень значимости $P\{Y_n^2 > Y_n^{2*}\}$ находится по соответствующему χ_{k-1}^2 -распределению.

При проверке нормальности с вычислением по негруппированной выборке только ОМП параметра сдвига μ используется таблица асимптотически оптимальных граничных точек А.9 и таблица с соответствующими вероятностями попадания в интервалы А.10. В этом случае при вычислении статистики (4.7) в векторе $a(\theta)$ и в матрице $\Lambda(\theta)$ остаются только элементы, связанные с μ .

При проверке нормальности с вычислением по негруппированной выборке только ОМП параметра σ используются соответственно

таблицы А.11 и А.12, а при вычислении статистики (4.7) в векторе $a(\theta)$ и в матрице $\Lambda(\theta)$ остаются только элементы, связанные с σ .

Оценки мощности критерия Никулина-Рао-Робсона по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 4.10, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 4.11 и 4.12 соответственно. Чтобы показать зависимость мощности от числа интервалов k , оценки для конкретных n приведены для различного числа интервалов, заканчивая максимально возможным, задаваемым ограничением $\min_i \{nP_i(\theta)\} > 1$. Полужирным шрифтом выделены максимальные оценки, соответствующие оптимальному выбору k .

Критерий Никулина-Рао-Робсона, как правило, оказывается мощнее критерия Пирсона (см., например, мощности относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3). При этом оптимальное число интервалов оказывается максимально возможным. Однако так бывает не всегда. По мощности относительно “каверзной” гипотезы H_1 критерий Никулина-Рао-Робсона уступает критерию Пирсона, а оптимальное число интервалов в этом случае заметно меньше максимально возможного (при асимптотически оптимальном группировании).

Таблица 4.10

Мощность критерия Никулина–Рао–Робсона относительно гипотезы H_1

n	k	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	4	0.348	0.1	0.029	0.009	0.006
20	4	0.138	0.107	0.050	0.024	0.007
	5	0.234	0.143	0.074	0.041	0.016
30	4	0.185	0.133	0.077	0.036	0.017
	5	0.256	0.197	0.102	0.053	0.023
	6	0.213	0.143	0.070	0.036	0.017
40	4	0.197	0.133	0.069	0.040	0.019
	5	0.293	0.221	0.123	0.079	0.035
	6	0.253	0.180	0.097	0.049	0.020

	7	0.227	0.149	0.080	0.042	0.018
50	4	0.205	0.135	0.069	0.040	0.017
	5	0.326	0.240	0.148	0.083	0.040
	6	0.296	0.220	0.120	0.069	0.030
	7	0.250	0.184	0.098	0.051	0.021
100	4	0.207	0.148	0.085	0.045	0.022
	5	0.485	0.395	0.271	0.179	0.102
	6	0.475	0.381	0.250	0.160	0.084
	7	0.469	0.367	0.231	0.137	0.068
	8	0.411	0.314	0.192	0.117	0.059
	9	0.392	0.300	0.188	0.115	0.059
150	10	0.375	0.288	0.179	0.105	0.051
	6	0.619	0.530	0.397	0.284	0.179
	7	0.641	0.539	0.383	0.261	0.148
	8	0.592	0.485	0.329	0.216	0.120
	9	0.555	0.451	0.309	0.206	0.120
200	10	0.541	0.442	0.310	0.208	0.116
	9	0.713	0.616	0.464	0.339	0.214
	10	0.688	0.594	0.449	0.325	0.209
300	11	0.672	0.579	0.435	0.314	0.194
	11	0.872	0.810	0.695	0.573	0.420
	12	0.851	0.786	0.665	0.541	0.402
	13	0.850	0.786	0.662	0.533	0.376

Таблица 4.11

Мощность критерия Никулина–Рао–Робсона относительно гипотезы H_2

n	k	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	4	0.368	0.103	0.055	0.031	0.007
20	4	0.209	0.173	0.101	0.065	0.025
	5	0.250	0.210	0.126	0.065	0.039
30	4	0.257	0.188	0.119	0.084	0.043
	5	0.345	0.262	0.181	0.123	0.078
	6	0.349	0.265	0.185	0.127	0.078

40	4	0.264	0.214	0.145	0.095	0.054
	5	0.416	0.329	0.263	0.176	0.114
	6	0.401	0.320	0.231	0.159	0.101
	7	0.474	0.403	0.297	0.218	0.149
50	4	0.305	0.242	0.156	0.101	0.057
	5	0.494	0.409	0.314	0.219	0.151
	6	0.443	0.372	0.268	0.197	0.128
	7	0.548	0.473	0.365	0.281	0.190
100	4	0.380	0.311	0.213	0.156	0.095
	5	0.756	0.691	0.587	0.492	0.392
	6	0.739	0.562	0.449	0.356	0.257
	7	0.791	0.736	0.646	0.558	0.457
	8	0.739	0.676	0.575	0.485	0.379
	9	0.807	0.755	0.667	0.583	0.482
	10	0.784	0.728	0.637	0.548	0.444
150	6	0.771	0.710	0.607	0.511	0.402
	7	0.913	0.881	0.820	0.756	0.667
	8	0.864	0.820	0.743	0.663	0.562
	9	0.919	0.889	0.834	0.774	0.691
	10	0.901	0.866	0.804	0.735	0.643
200	9	0.971	0.956	0.928	0.895	0.841
	10	0.958	0.939	0.902	0.855	0.791
	11	0.973	0.961	0.933	0.900	0.849
300	11	0.997	0.995	0.990	0.983	0.968
	12	0.996	0.993	0.986	0.975	0.956
	13	0.997	0.995	0.990	0.983	0.968

Таблица 4.12

Мощность критерия Никулина–Рао–Робсона относительно гипотезы H_3

n	k	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	4	0.321	0.083	0.034	0.014	0.005
20	4	0.151	0.120	0.055	0.029	0.009
	5	0.166	0.120	0.065	0.030	0.014

30	4	0.169	0.118	0.060	0.035	0.015
	5	0.193	0.137	0.075	0.042	0.023
	6	0.198	0.138	0.080	0.047	0.024
40	4	0.171	0.126	0.072	0.039	0.017
	5	0.208	0.147	0.092	0.053	0.027
	6	0.218	0.156	0.095	0.054	0.028
	7	0.232	0.173	0.104	0.063	0.034
50	4	0.192	0.138	0.072	0.036	0.017
	5	0.227	0.166	0.100	0.056	0.031
	6	0.230	0.172	0.102	0.063	0.033
	7	0.251	0.188	0.117	0.074	0.040
100	4	0.240	0.143	0.090	0.056	0.016
	5	0.307	0.233	0.152	0.100	0.059
	6	0.296	0.226	0.144	0.093	0.054
	7	0.327	0.260	0.176	0.120	0.074
	8	0.333	0.262	0.177	0.124	0.076
	9	0.347	0.279	0.193	0.134	0.086
	10	0.360	0.290	0.202	0.141	0.091
150	6	0.355	0.284	0.192	0.129	0.078
	7	0.394	0.321	0.225	0.160	0.102
	8	0.395	0.322	0.228	0.163	0.107
	9	0.413	0.341	0.245	0.179	0.121
	10	0.432	0.358	0.263	0.195	0.131
200	9	0.488	0.412	0.311	0.235	0.163
	10	0.498	0.425	0.322	0.244	0.173
	11	0.509	0.436	0.337	0.259	0.183
300	11	0.624	0.553	0.447	0.359	0.267
	12	0.626	0.556	0.450	0.362	0.277
	13	0.641	0.572	0.469	0.381	0.288

4.3. О применении критериев согласия типа χ^2

При проверке гипотез о принадлежности анализируемых данных нормальному закону (с оценением по выборке параметров нормального закона) критерии типа χ^2 уступают в мощности

непараметрическим критериям согласия. Критерий согласия χ^2 Пирсона обладает преимуществом в мощности перед непараметрическими критериями в случае проверки простых гипотез [86], когда по выборке параметры нормального закона не оцениваются. Это при условии, что используется асимптотически оптимальное группирование.

Как можно заметить по таблицам с оценками мощности, мощность существенно зависит от выбранного числа интервалов.

В общем случае применения критериев согласия типа χ^2 мощность критерия относительно заданной пары конкурирующих гипотез можно максимизировать за счет выбора оптимального числа интервалов и оптимальных границ интервалов [76, 77, 78].

При проверке нормальности по критериям, описанным в данном разделе, существует возможность выбора только числа интервалов с ограничением этого числа сверху, но способ разбиения на интервалы зафиксирован.

Аналогично таблицам 2.36 и 3.38 в табл. 4.13 для возможности сопоставления с другими критериями приведены максимальные значения оценок мощности (при оптимальном k) критериев согласия χ^2 Пирсона и Никулина-Рао-Робсона относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 при $n = 50$ и $\alpha = 0.1$.

Таблица 4.13

Краткие сведения о свойствах и рекомендации по применению для проверки нормальности критериев типа χ^2

№	Критерий	Мощность относительно гипотез			Примечание
		H_1	H_2	H_3	
1	X_n^2 Пирсона	0.311	0.423	0.155	$k = 5$ относительно H_1 , $k = 7$ относительно H_2 , $k = 7$ относительно H_3 .
2	X_n^2 Никулина-Рао-Робсона	0.240	0.473	0.188	$k = 5$ относительно H_1 , $k = 7$ относительно H_2 , $k = 7$ относительно H_3 .

В последней графе указано количество интервалов, при котором получены максимальные оценки мощности.

Хотя при проверке нормальности критерии согласия типа χ^2 уступают в мощности непараметрическим критериям согласия и большинству специальных критериев, не следует отказываться от их применения. Хотя в целом они уступают по мощности, у критериев, описанных в разделах 4.1 и 4.2, не отмечается недостатков, имеющих, например, у таких критериев нормальности, как Шапиро-Уилка, Хегази-Грина или Шпигельхальтера, или у непараметрических критериев Жанга со статистиками Z_A и Z_C .

5. Анализ погрешностей измерений в классических экспериментах

5.1. О роли проверки нормальности

Для реально наблюдаемых случайных величин любая параметрическая модель, в том числе нормальный закон, может служить лишь приближением, с некоторой точностью описывающей эту случайную величину. Если проверяемая гипотеза о принадлежности выборки наблюдений случайной величины нормальному закону не отклоняется, это не говорит ещё о том, что истинным законом для этой случайной величины является нормальный. Это свидетельствует лишь о том, что расстояние между эмпирическим распределением и нормальным законом, измеренное в соответствии с используемым критерием, не настолько велико, чтобы служить основанием для отклонения гипотезы. И, по-видимому, говорит о том, что нормальный закон является неплохим приближением для неизвестного истинного.

Неотклонение проверяемой гипотезы H_0 о принадлежности нормальному закону открывает возможность на дальнейших этапах статистического анализа использовать множество классических методов и критериев проверки статистических гипотез, корректность применения которых обусловлена принадлежностью наблюдений (или ошибок измерений) нормальному закону.

Поэтому при статистическом анализе результатов измерений первым из проверяемых предположений обычно является проверка гипотезы о принадлежности ошибок нормальному закону. Если гипотеза о нормальности не отвергается, то дальнейший анализ становится проще, так как в его рамках открывается возможность использования множества классических критериев, применение которых корректно только при выполнении предположения о нормальности.

При проведении экспериментальных исследований нельзя исключать возможного наличия факторов, которые могут приводить к систематическим ошибкам, к смещенности оценок параметров, к коррелированности результатов измерений, к появлению тренда в той или иной форме. Далеко не всегда (практически никогда) реальные измерения (ошибки измерений) представляют собой выборки

независимых одинаково распределенных нормальных величин. Поэтому и гипотеза о принадлежности нормальному закону ошибок измерений правомерно может отклоняться.

Сама по себе такая ситуация (отклонение гипотезы о нормальности) не является чем-то из ряда выходящим, однако приводит к появлению вопросов, связанных с обеспечением точности измерений и обеспечением корректности дальнейших статистических выводов, так как исключается возможность применения арсенала классических методов, опирающихся на предположение о нормальном законе.

Результаты классических экспериментов, связанных с измерениями физических констант, привлекают интерес не только в силу их исторической ценности, но и как примеры высокого уровня организации и проведения соответствующих измерений. Принято считать, что ошибки измерений в этих экспериментах подчиняются нормальному закону. Чтобы убедиться в этом, к проверке гипотез о принадлежности ошибок измерений в таких экспериментах нормальному закону возвращались неоднократно, причем, с использованием различных критериев. В некоторых случаях, анализируя классические результаты, авторы работ сравнивают используемые критерии по мощности [56] относительно определенных конкурирующих гипотез. Приводимые оценки мощности позволяют судить о степени уверенности в том, что ошибки в данных экспериментах действительно подчиняются нормальному закону.

В то же время у специалистов в области математической статистики до сих пор нет однозначного мнения относительно преимуществ какого-либо критерия или группы критериев из множества, применяемых для проверки гипотез о принадлежности выборок случайных величин нормальному закону. Особую остроту ответ на этот вопрос приобретает при достаточно ограниченных объемах выборок, которые характерны не только для классических экспериментов.

В последнее время интерес к критериям, используемым для проверки нормальности, заметно повысился [14, 16]. Возрос интерес к непараметрическим критериям согласия, применяемым для этих целей [47, 42]. Появились работы, посвященные сравнительному анализу и исследованию мощности модифицированных критериев типа χ^2 , используемых для проверки нормальности [55]. При этом в проводимых исследованиях возрастает роль методов статистического

моделирования.

Сталкиваясь с разрозненными примерами анализа классических результатов, не возникает полноты картины и уверенности в том, что нормальный закон в этих экспериментах наилучшим образом описывает ошибки измерений, и что для проверки гипотез о принадлежности ошибок измерений нормальному закону используются наиболее мощные критерии.

В разделе 2 приведены результаты работ [84, 88], в которых были подробно исследованы свойства и мощность ряда критериев, предназначенных только для проверки нормальности. Эти исследования позволили, с одной стороны, проранжировать исследуемые критерии по мощности относительно рассмотренных конкурирующих законов, а, с другой стороны, выявили существенные недостатки некоторых критериев. Сравнительный анализ мощности критериев согласия, в том числе при проверке нормальности, осуществлялся в работах [30, 32, 33, 85, 86, 87].

Специалист в конкретной области, анализирующий результаты измерений, может не обладать достаточной квалификацией во всём множестве методов статистического анализа, но ему желательно знать, какие критерии и в каком случае наиболее предпочтительны. Поэтому цель проводимого в данном разделе анализа заключается в следующем. Во-первых, продемонстрировать при использовании различных критериев результаты проверки нормальности ошибок измерений, проведенных при выполнении некоторых классических экспериментов. Во-вторых, оценить мощность применяемых критериев относительно тех возможных конкурирующих законов (конкурирующих гипотез), которые, как и нормальный закон, достаточно хорошо описывают эти ошибки. Анализ мощности провести при тех объемах выборок, которые соответствуют объемам выборок в рассматриваемых экспериментах.

5.2. Анализируемые эксперименты

В работе [54] отобран ряд экспериментов, удовлетворяющих довольно строгим требованиям. В данном случае рассматривается четыре эксперимента, измерения в которых проводились высококвалифицированными учеными. Измерялись хорошо известные в настоящий момент величины, а обработка характеризовалась скрупулезным устранением погрешностей, поддающихся учету.

Измерения в выборках фиксировались полностью и без пропусков (и без цензурирования).

Генри Кавендиш провел эксперимент по определению средней плотности Земли. Результаты 29 его измерений приведены в таблице 5.1.

Роберт Милликен провел эксперимент с заряженными каплями масла для измерения заряда электрона, и его результаты представлены в таблице 5.2.

Таблица 5.3 включает 100 наблюдений Альберта Майкельсона в опыте по измерению скорости света. Измерялось время прохождения света (туда и обратно) между быстро вращающимся и отстоящим от первого неподвижно закрепленным зеркалом. Расстояние между зеркалами составило приблизительно 605 метров (1986.23 фута).

Таблица 5.1

Измерения средней плотности Земли, полученные Генри Кавендишем, (г/см³).

5.50	5.55	5.57	5.34	5.42	5.30
5.61	5.36	5.53	5.79	5.47	5.75
4.88	5.29	5.62	5.10	5.63	5.68
5.07	5.58	5.29	5.27	5.34	5.85
5.26	5.65	5.44	5.39	5.46	

Таблица 5.2

Измерения заряда электрона, полученные Робертом Милликенем, ($\Phi_r = 1/2 \cdot 997\,924\,580$ Кл)

4.781	4.764	4.777	4.809	4.761	4.769
4.795	4.776	4.765	4.790	4.792	4.806
4.769	4.771	4.785	4.779	4.758	4.779
4.792	4.789	4.805	4.788	4.764	4.785
4.779	4.772	4.768	4.772	4.810	4.790
4.775	4.789	4.801	4.791	4.799	4.777
4.772	4.764	4.785	4.788	4.799	4.749
4.791	4.774	4.783	4.783	4.797	4.781
4.782	4.778	4.808	4.740	4.790	
4.767	4.791	4.771	4.775	4.747	

Таблица 5.3

Измерения Майкельсона (+299000 км/ч)

850	1000	960	830	880	880	890	910	890	870
740	980	940	790	880	910	810	920	840	870
900	930	960	810	880	850	810	890	780	810
1070	650	940	880	860	870	820	860	810	740
930	760	880	880	720	840	800	880	760	810
850	810	800	830	720	840	770	720	810	940
950	1000	850	800	620	850	760	840	790	950
980	1000	880	790	860	840	740	850	810	800
980	960	900	760	970	840	750	850	820	810
880	960	840	800	950	840	760	780	850	870

Саймон Ньюкомб тремя годами позже провел более обширный эксперимент и уточнил результаты Альберта Майкельсона. Расстояние между зеркалами составило 3721.21 м. В таблице 5.4 приведены 66 полученных значений.

Результаты измерений Кавендиша, Майкельсона и Ньюкомба приводятся по работе [54], а Милликена – по статье [43].

Таблица 5.4

Измерения Саймона Ньюкомба ($\times 10^{-3} + 24.8$, в миллионных долях секунды)

28	29	24	37	36	26	29
26	22	20	25	23	32	27
33	24	36	28	27	32	28
24	21	32	26	27	24	29
34	25	36	30	28	39	16
-44	30	28	32	27	28	23
27	23	25	36	31	24	
16	29	21	26	27	25	
40	31	28	30	26	32	
-2	19	29	22	33	25	

5.3. Рассматриваемые критерии нормальности

Выражения статистик, используемых в данном случае критериев, приведены в предшествующих разделах руководства.

Применяются следующие критерии нормальности:

- критерий Шапиро-Уилка [48, 50];
- критерий Шапиро-Уилка для больших выборок (критерий Ройстона [46]);
- критерий Эппса-Палли [17];
- критерий Д'Агостино со статистикой z_2 [16, 84];
- критерий Фросини [18, 19];
- критерии Хегази и Грина [24] со статистиками T_1 и T_2 ;
- критерий Гири [20, 21, 22];
- критерий Дэвида-Хартли-Пирсона [12];
- критерий Шпигельхальтера [51] статистика которого базируется на комбинации статистик критериев Гири и Дэвида-Хартли-Пирсона.

Напомним, что сведения о свойствах перечисленных критериев наиболее доступны в [84, 88] и в [103]. Критерий Ройстона [46] – это самостоятельный критерий, он является развитием критерия Шапиро-Уилка [48, 50]. В отличие от критерия Шапиро-Уилка – это правосторонний критерий, и для него отсутствуют ограничения по объему выборок.

Для проверки нормальности ошибок измерений использовались также непараметрические критерии согласия [95]:

- Колмогорова;
- Крамера-Мизеса-Смирнова;
- Андерсона-Дарлингга;
- Купера;
- Ватсона;
- Жанга со статистиками Z_A , Z_C , Z_K .

При проверке нормальности непараметрические критерии используются в ситуации проверки сложных гипотез. Ещё раз подчеркнём, что при проверке сложных гипотез распределения статистик данных критериев зависят от ряда факторов: от вида наблюдаемого закона $F(x, \theta)$, соответствующего справедливой проверяемой гипотезе H_0 ; от типа оцениваемого параметра и числа оцениваемых параметров; в некоторых случаях от конкретного значения параметра (например, в случае семейств гамма-, бета-распределений и т.п.); от метода оценивания параметров [103, 89, 90].

Применение непараметрических критериев согласия для проверки

гипотез о принадлежности выборок нормальному закону рассмотрено в разделе 3.

Оценивание параметров распределений проводилось методом максимального правдоподобия, так как в случае этого метода оценивания непараметрические критерии, как правило, обладают большей мощностью.

Для анализа результатов измерений рассматриваемых экспериментов использовались также критерий согласия χ^2 Пирсона и модифицированный критерий типа χ^2 Никулина (Никулина-Рао-Робсона) [97, 98, 45, 23].

Напомним, что статистика X_n^2 критерия Пирсона при проверке сложной гипотезы подчиняется χ_r^2 -распределению с $r = k - m - 1$ степенями свободы, где k – число интервалов, если оценки m параметров закона находятся в результате минимизации этой статистики или методом максимального правдоподобия по сгруппированным наблюдениям.

Если параметры оцениваются по негруппированной выборке, то известно [9], что при справедливости проверяемой гипотезы и использовании оценок максимального правдоподобия (ОМП) статистика распределена как сумма независимых слагаемых

$\chi_{k-m-1}^2 + \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2$, где ξ_1, \dots, ξ_m – стандартные нормальные случайные

величины, независимые одна от другой и от χ_{k-m-1}^2 . Однако точный закон распределения статистики неизвестен, и реально найти его можно только при помощи статистического моделирования [102]. В разделе 4 приведены модели предельных распределений статистик этого критерия при проверке нормальности для различного числа интервалов при асимптотически оптимальном группировании. Заметим, что мощность критерия Пирсона зависит от способа группирования и выбранного числа интервалов [103].

Статистика Y_n^2 критерия Никулина-Рао-Робсона при проверке сложной гипотезы подчиняется χ_{k-1}^2 -распределению с $k - 1$ степенями свободы. Подразумевается, что используются ОМП по негруппированной выборке. Мощность критерия Никулина-Рао-Робсона также

зависит от способа группирования и выбранного числа интервалов [103].

5.4. Проверка гипотезы о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону

В таблицах 5.5 и 5.6 для каждого из анализируемых наборов данных представлены результаты проверки гипотезы о принадлежности выборок нормальному закону по всем применяемым критериям. В таблицах приведены значения статистик S^* соответствующих критериев и достигнутый уровень значимости P (**p-value**). Проверяемая гипотеза H_0 по соответствующему критерию не отклоняется, если достигнутый уровень значимости P больше заданного α . Достигнутые уровни значимости P вычислялись в соответствии с выражением (1.2) для правосторонних критериев, выражением (1.4) – для левосторонних и выражением (1.5) – для двусторонних

Для данных Ньюкомба результаты проверки гипотезы приведены после исключения 2-х наблюдений (-44 и -2), которые отнесены к аномальным измерениям (выбросам)

Т а б л и ц а 5.5

Результаты проверки гипотезы о принадлежности нормальному распределению наблюдений Кавендиша и Милликена

Критерий	Кавендиш		Милликен	
	S^*	P	S^*	P
Эппса-Палли	0.0519	0.734	0.0296	0.872
Шапиро-Уилка	0.9785	0.821	---	---
Шапиро-Уилка (Ройстона)	-0.7924	0.808	-0.3686	0.644
Д'Агостино z_2	0.5505	0.582	0.4088	0.683
Фросини	0.1224	0.905	0.1156	0.948
Хегази-Грина T_1	0.1072	0.871	0.0772	0.880
Хегази-Грина T_2	0.0305	0.562	0.0169	0.586
Гири	0.8008	0.874	0.7977	0.864
Дэвида-Хартли-Пирсона	4.3902	0.473	4.5776	0.979

Шпигельхальтера		1.2272	0.633	1.2427	0.955
X_n^2 Пирсона (ОМП по негруппирован ным данным)	$k=4$	0.3816	0.750	0.1782	0.927
	$k=5$	0.8403	0.799	1.3395	0.619
	$k=6$	1.9787	0.897	1.6741	0.718
	$k=7$	1.7509	0.998	6.6350	0.163
X_n^2 Пирсона (ОМП по группированн ым данным)	$k=4$	0.1156	0.734	1.4201	0.233
	$k=5$	0.1887	0.920	1.4246	0.491
	$k=6$	0.6699	0.880	0.5701	0.903
	$k=7$	0.6768	0.954	2.3917	0.664
Y_n^2 Никулина	$k=4$	1.0883	0.780	0.9730	0.808
	$k=5$	1.2032	0.878	1.5811	0.812
	$k=6$	5.5553	0.352	1.9131	0.861
	$k=7$	2.2440	0.896	6.8988	0.330
Колмогорова		0.5151	0.798	0.4922	0.845
Андерсона-Дарлингга		0.2027	0.886	0.2064	0.870
Крамера-Мизеса-Смирнова		0.0253	0.922	0.0238	0.933
Купера		0.8096	0.941	0.9584	0.736
Ватсона		0.0194	0.947	0.0215	0.935
Z_A Жанга		3.3160	0.633	3.3187	0.491
Z_C Жанга		3.3838	0.753	5.6077	0.572
Z_K Жанга		0.5498	0.714	0.6747	0.734

Т а б л и ц а 5.6

Результаты проверки гипотезы о принадлежности нормальному распределению наблюдений Майкельсона и Ньюкомба

Критерий	Майкельсон		Ньюкомб	
	S^*	P	S^*	P
Эпса-Палли	0.0742	0.607	0.1074	0.461
Шапиро-Уилка	---	---	---	---
Шапиро-Уилка (Ройстона)	-0.0344	0.514	-0.2747	0.608

Д'Агостино z_2		1.1359	0.256	0.6603	0.509
Фросини		0.2194	0.239	0.1906	0.408
Хегази-Грина T_1		0.0922	0.226	0.0977	0.450
Хегази-Грина T_2		0.0170	0.236	0.0178	0.476
Гири		0.7790	0.320	0.7745	0.309
Дэвида-Хартли-Пирсона		5.6954	0.190	4.7212	0.902
Шпигельхальтера		1.2773	0.325	1.2810	0.168
χ_n^2 Пирсона (ОМП по негруппирован ным данным)	$k=4$	1.2307	0.436	1.0262	0.488
	$k=5$	2.4182	0.370	0.0708	0.990
	$k=6$	5.4280	0.165	0.8710	0.902
	$k=7$	5.9124	0.225	2.4062	0.719
χ_n^2 Пирсона (ОМП по группированн ым данным)	$k=4$	0.6060	0.436	3.6822	0.055
	$k=5$	3.1733	0.205	0.8555	0.652
	$k=6$	2.1559	0.541	3.9529	0.267
	$k=7$	2.3475	0.672	5.0096	0.286
Y_n^2 Никулина	$k=4$	3.6631	0.300	2.5530	0.466
	$k=5$	10.9737	0.027	0.2345	0.994
	$k=6$	8.3858	0.136	1.9755	0.853
	$k=7$	14.4108	0.025	4.8375	0.565
Колмогорова		0.8443	0.092	0.7379	0.225
Андерсона-Дарлинга		0.4578	0.267	0.3783	0.411
Крамера-Мизеса-Смирнова		0.0762	0.231	0.0623	0.356
Купера		1.3863	0.110	1.2261	0.273
Ватсона		0.0753	0.201	0.0592	0.341
Z_A Жанга		3.3126	0.459	3.3050	0.751
Z_C Жанга		5.2182	0.739	4.4670	0.752
Z_K Жанга		1.3562	0.292	1.3329	0.223

В стандарте [67] и в настоящем руководстве для вычисления статистики критерия Шапиро-Уилка таблицы коэффициентов представлены для объемов выборок не более 50, поэтому в данном

случае значения S^* и P приведены только для результатов Кавендиша ($n=29$). При вычислении статистик критериев типа χ^2 использовалось асимптотически оптимальное группирование [102] при числе интервалов $k = \overline{4,7}$. При проверке сложных гипотез с использованием критериев согласия параметры нормального закона оценивались методом максимального правдоподобия.

Представленные в таблицах 5.5 и 5.6 значения достигаемых уровней значимости показывают, что нет оснований для отклонения гипотезы о нормальности ни по одному из критериев.

5.5. О вычислении достигнутых уровней значимости

Вычисление достигнутых уровней значимости в соответствии с соотношениями (1.2) для правостороннего критерия, (1.4) для левостороннего и (1.5) для двустороннего не вызывает труда при известном распределении статистики критерия. Если информация о распределении статистики соответствующего критерия отсутствует и представлена лишь таблицей процентных точек, либо объемы выборок относительно невелики и таковы, что распределение статистики существенно отличается от предельного (асимптотического), то корректное вычисление достигнутого уровня значимости (p -value) представляет собой некоторую проблему.

Например, в случае непараметрических критериев согласия Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлингга и других при таких ограниченных, как в данном случае, объемах выборок следует учитывать, что распределения статистик будут несколько отличаться от предельных распределений, модели которых представлены в данном руководстве и в [89, 90, 34, 95] для ситуации проверки сложных гипотез.

При малых объемах выборок распределения статистики X_n^2 критерия Пирсона при проверке нормальности с оцениванием параметров по негруппированным данным методом максимального правдоподобия (с использованием таблиц асимптотически оптимального группирования) будут также несколько отличаться от моделей, представленных в раздел 4.1.

Предельным распределением статистики Y_n^2 критерия Никулина-Рао-Робсона является χ_{k-1}^2 -распределение (критерий обладает свойством «свободы от распределения»). Однако при малых, как в данном случае, объемах выборок наблюдается отличие распределения статистики от предельного.

Для критериев нормальности Шапиро-Уилка, Эпса-Палли, Фросини, Хегази-Грина, Гири, Дэвида-Хартли-Пирсона и Шпигельхальтера характерна сильная зависимость распределений статистик от объема выборки. В то же время в литературных источниках отсутствуют сведения о законах распределения статистик и приводятся лишь таблицы процентных точек. Критерий Шапиро-Уилка – левосторонний, правосторонними критериями являются критерий Шапиро-Уилка для больших выборок (критерий Ройстона) [46], критерии Эпса-Палли, Фросини, оба критерия Хегази-Грина, критерий Шпигельхальтера. Двусторонними критериями являются критерии Гири и Дэвида-Хартли-Пирсона. Распределение статистики критерия Ройстона [46] в области больших значений статистик, на основании которых принимается решение о том, отклонять или нет проверяемую гипотезу, хорошо аппроксимируется стандартным нормальным законом в широком диапазоне объемов выборок. Однако в целом зависимость распределения статистики критерия от объема выборки при малых n является заметной.

В связи с вышеуказанными замечаниями при определении достигнутых уровней значимости во всех случаях, когда распределение статистики применяемого критерия либо неизвестно, либо при данном объеме выборки могло отличаться от асимптотического или предельного, использовались распределения статистик критериев, полученные в результате статистического моделирования. При этом число испытаний составило величину $N=1\ 660\ 000$, что позволяет определить достигаемый уровень значимости с точностью $\varepsilon < 10^{-3}$ при доверительной вероятности $\gamma = 0.99$.

5.6. Конкурирующие законы, пригодные для описания результатов анализируемых экспериментов

Естественно желание проверить, какие модели законов, кроме нормального, позволяют достаточно хорошо описывать результаты анализируемых экспериментов.

Для каждого набора данных с использованием критериев согласия Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлингга и типа χ^2 Никулина из 38 законов распределения вероятностей, реализованных в программной системе ISW [83], были отобраны законы, относительно которых гипотеза о принадлежности к ним соответствующих выборок не отклонялась, и критерии показали наибольший средний достигаемый уровень значимости. При проверке сложных гипотез параметры законов оценивались методом максимального правдоподобия.

Для наблюдений Кавендиша с объемом выборки $n=29$ наилучшими моделями оказались: нормальный закон с плотностью

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ и параметрами $\mu=5.4479$ и $\sigma=0.2171$; распре-

деление Лапласа $f(x) = \frac{1}{2\theta_1} e^{-|x-\theta_0|/\theta_1}$ с параметрами сдвига $\theta_0 = 5.46$ и

масштаба $\theta_1 = 0.1737$; логарифмически нормальный закон

$f(x) = \frac{1}{x\theta_1\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \theta_0)^2/2\theta_1^2}$ при $\theta_0 = 1.6944$ и $\theta_1 = 0.0403$; логистичес-

кий $f(x) = \frac{1}{\theta_1} \exp\left\{-\frac{(x-\theta_0)}{\theta_1}\right\} / \left[1 + \exp\left\{-\frac{(x-\theta_0)}{\theta_1}\right\}\right]^2$ при $\theta_0 = 5.456$,

$\theta_1 = 0.1233$. Полученные в результате проверки сложных гипотез о согласии с соответствующими моделями законов значения статистик S^* и достигнутых уровней значимости P применяемых критериев согласия представлены в таблице 5.7.

Для дальнейшего использования обозначим конкурирующие гипотезы, соответствующие этим законам, следующим образом: нормальному – H_0^{29} ; Лапласа – H_1^{29} ; логарифмически нормальному – H_2^{29} ; логистическому – H_3^{29} .

Таблица 5.7

Проверка согласия с отобранными моделями для данных Кавендиша

Критерий	Нормальный		Лапласа		Лог-нормальный		Логистический	
	S^*	P	S^*	P	S^*	P	S^*	P
Y_n^2 Никулина	1.203	0.878	2.791	0.593	1.203	0.878	3.037	0.552
Колмогорова	0.515	0.789	0.560	0.700	0.538	0.730	0.386	0.974
Андерсона-Дарлинга	0.203	0.879	0.310	0.687	0.244	0.769	0.182	0.908
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.025	0.913	0.050	0.556	0.030	0.837	0.024	0.882

Для данных Милликена с объемом выборки $n=58$ среди отобранных моделей оказались нормальный закон с оценками параметров ($\mu=4.7808$, $\sigma=0.0152$), распределение Лапласа с оценками параметров ($\theta_0=4.7813$, $\theta_1=0.0125$) и обобщенный нормальный закон (1.10)

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\}$$

(или двустороннее экспоненциальное – ДЭ) с параметрами $\theta_0=4.7808$, $\theta_1=0.0214$, $\theta_2=1.9903$. Результаты проверки гипотез по соответствующим критериям приведены в таблице 5.8.

Обозначим соответствующие гипотезы: H_0^{58} – для нормального закона; H_1^{58} – для распределения Лапласа, H_2^{58} – для распределения семейства (1.10).

Проверка согласия с отобранными моделями для данных Милликена

Критерий	Нормальный		Лапласа		ДЭ	
	S^*	P	S^*	P	S^*	P
Y_n^2 Никулина	1.581	0.812	4.450	0.349	3.406	0.307
Колмогорова	0.492	0.845	0.690	0.361	0.494	0.806
Андерсона-Дарлинга	0.206	0.870	0.392	0.508	0.205	0.828
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.024	0.933	0.062	0.408	0.024	0.911

Для наблюдений Майкельсона с объемом выборки $n=100$ наилучшими моделями оказались нормальный закон ($\mu=852.3992$, $\sigma=78.6145$), логистический ($\theta_0=851.4711$, $\theta_1=44.3633$) и логарифмически нормальный ($\theta_0=6.7437$, $\theta_1=0.0935$) (см. таблицу 5.9).

Проверка согласия с отобранными моделями для данных Майкельсона

Критерий	Нормальный		Логистический		Лог-нормальный	
	S^*	P	S^*	P	S^*	P
Y_n^2 Никулина	10.973	0.027	7.673	0.104	3.619	0.460
Колмогорова	0.844	0.092	0.697	0.169	0.710	0.277
Андерсона-Дарлинга	0.458	0.267	0.434	0.215	0.446	0.285
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.076	0.231	0.065	0.193	0.068	0.300

В данном случае по достигнутым уровням значимости можно говорить о предпочтительности модели логарифмически нормального закона. Обозначим соответствующие гипотезы: H_0^{100} – для нормального закона; H_1^{100} – для логистического; H_2^{100} – для логарифмически нормального.

Наилучшей моделью для полной выборки результатов Ньюкомба

оказалось распределение Коши $f(x) = \frac{\theta_1}{\pi[\theta_1^2 + (x - \theta_0)^2]}$ с ОМП параметров (27.2844, 2.4937). Соответствующую гипотезу обозначим H_1^{66} . Неробастность ОМП и влияние выбросов (-44 и -2) приводит к построению модели нормального закона с параметрами (26.2121, 10.6366), который не согласуется с эмпирическим распределением (см. рис. 5.1 и таблицу 5.10). Гипотезу, соответствующую нормальному закону, обозначим H_0^{66} . Следует отметить, что Ньюкомб отнёс к аномальным наблюдениям значение -44 и не учитывал его при подведении итогов.

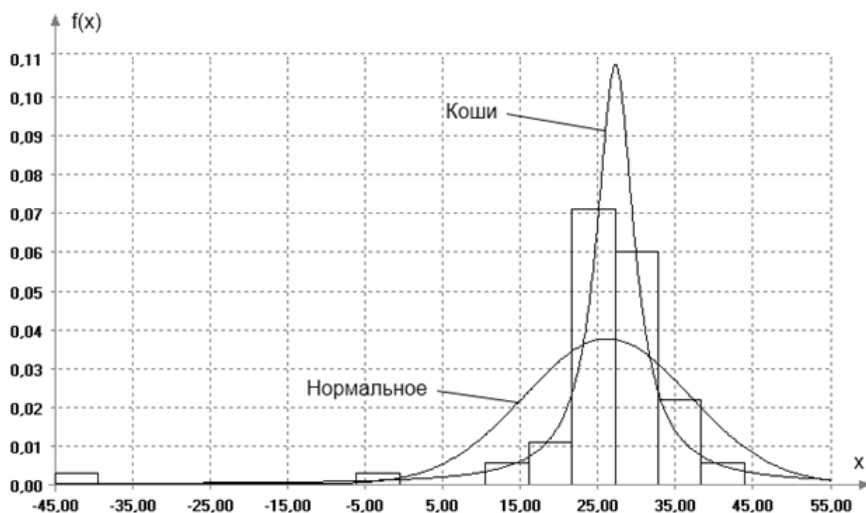


Рис. 5.1. Гистограмма для выборки Ньюкомба и плотности распределений нормального и Коши с соответствующими ОМП параметрами ($\mu = 26.2121$, $\sigma = 10.6636$ и $\theta_0 = 27.2844$, $\theta_1 = 2.9437$).

Применение робастных оценок по группированным данным [74, 75] или оценок с цензурированием выпадающих значений и последующее использование параметрического метода отбраковки приводит к исключению в качестве аномальных обоих значений (-44 и -2). В частности, если провести левостороннее цензурирование I-го

типа с точкой цензурирования $C=15$ и оценить параметры нормального распределения по такой выборке, то полученные ОМП параметров будут равны $\hat{\mu} = 27.3043$ и $\hat{\sigma} = 5.5785$. Для закона с такими параметрами значения -44 и -2 будут отнесены к выбросам.

Таблица 5.10

Проверка согласия с отобранными моделями для данных Ньюкомба

Критерий	Нормальный		Коши	
	S^*	P	S^*	P
Y_n^2 Никулина	71.436	0.000	6.376	0.173
Колмогорова	1.890	0.000	0.535	0.653
Андерсона-Дарлинга	5.819	0.000	0.550	0.312
Крамера-Мизеса-Смирнова	1.003	0.000	0.058	0.410

Проверить адекватность модели, полученной по цензурированной выборке, можно с использованием рандомизации цензурированных наблюдений и преобразования Смирнова [23]. В данном случае в исходной выборке цензурированные наблюдения (значения -44 и -2) заменяются следующим образом. На интервале $[0, \Phi(C; \hat{\mu}, \hat{\sigma})]$, где $\Phi(C; \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ – функция распределения нормального закона в точке C , по равномерному закону будут сгенерированы псевдослучайные величины η_i , $i = \overline{1, 2}$, которые преобразуются в соответствии с выражением $x_i = \Phi^{-1}(\eta_i; \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ и добавляются к остальным 64 элементам выборки. Далее при проверке согласия полученной таким образом выборки с нормальным законом используются модели распределений статистик, применяемые при проверке соответствующих сложных гипотез [103, 89, 90, 34, 95]. Достигнутые уровни значимости по критериям χ^2 Пирсона, Колмогорова, Андерсона-Дарлинга и Крамера-Мизеса-Смирнова в данном случае оказались равными, соответственно, 0.302, 0.367, 0.287, 0.277. Таким образом, для отклонения

гипотезы о нормальности оснований нет.

Для редуцированной выборки (без выбросов) лучшими моделями оказались нормальный закон с параметрами ($\mu = 27.75, \sigma = 5.0436$), распределение Лапласа ($\theta_0 = 27.75, \theta_1 = 3.0963$) и логарифмически нормальное распределение ($\theta_0 = 3.3061, \theta_1 = 0.1876$) (см. таблицу 5.11).

Таблица 5.11

Проверка согласия с моделями для данных Ньюкомба (без выбросов)

Критерий	Нормальный		Лапласа		Лог-нормальный	
	S^*	P	S^*	P	S^*	P
Y_n^2 Никулина	0.234	0.994	2.593	0.628	7.041	0.134
Колмогорова	0.738	0.225	0.719	0.299	0.625	0.482
Андерсона-Дарлингга	0.378	0.411	0.424	0.447	0.398	0.370
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.062	0.356	0.073	0.304	0.056	0.425

Обозначим соответствующие гипотезы: H_0^{64} – для нормального закона; H_1^{64} – для закона Лапласа; H_2^{64} – для логарифмически нормального.

5.7. Сравнительный анализ мощности критериев

Мощность применяемых критериев проверки нормальности была исследована при объемах выборок, соответствующих объемам в рассматриваемых экспериментах, относительно тех конкурирующих законов, использование которых оказалось возможным для описания соответствующих выборок (относительно законов, являющихся достаточно близкими к нормальному).

Оценки мощности получены на основании результатов моделирования условных распределений статистик критериев при справедливости соответствующих конкурирующих гипотез. Число испытаний в каждом случае составило величину $N=1\ 660\ 000$.

Оценки мощности критериев при проверке гипотезы H_0^{29} относительно конкурирующих гипотез H_1^{29} , H_2^{29} , H_3^{29} при объеме выборок $n=29$ и задаваемых вероятностях ошибок первого рода

$\alpha = 0.15$, $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.01$ приведены в таблице 5.12.

Таблица 5.12

Мощность критериев при проверке гипотезы H_0^{29} относительно конкурирующих гипотез $H_1^{29}, H_2^{29}, H_3^{29}$ (для измерений Кавендиша)

Критерий	H_1^{29} - Лапласа			H_2^{29} - лог. нормальный			H_3^{29} - логистический			
	0.15	0.05	0.01	0.15	0.05	0.01	0.15	0.05	0.01	
Эппса-Палли	0.51 6	.344	.181	.158	.055	.012	.262	.129	.046	
Шапиро-Уилка	.480	.328	.186	.158	.056	.012	.255	.134	.056	
Шапиро-Уилка (Ройстона)	.506	.348	.196	.159	.056	.012	.269	.143	.060	
Д'Агостино z_2	.408	.243	.113	.150	.050	.010	.235	.106	.034	
Фросини	.505	.330	.172	.156	.053	.011	.232	.105	.034	
Хегази-Грина T_1	.558	.380	.204	.157	.054	.011	.273	.133	.047	
Хегази-Грина T_2	.622	.437	.243	.158	.055	.012	.342	.185	.074	
Гири	.571	.397	.221	.151	.051	.010	.264	.129	.048	
Дэвида-Хартли-Пирсона	.438	.272	.131	.150	.050	.010	.255	.123	.042	
Шпигельхальтера	.625	.425	.227	.152	.051	.010	.299	.143	.050	
X_n^2 Пирсона (ОМП по негруппированным данным)	$k=4$.234	.103	.034	.155	.052	.011	.162	.056	.013
	$k=5$.318	.154	.045	.153	.052	.010	.172	.063	.013
	$k=6$.312	.146	.052	.153	.051	.011	.179	.065	.016
	$k=7$.368	.196	.064	.153	.052	.011	.198	.075	.017
X_n^2 Пирсона (ОМП по группированным данным)	$k=4$.226	.098	.028	.167	.059	.013	.172	.062	.014
	$k=5$.357	.181	.059	.170	.059	.012	.189	.070	.015
	$k=6$.366	.208	.091	.180	.064	.014	.220	.098	.031
	$k=7$.352	.180	.063	.173	.060	.012	.206	.087	.024

Y_n^2 Никулина	$k=4$.262	.111	.044	.153	.052	.010	.174	.059	.015
	$k=5$.356	.167	.066	.153	.051	.010	.197	.071	.020
	$k=6$.342	.181	.075	.153	.052	.011	.200	.081	.023
	$k=7$.399	.223	.097	.153	.052	.011	.215	.088	.026
Колмогорова	.460	.272	.118	.155	.053	.011	.216	.089	.024	
Андерсона-Дарлинга	.517	.342	.180	.157	.054	.011	.247	.115	.039	
Крамера-Мизеса-Смирнова	.507	.330	.170	.155	.053	.011	.231	.103	.033	
Купера	.475	.300	.148	.152	.052	.010	.213	.091	.027	
Ватсона	.502	.328	.172	.154	.052	.012	.222	.098	.031	
Z_A Жанга	.516	.335	.170	.159	.055	.012	.289	.147	.055	
Z_C Жанга	.459	.328	.188	.158	.055	.012	.264	.152	.069	
Z_K Жанга	.490	.310	.153	.156	.053	.011	.255	.120	.041	

Значения мощности критериев при проверке гипотезы H_0^{58} относительно конкурирующей гипотезы H_1^{58} при объеме выборки $n=58$ представлены в таблице 5.13. Оценки мощности относительно H_2^{58} не приводятся, так как частным случаем распределения (1.10) при значении параметра формы $\theta_2=2$ является нормальный закон. В данном случае оценка параметра $\theta_2=1.9903$, и закон практически не отличается от нормального. Соответственно и оценки мощности с точностью до погрешности моделирования совпадают с задаваемыми уровнями значимости.

Оценки мощности критериев при проверке гипотезы H_0^{66} относительно конкурирующей гипотезы H_1^{66} при объеме выборки $n=66$ приведены в таблице 5.14. Оценки мощности при проверке гипотезы H_0^{64} относительно конкурирующих гипотез H_1^{64} , H_2^{64} при объеме выборки $n=64$ – в таблице 5.15, а оценки мощности при проверке гипотезы H_0^{100} относительно конкурирующих гипотез H_1^{100} и H_2^{100} при объеме выборки $n=100$ – в таблице 5.16.

Мощность критериев при проверке гипотезы H_0^{58} относительно конкурирующей гипотезы H_1^{58} (для измерений Милликена)

Критерий	H_1^{58} - Лапласа			
	0.15	0.05	0.01	
Эпса-Палли	0.740	.574	.365	
Шапиро-Уилка	---	---	---	
Шапиро-Уилка (Ройстона)	.727	.577	.391	
Д'Агостино z_2	.610	.435	.250	
Фросини	.742	.578	.375	
Хегази-Грина T_1	.783	.631	.427	
Хегази-Грина T_2	.823	.675	.467	
Гири	.827	.694	.501	
Дэвида-Хартгли-Пирсона	.606	.434	.254	
Шпигельхальтера	.890	.761	.553	
χ_n^2 Пирсона (ОМП по негруппированным данным)	$k=4$.281	.126	.041
	$k=5$.528	.309	.136
	$k=6$.437	.248	.095
	$k=7$.558	.362	.171
χ_n^2 Пирсона (ОМП по группированным данным)	$k=4$.248	.112	.036
	$k=5$.562	.362	.169
	$k=6$.518	.329	.154
	$k=7$.551	.340	.148
Y_n^2 Никулина	$k=4$.322	.176	.068
	$k=5$.555	.372	.205
	$k=6$.490	.309	.156
	$k=7$.605	.427	.250
Колмогорова	.679	.474	.249	
Андерсона-Дарлинга	.755	.595	.389	
Крамера-Мизеса-Смирнова	.750	.585	.375	

Купера	.719	.546	.343
Ватсона	.750	.592	.391
Z_A Жанга	.689	.507	.297
Z_C Жанга	.642	.507	.336
Z_K Жанга	.687	.499	.285

Таблица 5.14

Мощность критериев при проверке гипотезы H_0^{66} относительно конкурирующей гипотезы H_1^{66} (для измерений Ньюкомба)

Критерий		H_1^{66} - Коши		
		0.15	0.05	0.01
Эпса-Палли		0.999	.999	0.999
Шапиро-Уилка		---	---	---
Шапиро-Уилка (Ройстона)		.999	.999	.999
Д'Агостино z_2		.948	.927	.900
Фросини		.999	.999	.999
Хегази-Грина T_1		.999	.999	.999
Хегази-Грина T_2		.999	.999	.999
Гири		.999	.999	.999
Дэвида-Хартгли-Пирсона		.996	.990	.974
Шпигельхальтера		.999	.999	.999
χ_n^2 Пирсона (ОМП по негруппированным данным)	$k=4$.953	.899	.804
	$k=5$.999	.997	.990
	$k=6$.995	.985	.959
	$k=7$.999	.997	.993
χ_n^2 Пирсона (ОМП по группированным данным)	$k=4$.526	.389	.257
	$k=5$.995	.987	.967
	$k=6$.996	.991	.979
	$k=7$.997	.993	.981

Y_n^2 Никулина	$k=4$.971	.948	.909
	$k=5$.999	.998	.995
	$k=6$.997	.993	.983
	$k=7$.999	.998	.996
Колмогорова		.999	.999	.996
Андерсона-Дарлинга		.999	.999	.999
Крамера-Мизеса-Смирнова		.999	.999	.999
Купера		.9998	.999	.998
Ватсона		.9999	.9996	.999
Z_A Жанга		.9997	.999	.997
Z_C Жанга		.915	.914	.912
Z_K Жанга		.955	.955	.952

Таблица 5.15

Мощность критериев при проверке гипотезы H_0^{64} относительно конкурирующих гипотез H_1^{64}, H_2^{64} (для измерений Ньюкомба без выбросов)

Критерий	H_1^{64} - Лапласа			H_2^{64} - лог. нормальный		
	0.15	0.05	0.01	0.15	0.05	0.01
Эппса-Палли	0.774	.615	.404	.501	.309	.141
Шапиро-Уилка	---	---	---	---	---	---
Шапиро-Уилка (Ройстона)	.760	.617	.431	.526	.342	.172
Д'Агостино z_2	.643	.470	.278	.224	.102	.036
Фросини	.777	.622	.419	.420	.237	.098
Хегази-Грина T_1	.814	.672	.471	.467	.282	.128
Хегази-Грина T_2	.848	.712	.507	.491	.307	.146
Гири	.858	.737	.552	.203	.086	.027
Дэвида-Хартли-Пирсона	.632	.458	.274	.178	.069	.018
Шпигельхальтера	.914	.803	.610	.232	.104	.034

X_n^2 Пирсона (ОМП по негруппированным данным)	$k=4$.283	.134	.041	.360	.191	.066
	$k=5$.550	.332	.147	.347	.156	.040
	$k=6$.459	.260	.106	.330	.145	.046
	$k=7$.589	.384	.195	.313	.149	.049
X_n^2 Пирсона (ОМП по группированным данным)	$k=4$.232	.103	.032	.418	.225	.081
	$k=5$.598	.404	.206	.441	.239	.087
	$k=6$.563	.379	.204	.492	.282	.115
	$k=7$.600	.401	.204	.441	.235	.086
Y_n^2 Никулина	$k=4$.328	.170	.067	.323	.150	.049
	$k=5$.583	.402	.219	.327	.143	.041
	$k=6$.506	.324	.166	.319	.151	.050
	$k=7$.631	.452	.271	.318	.157	.056
Колмогорова		.705	.505	.273	.373	.191	.067
Андерсона-Дарлингга		.781	.628	.423	.451	.263	.113
Крамера-Мизеса-Смирнова		.775	.617	.410	.414	.231	.094
Купера		.748	.583	.377	.322	.154	.051
Ватсона		.780	.629	.431	.365	.189	.070
Z_A Жанга		.719	.539	.326	.538	.349	.176
Z_C Жанга		.675	.544	.368	.526	.335	.153
Z_K Жанга		.717	.532	.314	.453	.263	.111

Таблица 5.16

Мощность критериев при проверке гипотезы H_0^{100} относительно конкурирующих гипотез H_1^{100}, H_2^{100} (для измерений Майкельсона)

Критерий	H_1^{100} - логистический			H_2^{100} - лог. нормальный		
	0.15	0.05	0.01	0.15	0.05	0.01
Эппса-Палли	0.429	.250	.108	.302	.148	.050
Шапиро-Уилка	---	---	---	---	---	---
Шапиро-Уилка (Ройстона)	.461	.305	.167	.318	.165	.061

Д'Агостино z_2		.459	.286	.140	.167	.062	.015
Фросини		.374	.205	.083	.259	.117	.035
Хегази-Грина T_1		.456	.276	.127	.283	.135	.045
Хегази-Грина T_2		.582	.398	.218	.301	.150	.052
Гири		.486	.313	.161	.165	.059	.014
Дэвида-Хартли-Пирсона		.428	.264	.129	.160	.056	.012
Шпигельхальтера		.613	.408	.212	.177	.066	.016
χ^2_n Пирсона (ОМП по негруппированным данным)	$k=4$.192	.067	.014	.230	.099	.028
	$k=5$.259	.111	.030	.226	.092	.023
	$k=6$.244	.103	.028	.227	.089	.022
	$k=7$.270	.121	.036	.219	.087	.023
χ^2_n Пирсона (ОМП по группированным данным)	$k=4$.175	.065	.015	.276	.125	.036
	$k=5$.262	.117	.034	.274	.120	.034
	$k=6$.302	.150	.054	.307	.142	.043
	$k=7$.338	.183	.078	.307	.143	.047
γ^2_n Никулина	$k=4$.219	.092	.027	.208	.080	.020
	$k=5$.304	.153	.061	.213	.083	.020
	$k=6$.295	.147	.057	.217	.085	.022
	$k=7$.327	.173	.072	.217	.086	.023
Колмогорова		.316	.148	.046	.242	.102	.028
Андерсона-Дарлингга		.402	.227	.095	.274	.127	.040
Крамера-Мизеса-Смирнова		.368	.197	.076	.258	.115	.035
Купера		.346	.181	.069	.213	.083	.020
Ватсона		.367	.200	.080	.233	.099	.027
Z_A Жанга		.434	.256	.112	.320	.163	.059
Z_C Жанга		.427	.302	.176	.316	.161	.055
Z_K Жанга		.424	.248	.112	.283	.132	.042

В таблицах 5.12 – 5.16 полужирным шрифтом выделены максимальные значения мощностей для соответствующих групп критериев.

Конкурирующие модели законов для данных Кавендиша можно

упорядочить по близости к нормальному закону следующим образом: наиболее далеким законом является распределение Лапласа (H_1^{29}); ближе – логистический закон (H_3^{29}); наиболее близкий – логарифмически нормальный (H_2^{29}) (см. рис. 5.2).

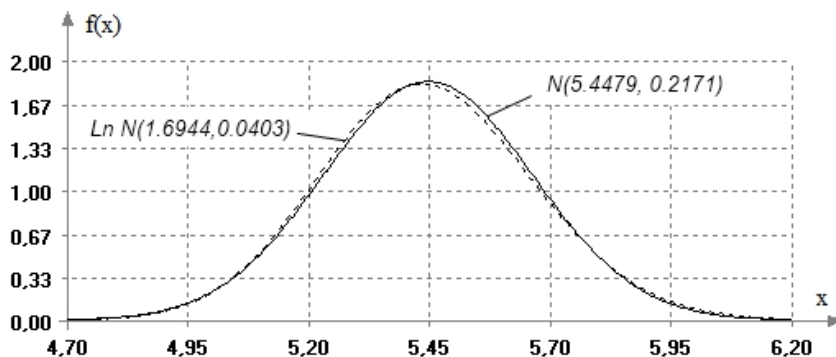


Рис. 5.2. Плотности распределений нормального и логарифмически нормального законов, соответствующие гипотезам H_0^{29} и H_2^{29} .

То же самое можно сказать относительно других экспериментов, когда эти законы оказываются среди моделей, пригодных для описания результатов измерений.

5.8. Выводы по результатам анализа

Подводя итоги анализа, можно констатировать, что нет оснований для отклонения гипотезы о нормальности ошибок измерений в рассмотренных классических экспериментах.

С другой стороны, очевидно, что для описания ошибок измерений в данных экспериментах можно подобрать и другие параметрические модели законов, не менее хорошо согласующиеся с результатами измерений.

Например, при использовании для описания распределений семейства (1.10), частным случаем которого является нормальный закон, всегда можно построить модель, которая в определенном смысле (в зависимости от меры близости и метода оценивания)

оказывается ближе к эмпирическому распределению, чем нормальный закон. Однако ответ о наиболее предпочтительной модели, опирающийся на результаты проверки с использованием критериев согласия, необязательно будет в пользу модели семейства (1.10). В частности, для описания данных Кавендиша получаем распределение вида (1.10) с ОМП параметров $\theta_0 = 5.4486$, $\theta_1 = 0.3024$, $\theta_2 = 1.9440$, для данных Милликена – $\theta_0 = 4.7808$, $\theta_1 = 0.0214$, $\theta_2 = 1.9903$, для данных Майкельсона – $\theta_0 = 851.315$, $\theta_1 = 100.047$, $\theta_2 = 1.6801$, для данных Ньюкомба – $\theta_0 = 27.652$, $\theta_1 = 6.2432$, $\theta_2 = 1.6160$. Результаты проверки согласия с этими законами с использованием непараметрических критериев согласия приведены в таблице 5.17. Их можно сравнить с результатами проверки нормальности по этим критериям (со значениями статистик и достигнутыми уровнями значимости), приводимыми в таблицах 5.5 и 5.6.

Таблица 5.17

Проверка согласия анализируемых данных с распределениями семейства (1.10)

Критерий	Кавендиш		Милликен		Майкельсон		Ньюкомб	
	S^*	P	S^*	P	S^*	P	S^*	P
Колмогорова	0.501	0.765	0.494	0.806	0.682	0.191	0.648	0.268
Андерсона-Дарлинга	0.198	0.845	0.205	0.828	0.417	0.205	0.301	0.458
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.025	0.882	0.024	0.911	0.063	0.189	0.045	0.400

Анализируя мощность всех рассмотренных критериев относительно трех конкурирующих законов, оказавшихся подходящими для описания измерений, можно однозначно утверждать следующее.

Специальные критерии нормальности, предназначенные **только** для проверки гипотезы о принадлежности выборки нормальному закону, по крайней мере, лучшие их представители, имеют преимущество перед непараметрическими критериями согласия.

В свою очередь, непараметрические критерии согласия при проверке нормальности обладают более высокой мощностью по

сравнению с критериями типа χ^2 .

Специальные критерии нормальности можно упорядочить по мощности относительно конкурирующей гипотезы в виде распределения Лапласа следующим образом:

Шпигельхальтера \succ *Гири* \sim *Хегази-Грина* $T_2 \succ$ *Хегази-Грина* $T_1 \succ$
Фросини \sim *Эппса-Палли* \succ *Шапиро-Уилка (Ройстона)* \succ *Дэвида-Хартли-Пирсона*.

Относительно конкурирующей гипотезы в виде логистического закона упорядочить в следующем порядке:

Шпигельхальтера \sim *Хегази-Грина* $T_2 \succ$ *Гири* \sim *Хегази-Грина* $T_1 \succ$
Эппса-Палли \succ *Шапиро-Уилка (Ройстона)* \succ *Дэвида-Хартли-Пирсона* \succ *Фросини*.

Относительно конкурирующего логарифмически нормального закона критерии упорядочиваются следующим образом:

Эппса-Палли \sim *Шапиро-Уилка (Ройстона)* \succ *Хегази-Грина* $T_2 \succ$
Хегази-Грина $T_1 \succ$ *Фросини* \succ *Шпигельхальтера* \succ *Гири* \succ *Дэвида-Хартли-Пирсона*.

Если отталкиваться от полученных в разделе 5 оценок мощности критериев, то к наиболее предпочтительным следует отнести критерии Шпигельхальтера, Хегази-Грина T_2 , Эппса-Палли, Шапиро-Уилка, Гири.

Однако не следует забывать, что не для любой конкурирующей гипотезы критерии Шпигельхальтера, Хегази-Грина T_2 , Эппса-Палли, Шапиро-Уилка имеют преимущество в мощности. Если рассматривать в качестве конкурирующего закона, например, распределение семейства (1.10) с параметром формы $\theta_2 = 4$, то при малых объемах выборок критерии Шапиро-Уилка, Эппса-Палли [84], Хегази-Грина со статистиками T_1 и T_2 [88] не могут отличить этот закон от нормального вследствие смещенности распределений статистик при справедливости конкурирующей гипотезы. А критерий Шпигель-

хальтера, статистика которого построена как комбинация статистик критериев Гири и Дэвида-Хартли-Пирсона, не способен этого сделать и с ростом объема выборок [88].

Критерии согласия типа χ^2 (Пирсона, Никулина-Рао-Робсона) при проверке сложных гипотез уступают по мощности непараметрическим критериям. Это касается и проверки гипотез о нормальности [86, 87]. Использованное асимптотически оптимальное группирование максимизирует мощность критерия χ^2 Пирсона относительно “очень близких” конкурирующих гипотез [103]. Для конкретной конкурирующей гипотезы за счет выбора оптимального числа интервалов и способа группирования можно построить критерий типа χ^2 для проверки нормальности, который будет обладать максимальной мощностью. Такая задача не является тривиальной [66], но позволяет добиться мощности большей, чем у непараметрических критериев согласия [103]. Сказанное может быть также отнесено и к критерию Никулина: для случая конкретной альтернативы асимптотически оптимальное группирование не будет тем методом, который максимизирует его мощность [85]. А повсеместное использование на практике интервалов равной длины или равновероятного группирования является скорее выбором от неимения лучших вариантов.

6. Развитие технологий проверки статистических гипотез

6.1. Изменение роли компьютерных технологий при статистическом анализе данных

Современный этап развития статистических методов характеризуется всё более интенсивным использованием компьютерных технологий анализа данных и методов статистического (имитационного) моделирования при исследовании статистических закономерностей. Компьютерные технологии существенно дополняют аналитические методы при совершенствовании математического аппарата прикладной статистики, помогают находить приближенные решения в тех случаях, когда этого не удастся сделать аналитическими методами. На основании имитационного моделирования можно делать не только асимптотические выводы, но и проследить изменения закономерностей с ростом объёмов выборок, моделировать и строить модели распределений любой исследуемой статистики в конкретной ситуации [103]. Основная масса исследований, позволивших подготовить данное руководство, также опиралась на использование имитационного моделирования и компьютерных технологий. С применением методов статистического моделирования были расширены существовавшие ранее таблицы процентных точек, представленные в руководстве.

Самой первой работой, в которой компьютерное моделирование оставило заметный вклад в развитие статистических критериев, является работа [41], где Лиллиефорс построил таблицу процентных точек для критерия, использующего статистику Колмогорова при проверке нормальности. С тех пор многие таблицы процентных точек (квантилей распределений) для различных критериев проверки статистических гипотез обязаны своему появлению методам статистического моделирования.

В настоящее время в связи с резким увеличением возможностей вычислительной техники и информационных технологий в программных системах статистического анализа существенно возрастает роль компьютерных технологий анализа данных и исследования статистических закономерностей. Например, когда

распределение статистики непараметрического критерия согласия, используемого для проверки некоторой сложной гипотезы, к моменту начала проверки неизвестно (так как не были определены оценки параметров, от которых зависит это распределение), появляется возможность исследования распределения статистики в реальном времени проверки гипотезы (в интерактивном режиме) [35, 36, 94, 95, 37]. В интерактивном режиме можно исследовать распределения статистик различных параметрических и непараметрических критериев, используемых в условиях нарушения стандартных предположений, и осуществлять корректные выводы в этих нестандартных условиях.

Точно так же в интерактивном режиме можно исследовать неизвестное распределение статистики критерия нормальности, зависящее от объема выборки, при том значении n , которое соответствует анализируемой выборке, и оценить по найденному в результате моделирования (эмпирическому) распределению статистики достигнутый уровень значимости.

6.1. Интерактивный подход к вычислению p-value

Принятие решения о результатах проверки гипотезы H_0 на основании достигнутого уровня значимости (p-value) всегда более обосновано (см. раздел 1.1), чем в результате сравнения полученного значения статистики с заданным критическим значением. В последнем случае остаётся не ясным, насколько далеко на самом деле истинное распределение, которому принадлежит анализируемая выборка (и которое в действительности всегда остается неизвестным), от нормального закона.

К сожалению, распределения ряда специальных критериев проверки нормальности существенно зависят от объемов выборок, в связи с чем при формировании решения о результатах проверки гипотезы H_0 (отклонять – не отклонять) опираются на таблицы процентных точек. Такая же проблема с применением непараметрических критериев согласия Жанга со статистиками Z_A , Z_C и Z_K .

С другой стороны, реальные объемы выборок, которые приходится анализировать, как правило, достаточно ограничены. А при малых n действительные распределения статистик критериев могут

существенно отличаться от предельных или приближенных асимптотических распределений этих же статистик. Поэтому использование последних вместо действительных распределений статистик при малых n приводит к ошибкам при вычислении достигнутого уровня значимости.

Какой может быть выход? Или каковы перспективы повышения качества статистических выводов?

При исследовании результатов классических экспериментов в разделе 5 для объективности анализа достигнутый уровень значимости вычислялся на основании моделирования распределений статистик применяемых критериев при объемах выборок n , соответствующих объемам выборок анализируемых экспериментов. При таком подходе необходимое для проверки гипотезы эмпирическое распределение $G_N(S_n|H_0)$ статистики соответствующего критерия строится в результате статистического моделирования с точностью, зависящей от числа экспериментов N в методе Монте-Карло [83]. Затем по эмпирическому распределению $G_N(S_n|H_0)$, например, для правостороннего критерия определяется оценка достигнутого уровня значимости $P\{S_n \geq S^*\}$, где S^* – вычисленное по анализируемой выборке значение статистики.

Такое статистическое моделирование может проводиться в интерактивном режиме в ходе осуществляемого статистического анализа [35, 36, 94, 95, 37], а затем его результаты использоваться при формировании вывода по итогам проверки гипотезы.

Реализация такого интерактивного режима требует наличия развитого программного обеспечения, позволяющего (как в [100]) в целях ускорения распараллеливать процессы моделирования и привлекать доступные вычислительные ресурсы. В условиях распараллеливания время построения распределения $G_N(S_n|H_0)$ статистики критерия оказывается не очень заметным на фоне полного решения задачи статистического анализа.

В качестве примера в таблице 6.1 демонстрируется точность определения достигнутых уровней значимости для специальных критериев нормальности в зависимости от величины выборки N моделируемых в интерактивном режиме эмпирических распределений статистик при проверке гипотезы о нормальности результатов Кавендиша

(см. табл. 5.1).

Можно обратить внимание на различие в значениях достигнутого уровня значимости для двустороннего критерия Д'Агостино со статистикой z_2 в таблице 6.1 ($P=0.537$) и в таблице 5.5 ($P=0.582$). В таблице 5.5 это значение получено по асимптотическому распределению данной статистики (стандартному нормальному закону). Как видим, отличие действительного распределения этой статистики при $n=29$ от стандартного нормального закона существенно сказывается на оценке определяемого p -value.

Таблица 6.1

Достигнутые уровни значимости, полученные для специальных критериев нормальности по данным Кавендиша при различных N

Критерий	Значение статистики	$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
Д'Агостино z_2	0.5505	0.576	0.534	0.537	0.537
Д'Агостино z_1 и z_2	1.5517	0.448	0.430	0.429	0.431
Шпигельхальтера	1.2272	0.644	0.624	0.632	0.633
Шапиро-Уилка	0.9785	0.819	0.814	0.819	0.820
Ройстона	-0.7924	0.806	0.799	0.805	0.807
Хегази-Грина T_2	0.03051	0.561	0.555	0.559	0.562
Хегази-Грина T_1	0.10722	0.873	0.870	0.871	0.871
Гири	0.80084	0.904	0.858	0.870	0.874
Фросини	0.12237	0.909	0.903	0.905	0.905
Эппса-Палли	0.05192	0.738	0.726	0.732	0.734
Дэвида-Хартли-Пирсона	4.3902	0.508	0.469	0.473	0.473

В [100] интерактивный режим исследования распределений статистик реализован для следующих непараметрических критериев согласия: Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлингга, Купера, Ватсона, Жанга (3-х критериев).

При этом могут использоваться различные методы оценивания параметров. В таблице 6.2 показано, как в зависимости от объема N моделируемых выборок статистик сходятся к истинным значениям оценки достигнутых уровней значимости для непараметрических критериев согласия при проверке гипотезы о нормальности тех же результатов Кавендиша.

Таблица 6.2

Достигнутые уровни значимости, полученные для непараметрических критериев согласия при проверке нормальности по данным Кавендиша при различных N

Критерий	Значение статистики	$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
Колмогорова	0.5151	0.802	0.795	0.796	0.798
Андерсона-Дарлинга	0.2027	0.882	0.883	0.885	0.886
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.0253	0.916	0.920	0.921	0.922
Купера	0.8096	0.936	0.939	0.940	0.941
Ватсона	0.0194	0.949	0.949	0.947	0.947
Z_A Жанга	3.3160	0.642	0.627	0.631	0.633
Z_C Жанга	3.3838	0.746	0.742	0.750	0.753
Z_K Жанга	0.5498	0.701	0.706	0.712	0.714

Использование интерактивного режима и реализация возможности вычисления достигнутых уровней значимости при использовании критериев, для которых неизвестны распределения статистик (асимптотических, предельных или при конкретных n) существенно повышают информативность результатов проверки статистических гипотез и качество (корректность) статистических выводов.

7. Заключение

Настоящее руководство не дает однозначного ответа на вопрос, какой критерий лучше всего использовать для проверки отклонения анализируемой выборки от нормального закона. Из его содержания следует, что для большей объективности статистических выводов предпочтительней воспользоваться некоторым рядом критериев, обладающих определёнными достоинствами. Использование критериев, опирающихся на различные меры отклонения эмпирического распределения от теоретического, повышает качество статистических выводов.

Представленные в руководстве описания критериев с указанием их преимуществ и недостатков, расширенные таблицы процентных точек и модели распределений статистик критериев, оценки мощности критериев относительно некоторых конкурирующих гипотез позволят специалистам, решающим задачи статистического анализа в конкретной прикладной области, осознанно подходить к выбору критериев, не останавливаясь на использовании какого-то одного.

Приведенные оценки мощности критериев для различных объёмов выборок n позволяют не только сравнивать критерии, но и дают возможность (при задании конкурирующей гипотезы) оценить вероятности ошибок 2-го рода β , соответствующие заданным вероятностям ошибок 1-го рода α . Или спрогнозировать требуемые объёмы выборок для того, чтобы с вероятностями ошибок α и β не больше заданных различать, например, гипотезы H_0 и H_1 .

Использование в процессе проверки гипотезы процентных точек уже не соответствует современному уровню требований к качеству статистических выводов. В связи с этим возрастает роль методов статистического моделирования и компьютерных технологий, позволяющих в интерактивном режиме исследовать распределения статистик и оценивать достигнутый уровень значимости (p -value).

Применение рассмотренных в данном руководстве критериев предполагает, что анализируемые выборки являются “точечными”. К цензурированным или группированным выборкам непосредственно применять эти критерии нельзя (за исключением критерия χ^2 Пирсона).

Библиографический список

1. *Anderson T. W.* Asymptotic theory of certain “Goodness of fit” criteria based on stochastic processes / T. W. Anderson, D. A. Darling // AMS. – 1952. – Vol. 23. – P. 193–212.
2. *Anderson T. W.* A test of goodness of fit / T. W. Anderson, D. A. Darling // J. Amer. Statist. Assoc. – 1954. – Vol. 29. – P. 765–769.
3. *Baringhaus L.* A consistent test for multivariate normality based on the empirical characteristic function / L. Baringhaus, N. Henze // *Metrika*. – 1988. – № 35. – P. 339–348.
4. *Baringhaus L.* Recent and classical tests for normality – A comparative study / L. Baringhaus, R. Danchke, N. Henze // *Comm. Statistic.* – 1989. – B, 18(1). – P. 363–379.
5. *Biometrika* tables for Statisticians / ed.: E. S. Pearson, H. O. Hartley. – 3d ed. – Cambridge : University Press, 1966. – Vol. 1. – 264 p.
6. *Biometrika* tables for Statisticians / ed.: E. S. Pearson, H. O. Hartley. – Cambridge : University Press, 1972. – Vol. 2. – 385 p.
7. *Biometrika* tables for Statisticians / ed.: E. S. Pearson, H. O. Hartley. – Cambridge : University Press, 1976. – Vol. 2. – 286 p.
8. *Bowman K. O.* ‘Omnibus’ test contours for departures from normality based on $\left| \sqrt{b_1} \right|$, b_2 / K. O. Bowman, L. R. Shenton // *Biometrika*. – 1975. – Vol. 62. – P. 243–250.
9. *Chernoff H.* The use of maximum likelihood estimates in χ^2 test for goodness of fit / H. Chernoff, E. L. Lehmann // *Ann. Math. Stat.* – 1954. – Vol. 25. – P. 579–586.
10. *D’Agostino R. B.* Transformation to normality of the null distribution of g_1 / R. B. D’Agostino // *Biometrika*. – 1970. – Vol. 57. – P. 679–681.
11. *D’Agostino R. B.* Simulation probability points of b_2 for small samples / R. B. D’Agostino, G. L. Tietjen // *Biometrika*. – 1971. – Vol. 58. – P. 669–672.
12. *David H. A.* The distribution of the ratio? In a single normal sample, of range to standard deviation / H. A. David, H. O. Hartley, E. S. Pearson // *Biometrika*. – 1964. – Vol. 512, № 3-4. – P. 484–487.
13. *Design* of experiments and statistical analysis for grouped observations: Monograph / V. I. Denisov, K.-H. Eger, B. Yu. Lemeshko, E. B. Tsoy. – Novosibirsk : NSTU Publishing house, 2004. – 464 p.
14. *Dong L.B.* An Empirical Likelihood Ratio Test for Normality / L. B. Dong, D. E. A. Giles // *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 2007. – Vol.36. – № 1. – P.197 – 215.
15. *Doornik J. A.* An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality [Электронный ресурс] / J. A. Doornik, H. Hansen // *Discussion Paper*. – Nuffield College,

Oxford, 1994. – № W4 & 91. – Режим доступа : <http://www.nuff.ox.ac.uk/users/Doornik/papers/normal2.pdf>. – Загл. с экрана.

16. *Doornik J.A.* An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality / J.A. Doornik, H. Hansen // *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 2008. – Vol.70, – P.927-939.

17. *Epps T. W.* A test for normality based on the empirical characteristic function / T. W. Epps, L. B. Pulley // *Biometrika*. – 1983. – Vol. 70. –P. 723–726.

18. *Frosini B. V.* A survey of a class of goodness-of-fit statistics / B. V. Frosini // *Metron*. – 1978. – Vol. 36. – № 1-2. – P. 3–49.

19. *Frosini B. V.* On the distribution and power of goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric applications, “Goodness-of-fit” / Frank E. Grubbs ; ed. by Revesz P., Sarkadi K., Sen P.K. – Amsterdam-Oxford-New York : North Holland Publ.Comp, 1987. – P. 133–154.

20. *Geary R. C.* The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality / R. C. Geary // *Biometrika*. – 1935. – Vol. 27. – P. 310–322.

21. *Geary R. C.* Moments of the ratio of the mean deviation to the standard deviation for normal samples / R. C. Geary // *Biometrika*. – 1936. – Vol. 28. – P. 295–307.

22. *Geary R. C.* Testing for Normality / R. C. Geary // *Biometrika*. – 1937. – Vol. 34. – P. 209–242.

23. *Greenwood P. E.* A guide to chi-squared testing / P. E. Greenwood, M. S. Nikulin. – New York : John Wiley & Sons, 1996. – 280 p.

24. *Hegazy Y. A. S.* Some new goodness-of-fit tests using order statistics / Y. A. S. Hegazy, J. R. Green // *Applied Statistics*. – 1975. – Vol. 24, №3. – P. 299–308.

25. *Henze N.* An approximation to the limit distribution of the Epps-Pulley test statistic for normality / N. Henze // *Metrika*. – 1990. – Vol. 37. – P. 7–18.

26. *Jarque C. M.* Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals / C. M. Jarque, A. K. Bera // *Economics Letters*. – 1980. – Vol. 6. № 3. – P. 255–259.

27. *Jarque C. M.* Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals: Monte Carlo evidence / C. M. Jarque, A. K. Bera // *Economics Letters*. – 1981. – Vol. 7. № 4. – P. 313–318.

28. *Kolmogoroff A. N.* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione / A. N. Kolmogoroff // *G. Ist. Ital. attuar.* – 1933. – Vol. 4. – № 1. – P. 83–91.

29. *Kuiper N.H.* Tests concerning random points on a circle / N. H. Kuiper // *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Van Wetenschappen*. – 1960. Series A – V. 63. – P.38-47.

30. *Lemeshko B. Yu.* The power of goodness of fit tests for close alternatives / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // *Measurement Techniques*, 2007. V.50, № 2. – P. 132-141.

31. *Lemeshko B. Yu.* Distribution models for nonparametric tests for fit in verifying complicated hypotheses and maximum-likelihood estimators. P. 1 / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // *Measurement Techniques*. – 2009. – Vol. 52, № 6. – P. 555–565.

32. *Lemeshko B. Yu.* Analysis of the Power of Goodness-of-Fit Tests for Near Competing Hypotheses. I. The Verification of Simple Hypotheses / B. Yu. Lemeshko,

S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2009. – Vol. 3, No. 4. – P. 462–475.

33. *Lemeshko B. Yu.* Comparative analysis of the power of goodness-of-fit tests for near competing hypotheses. II. Verification of complex hypotheses / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2010. – Vol. 4, No. 1. – P. 79–93.

34. *Lemeshko B. Yu.* Statistic Distribution Models for Some Nonparametric Goodness-of-Fit Tests in Testing Composite Hypotheses / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2010. – Vol. 39, № 3. – P. 460–471.

35. *Lemeshko B. Yu.* Real-Time Studying of Statistic Distributions of Non-Parametric Goodness-of-Fit Tests when Testing Complex Hypotheses / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, A. P. Rogozhnikov // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference” – AMSA’2011, Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. – P. 19-27.

36. *Lemeshko B. Yu.* Application of nonparametric goodness-of-fit tests for composite hypotheses in case of unknown distributions of statistics / A. A. Gorbunova, B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, A. P. Rogozhnikov // Applied methods of statistical analysis. Applications in survival analysis, reliability and quality control – AMSA’2013, Novosibirsk, 25–27 Sept. 2013 : proc. of the intern. workshop. – Novosibirsk : NSTU publ., 2013. – P. 8-24.

37. *Lemeshko B. Yu.* Interactive investigation of statistical regularities in testing composite hypotheses of goodness of fit / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, A. P. Rogozhnikov // Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis : monograph. – Wiley-ISTE, 2013. – Chap. 5. – P. 61–76.

38. *Lemeshko B. Yu.* Application and Power of the Nonparametric Kuiper, Watson, and Zhang Tests of Goodness-of-Fit / B. Yu. Lemeshko, A. A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56, No. 5., – P.465-475.

39. *Lemeshko B. Yu.* Application of nonparametric Kuiper and Watson tests of goodness-of-fit for composite hypotheses / B. Yu. Lemeshko, A. A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56, No. 9. – P.965-973.

40. *Lemeshko B. Yu.,* Solving problems of using some nonparametric goodness-of-fit tests / A. A. Gorbunova, S. B. Lemeshko, A. P. Rogozhnikov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2014. – Vol. 50, № 1. – P.21-35.

41. *Lilliefors H. W.* On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown / H. W. Lilliefors // J. Am. Statist. Assoc. – 1967. – Vol. 62. – P. 399–402.

42. *Martynov G.* Weighted Cramer-von Mises Test with Estimated Parameters / G. Martynov // Communications in Statistics – Theory and Methods, 2011. – V.40. – № 19-20. – P.3569-3586.

43. *Millikan R. A.* On the elementary electrical charge and the Avogadro constant / R. A. Millikan // The Physical Review, 1913. Series II 2. – P.109–143.

44. *Pearson E. S.* Test for departure from normality: Comparison of powers / E. S. Pearson, R. B. D’Agostino, K. O. Bowmann // Biometrika. – 1977. – Vol. 64. – P. 231–246.

45. Rao K. C. A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family / K. C. Rao, D. S. Robson // *Commun. Statist.* – 1974. – Vol. 3. – P. 1139–1153.
46. Royston J. P. Approximating the Shapiro-Wilk W-test for non-normality / J. P. Royston // *Statistics and Computing.* – 1992. – Vol. 2. – № 3. – P. 117–119.
47. Scott W. F. Tables for the Lilliefors and Modified Cramer–von Mises tests of normality / W. F. Scott, B. Stewart // *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 2011. – V.40. – № 4. – P.726-730.
48. Shapiro S. S. An analysis of variance test for normality (complete samples) / S. S. Shapiro, M. B. Wilk // *Biometrika.* – 1965. – Vol. 52. – P. 591–611.
49. Shapiro S. S. Goodness-of fit tests / S. S. Shapiro, M. B. Wilk, C. J. Chem // *J. Amer. Stat. Ass.* – 1968. – Vol. 63. – P. 1343–1372.
50. Shapiro S. S. An approximate analysis of variance test for normality / S. S. Shapiro, R. S. Francia // *J. Amer. Statist. Assoc.* – 1972. – № 337. – P. 215–216.
51. Spiegelhalter D. J. A test for normality against symmetric alternatives / D. J. Spiegelhalter // *Biometrika.* – 1977. – Vol. 64, №2. – P. 415–418.
52. Stephens M. A. Use of Kolmogorov–Smirnov, Cramer – von Mises and related statistics – without extensive table / M. A. Stephens // *J. R. Stat. Soc.* – 1970. – B. 32. – P. 115–122.
53. Stephens M. A. EDF statistics for goodness of fit and some comparisons / M. A. Stephens // *J. Am. Statist. Assoc.* – 1974. – Vol. 69. – No. 347. – P. 730–737.
54. Stigler S. M. Do robust estimators work with real data? / S. M. Stigler // *The Annals of Statistics*, 1977. – V.5. № 6. – P.1055–1098.
55. Voinov V. A comparative study of some modified chi-squared tests / V. Voinov, N. Pya, R. Alloyarova // *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 2009. – V.38. – № 3. – P.355–367.
56. Voinov V. A statistical reanalysis of the classical Rutherford’s experiment / V. Voinov, E. Voinov // *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 2010. – V.39. – № 1. – P.157–171.
57. Watson G. S. Goodness-of-fit tests on a circle. I. / G. S. Watson // *Biometrika.* – 1961. – V. 48. – No. 1-2. – P.109-114.
58. Watson G. S. Goodness-of-fit tests on a circle. II. / G. S. Watson // *Biometrika.* – 1962. – V. 49. – No. 1-2. – P.57- 63.
59. Zhang J. Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests. Toronto: PhD Thesis. York University, 2001.
60. Zhang J. Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio / J. Zhang // *Journal of the Royal Statistical Society: Series B.* – 2002. – V. 64. – № 2. – P.281-294.
61. Zhang J. Likelihood-ratio tests for normality / J. Zhang, Yu. Wub // *Computational Statistics & Data Analysis.* – 2005. – V. 49. – No. 3. – P.709-721.
62. Zhang J. Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio / J. Zhang // *Technometrics.* – 2006. – V. 48. – No. 1. – P.95-103.
63. Большев Л. Н. Асимптотические пирсоновские преобразования / Л. Н. Большев // *Теория вероятностей и ее применение.* – 1963. – Т. 8, № 2. – С. 129–155.

64. *Большев Л. Н.* Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.
65. *Большев Л. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика : избр. тр. / Л. Н. Большев ; под ред. Ю. В. Прохорова. – М. : Наука, 1987. – 286 с.
66. *Бушакова А. Д.* Исследование влияния вариантов асимптотической оптимальности группирования на мощность критериев типа χ^2 / А. Д. Бушакова, Б. Ю. Лемешко // *Материалы Российской НТК “Информатика и проблемы телекоммуникаций”*, Новосибирск, 2009. – Т.1. – С.34-37.
67. *ГОСТ Р ИСО 5479–2002.* Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 30 с.
68. *Денисов В. И.* Оптимальное группирование при обработке экспериментальных данных / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко // *Измерительные информационные системы.* – Новосибирск, 1979. – С. 5–14.
69. *Денисов В. И.* Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов. В 2 ч. / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко, Е. Б. Цой ; Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1993. – 346 с.
70. *Денисов В. И.* Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. 1. Критерии типа χ^2 : метод. реком. / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1998. – 126 с.
71. *Золотухина Л. В.* Эмпирическое исследование мощности критерия Саркади и его модификация / Л. В. Золотухина, Е. В. Винник // *Завод. лаб.* – 1985. – Т. 51, № 1. – С. 51–55.
72. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.
73. *Козлова А.В.* Исследование распределений статистик и мощности непараметрических критериев согласия, предложенных Jin Zhang / А. В. Козлова, Б. Ю. Лемешко // *Материалы Российской НТК “Информатика и проблемы телекоммуникаций”*. Новосибирск. – 2007. – Т. 1. – С.136-139.
74. *Лемешко Б. Ю.* Группирование наблюдений как способ получения робастных оценок / Б. Ю. Лемешко // *Надежность и контроль качества.* – 1997. – № 5. – С.26-35.
75. *Лемешко Б. Ю.* Робастные методы оценивания и отбраковка аномальных измерений / Б. Ю. Лемешко // *Заводская лаборатория.* - 1997. - Т.63. - № 5. - С. 43-49.
76. *Лемешко Б. Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений – это обеспечение максимальной мощности критериев / Б. Ю. Лемешко // *Надежность и контроль качества.* – 1997. – № 8. – С. 3–14.
77. *Лемешко Б. Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия / Б. Ю. Лемешко // *Завод. лаб.* – 1998. – Т. 64, №1. – С. 56–64.
78. *Лемешко Б. Ю.* Максимизация мощности критериев типа χ^2 / Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // *Докл. СО АН высш. шк.* – Новосибирск, 2000. – № 2. – С. 53–61.
79. *Лемешко Б. Ю.* О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // *Завод. лаб. Диагностика материалов.* – 2001. – Т. 67, № 7. – С. 62–71.

80. *Лемешко Б.Ю.* Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // *Автометрия*. – 2001. – № 2. – С. 88–102.
81. *Лемешко Б.Ю.* Обеспечение наибольшей мощности применяемых критериев типа χ^2 / *М. Г. Березовский, Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова* // *Вестник СибГАУ*, 2002. Вып.3.- Красноярск: Издательство СибГАУ. - С.78-85.
82. *Лемешко Б. Ю.* О выборе числа интервалов в критериях согласия типа χ^2 / Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // *Завод. лаб. Диагностика материалов*. – 2003. – Т. 69, № 1. – С. 61–67.
83. *Лемешко Б. Ю.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей: Учебное пособие. / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 119 с.
84. *Лемешко Б. Ю.* Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // *Метрология*. – 2005. – № 2. – С. 3–24.
85. *Лемешко Б. Ю.* Мощность критериев согласия при близких альтернативах / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов // *Измерительная техника*. – 2007. № 2. – С.22-27.
86. *Лемешко Б. Ю.* Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2008. – Т.11. – № 2(34). – С.96-111.
87. *Лемешко Б.Ю.* Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2008. – Т.11. – № 4(36). – С.78-93.
88. *Лемешко Б. Ю.* Исследование особенностей и мощности некоторых критериев нормальности / Б. Ю. Лемешко, А. П. Рогожников // *Метрология*. – 2009. – № 4. – С. 3–24.
89. *Лемешко Б. Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // *Измер. техника*. – 2009. – № 6. – С. 3–11.
90. *Лемешко Б. Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // *Измерительная техника*. – 2009. – № 8. – С.17-26.
91. *Лемешко Б. Ю.* О нормальности погрешностей измерений в классических экспериментах и мощности критериев, применяемых для проверки отклонения от нормального закона / Б. Ю. Лемешко, А. П. Рогожников // *Метрология*. – 2012. – № 5. – С. 3-26.
92. *Лемешко Б. Ю.* О применении и мощности непараметрических критериев согласия Купера, Ватсона и Жанга / Б. Ю. Лемешко, А. А. Горбунова // *Измерительная техника*. – 2013. – № 5. – С.3-9.

93. *Лемешко Б.Ю.* Применение непараметрических критериев согласия Купера и Ватсона при проверке сложных гипотез / *Б.Ю. Лемешко, А.А. Горбунова // Измерительная техника.* – 2013. – № 9. – С.14-21.
94. *Лемешко Б.Ю.* О решении проблем применения некоторых непараметрических критериев согласия / *Б.Ю. Лемешко, А.А. Горбунова, С.Б. Лемешко, А.П. Рогожников // Автометрия.* – 2014. – Т.50. – № 1. – С.26-43.
95. *Лемешко Б.Ю.* Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению / *Б.Ю. Лемешко.* – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 163 с.
96. *Мартынов Г.В.* Критерии омега-квадрат / *Г.В. Мартынов.* – М.: Наука, 1978. – 80 с.
97. *Никулин М.С.* Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба / *М.С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение.* – 1973. – Т. XVIII, № 3. – С. 583–591.
98. *Никулин М.С.* О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений / *М.С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение.* – 1973. – Т. XVIII. – № 3. – С. 675–67.
99. *Новицкий П.В.* Оценка погрешностей результатов измерений / *П.В. Новицкий, И.А. Зограф.* – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 303 с.
100. Пат. 2013615968, МКИ. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин "Интервальная статистика 5.1" / *А.А. Горбунова, Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, А.П. Рогожников, Е.В. Чимитова; НГТУ - 2013612140; заяв. 21.03.13; опуб. 25.06.13.* - 1 с. Дополнительно: приоритет от 21.03.13, выдавшая страна: РФ, сведения об издании: Реестр программ для ЭВМ. URL: http://www.ami.nstu.ru/~headrd/ISW_exe.zip (дата обращения 15.01.2014).
101. Р 50.1.037–2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. II. Непараметрические критерии. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 64 с.
102. Р 50.1.033–2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа хи-квадрат. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 87 с.
103. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: монография / *Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова.* – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с.
104. *Чибисов Д.М.* Некоторые критерии типа хи-квадрат для непрерывных распределений / *Д.М. Чибисов // Теория вероятностей и ее применение.* – 1971. – Т. XVI, № 1. – С. 3–20.

**Приложение А.
Таблицы для критериев проверки нормальности**

Таблица А.1

Процентные точки для статистики критерия проверки симметричности

n	$p = 1 - \alpha$		n	$p = 1 - \alpha$	
	0.95	0.99		0.95	0.99
8	0.99	1.42	400	0.2	0.28
9	0.97	1.41	450	0.19	0.27
10	0.95	1.39	500	0.18	0.26
12	0.91	1.34	550	0.17	0.24
15	0.85	1.26	600	0.16	0.23
20	0.77	1.15	650	0.16	0.22
25	0.71	1.06	700	0.15	0.22
30	0.66	0.98	750	0.15	0.21
35	0.62	0.92	800	0.14	0.2
40	0.59	0.87	850	0.14	0.2
45	0.56	0.82	900	0.13	0.19
50	0.53	0.79	950	0.13	0.18
60	0.49	0.72	1000	0.13	0.18
70	0.46	0.67	1200	0.12	0.16
80	0.43	0.63	1400	0.11	0.15
90	0.41	0.6	1600	0.10	0.14
100	0.39	0.57	1800	0.10	0.13
125	0.35	0.51	2000	0.09	0.13
150	0.32	0.46	2500	0.08	0.11
175	0.30	0.43	3000	0.07	0.10
200	0.28	0.4	3500	0.07	0.10
250	0.25	0.36	4000	0.06	0.09
300	0.23	0.33	4500	0.06	0.08
350	0.21	0.3	5000	0.06	0.08

Таблица А.2

Процентные точки для статистики критерия проверки на эксцесс

<i>n</i>	<i>p</i>				<i>n</i>	<i>p</i>			
	0.01	0.05	0.95	0.99		0.01	0.05	0.95	0.99
8	1.31	1.46	3.7	4.53	500	2.57	2.67	3.37	3.6
9	1.35	1.53	3.86	4.82	550	2.58	2.69	3.38	3.57
10	1.39	1.56	3.95	5	600	2.6	2.71	3.34	3.54
12	1.46	1.64	4.05	5.2	650	2.61	2.71	3.33	3.52
15	1.55	1.72	4.13	5.3	700	2.62	2.72	3.31	3.50
20	1.65	1.82	4.17	5.36	750	2.64	2.73	3.30	3.48
25	1.72	1.91	4.18	5.3	800	2.65	2.74	3.29	3.46
30	1.79	1.98	4.11	5.21	850	2.66	2.74	3.28	3.45
35	1.84	2.03	4.1	5.13	900	2.66	2.75	3.28	3.43
40	1.89	2.07	4.05	5.04	950	2.67	2.76	3.27	3.42
45	1.93	2.11	4.00	4.94	1000	2.68	2.76	3.26	3.41
50	1.95	2.15	3.99	4.88	1200	2.71	2.78	3.24	3.37
75	2.08	2.27	3.87	4.59	1400	2.72	2.8	3.22	3.34
100	2.18	2.35	3.77	4.39	1600	2.74	2.81	3.21	3.32
125	2.24	2.40	3.71	4.24	1800	2.76	2.82	3.20	3.3
150	2.29	2.45	3.65	4.13	2000	2.77	2.83	3.18	3.28
200	2.37	2.51	3.57	3.98	2500	2.79	2.85	3.16	3.25
250	2.42	2.55	3.52	3.87	3000	2.81	2.86	3.15	3.22
300	2.46	2.59	3.47	3.79	3500	2.82	2.87	3.14	3.21
350	2.50	2.62	3.44	3.72	4000	2.83	2.88	3.13	3.19
400	2.25	2.64	3.41	3.67	4500	2.84	2.88	3.12	3.18
450	2.55	2.66	3.39	3.63	5000	2.85	2.89	3.12	3.17

Таблица А.3

Коэффициенты a_k для вычисления статистики критерия Шапиро–Уилка

n	k														n
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
8	0.6052	0.3164	0.1743	0.0561											8
9	0.5888	0.3244	0.1976	0.0947											9
10	0.5739	0.3291	0.2141	0.1224	0.0399										10
11	0.5601	0.3315	0.2260	0.1429	0.0695										11
12	0.5475	0.3325	0.2347	0.1586	0.0922	0.0303									12
13	0.5359	0.3325	0.2412	0.1707	0.1099	0.0539									13
14	0.5251	0.3318	0.2430	0.1802	0.1240	0.0727	0.024								14
15	0.5150	0.3306	0.2495	0.1878	0.1353	0.0980	0.0433								15
16	0.5056	0.3290	0.2521	0.1939	0.1447	0.1005	0.0593	0.0196							16
17	0.4968	0.3273	0.2540	0.1988	0.1524	0.1109	0.0725	0.0359							17
18	0.4886	0.3253	0.2553	0.2027	0.1587	0.1197	0.0837	0.0496	0.0163						18
19	0.4808	0.3232	0.2561	0.2059	0.1641	0.1271	0.0932	0.0612	0.0303						19
20	0.4734	0.3211	0.2565	0.2085	0.1686	0.1334	0.1013	0.0711	0.0422	0.014					20
21	0.4643	0.3185	0.2578	0.2119	0.1736	0.1399	0.1092	0.0804	0.053	0.0263					21
22	0.4590	0.3156	0.2571	0.2131	0.1764	0.1443	0.1150	0.0878	0.0618	0.0368	0.0120				22
23	0.4542	0.3126	0.2563	0.2139	0.1787	0.1480	0.1201	0.0941	0.0696	0.0459	0.0228				23
24	0.4493	0.3098	0.2554	0.2145	0.1807	0.1512	0.1245	0.0997	0.0764	0.0539	0.0321	0.0107			24
25	0.4450	0.3069	0.2543	0.2148	0.1822	0.1539	0.1283	0.1046	0.0823	0.0610	0.0403	0.0200			25
26	0.4407	0.3043	0.2533	0.2151	0.1836	0.1563	0.1316	0.1089	0.0876	0.0672	0.0476	0.0284	0.0094		26
27	0.4366	0.3018	0.2522	0.2152	0.1848	0.1584	0.1346	0.1128	0.0923	0.0728	0.0540	0.0358	0.0178		27
28	0.4328	0.2992	0.2510	0.2151	0.1857	0.1601	0.1372	0.1162	0.0965	0.0778	0.0598	0.0424	0.0253	0.0084	28
29	0.4291	0.2968	0.2499	0.2150	0.1864	0.1616	0.1395	0.1192	0.1002	0.0822	0.0650	0.0483	0.0320	0.0159	29
30	0.4254	0.2944	0.2487	0.2148	0.1870	0.1630	0.1415	0.1219	0.1036	0.0862	0.0697	0.0537	0.0381	0.0227	30
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	n

n	k														n
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
31	0.4220	0.2921	0.2475	0.2145	0.1874	0.1641	0.1433	0.1243	0.1066	0.0899	0.0739	0.0585	0.0435	0.0289	31
32	0.4188	0.2898	0.2463	0.2141	0.1878	0.1651	0.1449	0.1265	0.1093	0.0931	0.0777	0.0629	0.0485	0.0344	32
33	0.4156	0.2876	0.2451	0.2137	0.1880	0.1660	0.1463	0.1284	0.1118	0.0961	0.0812	0.0669	0.0530	0.0395	33
34	0.4127	0.2854	0.2439	0.2132	0.1882	0.1667	0.1475	0.1301	0.1140	0.0988	0.0844	0.0706	0.0572	0.0441	34
35	0.4098	0.2834	0.2427	0.2127	0.1883	0.1673	0.1487	0.1317	0.1160	0.1013	0.0873	0.0739	0.0610	0.0484	35
36	0.4068	0.2813	0.2415	0.2121	0.1883	0.1678	0.1496	0.1331	0.1179	0.1036	0.0900	0.0770	0.0645	0.0523	36
37	0.4040	0.2794	0.2403	0.2116	0.1883	0.1683	0.1505	0.1344	0.1196	0.1056	0.0924	0.0798	0.0677	0.0559	37
38	0.4015	0.2774	0.2391	0.211	0.1881	0.1686	0.1513	0.1356	0.1211	0.1075	0.0947	0.0824	0.0706	0.0592	38
39	0.3989	0.2755	0.2380	0.2104	0.1880	0.1689	0.1520	0.1366	0.1225	0.1092	0.0967	0.0848	0.0733	0.0622	39
40	0.3964	0.2737	0.2368	0.2098	0.1878	0.1691	0.1526	0.1376	0.1237	0.1108	0.0986	0.0870	0.0759	0.0651	40
41	0.3949	0.2719	0.2357	0.2091	0.1876	0.1693	0.1531	0.1384	0.1249	0.1123	0.1004	0.0891	0.0782	0.0677	41
42	0.3917	0.2701	0.2345	0.2085	0.1874	0.1694	0.1535	0.1392	0.1259	0.1136	0.1020	0.0909	0.0804	0.0701	42
43	0.3894	0.2684	0.2334	0.2078	0.1871	0.1695	0.1539	0.1398	0.1269	0.1149	0.1035	0.0927	0.0824	0.0724	43
44	0.3872	0.2667	0.2323	0.2072	0.1868	0.1695	0.1542	0.1405	0.1278	0.1160	0.1049	0.0943	0.0842	0.0745	44
45	0.3850	0.2651	0.2313	0.2065	0.1868	0.1695	0.1545	0.1410	0.1286	0.1170	0.1062	0.0959	0.0860	0.0765	45
46	0.3830	0.2635	0.2302	0.2058	0.1862	0.1695	0.1548	0.1415	0.1293	0.1180	0.1073	0.0972	0.0876	0.0783	46
47	0.3808	0.2620	0.2291	0.2052	0.1869	0.1695	0.1550	0.1420	0.1300	0.1189	0.1085	0.0986	0.0892	0.0801	47
48	0.3789	0.2604	0.2281	0.2045	0.1855	0.1693	0.1551	0.1423	0.1306	0.1197	0.1095	0.0998	0.0906	0.0817	48
49	0.3770	0.2589	0.2271	0.2038	0.1851	0.1692	0.1553	0.1427	0.1312	0.1205	0.1105	0.1010	0.0919	0.0832	49
50	0.3751	0.2574	0.2260	0.2032	0.1847	0.1691	0.1554	0.1430	0.1317	0.1212	0.1113	0.1020	0.0932	0.0846	50
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	n

Таблица А.3

Коэффициенты a_k для вычисления статистики критерия Шапиро–Уилка (окончание)

n	k											n
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
30	0.0076											30
31	0.0144											31
32	0.0206	0.0068										32
33	0.0262	0.0131										33
34	0.0314	0.0187	0.0062									34
35	0.0361	0.0239	0.0119									35
36	0.0404	0.0287	0.0172	0.0057								36
37	0.0444	0.0331	0.0220	0.011								37
38	0.0481	0.0372	0.0264	0.0158	0.0053							38
39	0.0515	0.0409	0.0305	0.0203	0.0101							39
40	0.0546	0.0444	0.0343	0.0244	0.0146	0.0049						40
41	0.0575	0.0476	0.0379	0.0283	0.0188	0.0094						41
42	0.0602	0.0506	0.0411	0.0318	0.0227	0.0136	0.0045					42
43	0.0628	0.0534	0.0442	0.0352	0.0263	0.0175	0.0087					43
44	0.0651	0.0560	0.0471	0.0383	0.0296	0.0211	0.0126	0.0042				44
45	0.0673	0.0584	0.0497	0.0412	0.0328	0.0245	0.0163	0.0081				45
46	0.0694	0.0607	0.0522	0.0439	0.0357	0.0277	0.0197	0.0118	0.0039			46
47	0.0713	0.0628	0.0546	0.0465	0.0385	0.0307	0.0229	0.0153	0.0076			47
48	0.0731	0.0648	0.0568	0.0489	0.0411	0.0335	0.0259	0.0185	0.0111	0.0037		48
49	0.0748	0.0667	0.0588	0.0511	0.0436	0.0361	0.0288	0.0215	0.0143	0.0071		49
50	0.0764	0.0685	0.0608	0.0532	0.0459	0.0386	0.0314	0.0244	0.0174	0.0104	0.0035	50
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

Таблица А.4

Процентные точки для статистики критерия Шапиро–Уилка

<i>n</i>	<i>p</i>		<i>n</i>	<i>p</i>	
	0.01	0.05		0.01	0.05
8	0.749	0.818	30	0.9	0.927
9	0.764	0.829	31	0.902	0.929
10	0.781	0.842	32	0.904	0.93
11	0.792	0.85	33	0.906	0.931
12	0.805	0.859	34	0.908	0.933
13	0.814	0.866	35	0.91	0.934
14	0.825	0.874	36	0.912	0.935
15	0.835	0.881	37	0.914	0.936
16	0.844	0.887	38	0.916	0.938
17	0.851	0.892	39	0.917	0.939
18	0.858	0.897	40	0.919	0.94
19	0.863	0.901	41	0.93	0.941
20	0.868	0.905	42	0.922	0.942
21	0.873	0.908	43	0.923	0.943
22	0.878	0.911	44	0.924	0.944
23	0.881	0.914	45	0.926	0.945
24	0.884	0.916	46	0.927	0.945
25	0.888	0.918	47	0.928	0.946
26	0.891	0.92	48	0.929	0.947
27	0.894	0.92	49	0.929	0.947
28	0.896	0.924	50	0.93	0.947
29	0.898	0.926			

Таблица А.5

Процентные точки для статистики критерия Эппса–Палли

n	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
8	0.229	0.271	0.347	0.427	0.528
9	0.232	0.275	0.352	0.431	0.537
10	0.233	0.277	0.354	0.435	0.544
15	0.238	0.284	0.364	0.448	0.559
20	0.240	0.287	0.368	0.452	0.565
25	0.240	0.287	0.370	0.454	0.570
30	0.241	0.289	0.372	0.457	0.572
40	0.241	0.289	0.373	0.458	0.576
50	0.241	0.290	0.374	0.460	0.577
60	0.241	0.290	0.376	0.463	0.580
80	0.241	0.290	0.376	0.463	0.580
100	0.241	0.291	0.376	0.463	0.580
200	0.241	0.291	0.377	0.466	0.585
1000	0.2416	0.2916	0.3778	0.4655	0.5844

Таблица А.6

Коэффициенты для вычисления статистики модифицированного критерия Шапиро–Уилка

n	$\gamma(n)$	$\delta(n)$	$\varepsilon(n)$	n	$\gamma(n)$	$\delta(n)$	$\varepsilon(n)$
8	-2.696	1.333	0.4186	30	-6.150	1.949	0.1872
9	-2.968	1.400	0.3900	31	-6.248	1.965	0.1840
10	-3.262	1.471	0.3660	32	-6.324	1.976	0.1811
11	-3.485	1.515	0.3451	33	-6.402	1.988	0.1781
12	-3.731	1.571	0.3270	34	-6.480	2.000	0.1755
13	-3.936	1.613	0.3111	35	-6.559	2.012	0.1727
14	-4.155	1.655	0.2969	36	-6.640	2.024	0.1702
15	-4.373	1.695	0.2842	37	-6.721	2.037	0.1677
16	-4.567	1.724	0.2727	38	-6.803	2.049	0.1656
17	-4.713	1.739	0.2622	39	-6.887	2.062	0.1633
18	-4.885	1.770	0.2528	40	-6.961	2.075	0.1612
19	-5.018	1.786	0.2440	41	-7.035	2.088	0.1591
20	-5.153	1.802	0.2359	42	-7.111	2.101	0.1572
21	-5.291	1.818	0.2264	43	-7.188	2.114	0.1552
22	-5.413	1.835	0.2207	44	-7.266	2.128	0.1534
23	-5.508	1.848	0.2157	45	-7.345	2.141	0.1516
24	-5.605	1.862	0.2106	46	-7.414	2.155	0.1499
25	-5.704	1.876	0.2063	47	-7.484	2.169	0.1482
26	-5.803	1.890	0.2020	48	-7.555	2.183	0.1466
27	-5.905	1.905	0.1980	49	-7.615	2.198	0.1451
28	-5.988	1.919	0.1943	50	-7.677	2.212	0.1436
29	-6.074	1.934	0.1907				

Таблица А.7

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании μ и σ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	A
3	-1.1106	1.1106	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0.4065
4	-1.3834	0.0	1.3834	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0.5527
5	-1.6961	-0.6894	0.6894	1.6961	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0.6826
6	-1.8817	-0.9970	0.0	0.9970	1.8817	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0.7557
7	-2.0600	-1.2647	-0.4918	0.4918	1.2647	2.0600	–	–	–	–	–	–	–	–	0.8103
8	-2.1954	-1.4552	-0.7863	0.0	0.7863	1.4552	2.1954	–	–	–	–	–	–	–	0.8474
9	-2.3188	-1.6218	-1.0223	-0.3828	0.3828	1.0223	1.6218	2.3188	–	–	–	–	–	–	0.8753
10	-2.4225	-1.7578	-1.2046	-0.6497	0.0	0.6497	1.2046	1.7578	2.4225	–	–	–	–	–	0.8960
11	-2.5167	-1.8784	-1.3602	-0.8621	-0.3143	0.3143	0.8621	1.3602	1.8784	2.5167	–	–	–	–	0.9121
12	-2.5993	-1.9028	-1.4914	-1.0331	-0.5334	0.0	0.5334	1.0331	1.4914	1.9028	2.5993	–	–	–	0.9247
13	-2.6746	-2.0762	-1.6068	-1.1784	-0.7465	-0.2669	0.2669	0.7465	1.1784	1.6068	2.0762	2.6746	–	–	0.9348
14	-2.7436	-2.1609	-1.7092	-1.3042	-0.9065	-0.4818	0.0	0.4818	0.9065	1.3042	1.7092	2.1609	2.7436	–	0.9430
15	-2.8069	-2.2378	-1.8011	-1.4150	-1.0435	-0.6590	-0.2325	0.2325	0.6590	1.0435	1.4150	1.8011	2.2378	2.8069	0.9498

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании μ и σ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	A
3	0.1334	0.7332	0.1334	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0.4065
4	0.0833	0.4167	0.4167	0.0833	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0.5527
5	0.0449	0.2004	0.5094	0.2004	0.0449	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0.6826
6	0.0299	0.1295	0.3406	0.3406	0.1295	0.0299	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0.7557
7	0.0197	0.0833	0.2084	0.3772	0.2084	0.0833	0.0197	–	–	–	–	–	–	–	–	0.8103
8	0.0141	0.0587	0.1431	0.2841	0.2841	0.1431	0.0587	0.0141	–	–	–	–	–	–	–	0.8474
9	0.0102	0.0422	0.1009	0.1976	0.2982	0.1976	0.1009	0.0422	0.0102	–	–	–	–	–	–	0.8753
10	0.0077	0.0317	0.0748	0.1438	0.2420	0.2420	0.1438	0.0748	0.0317	0.0077	–	–	–	–	–	0.8960
11	0.0059	0.0243	0.0567	0.1074	0.1823	0.2468	0.1823	0.1074	0.0567	0.0243	0.0059	–	–	–	–	0.9121
12	0.0047	0.0190	0.0442	0.0829	0.1392	0.2100	0.2100	0.1392	0.0829	0.0442	0.0190	0.0047	–	–	–	0.9247
13	0.0037	0.0152	0.0352	0.0652	0.1085	0.1670	0.2104	0.1670	0.1085	0.0652	0.0352	0.0152	0.0037	–	–	0.9348
14	0.0030	0.0124	0.0283	0.0524	0.0862	0.1327	0.1850	0.1850	0.1327	0.0862	0.0524	0.0283	0.0124	0.0030	–	0.9430
15	0.0025	0.0101	0.0232	0.0427	0.0698	0.1066	0.1532	0.1838	0.1532	0.1066	0.0698	0.0427	0.0232	0.0101	0.0025	0.9498

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании μ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	A
2	0.0	–	–	–	–	–	–	–	–	0.6336
3	-0.6120	0.6120	–	–	–	–	–	–	–	0.8098
4	-0.9816	0.0	0.9816	–	–	–	–	–	–	0.8825
5	-1.2444	-0.3823	0.3823	1.2444	–	–	–	–	–	0.9201
6	-1.4468	-0.6589	0.0	0.6589	1.4468	–	–	–	–	0.9420
7	-1.6108	-0.8744	-0.2803	0.2803	0.8744	1.6108	–	–	–	0.9560
8	-1.7479	-1.0499	-0.5005	0.0	0.5005	1.0499	1.7479	–	–	0.9655
9	-1.8655	-1.1976	-0.6812	-0.2218	0.2218	0.6812	1.1976	1.8655	–	0.9721
10	-1.9682	-1.3246	-0.8338	-0.4047	0.0	0.4047	0.8338	1.3246	1.9682	0.9771

Таблица А.10

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании μ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	A
2	0.5000	0.5000	–	–	–	–	–	–	–	–	0.6336
3	0.2703	0.4594	0.2703	–	–	–	–	–	–	–	0.8098
4	0.1631	0.3369	0.3369	0.1631	–	–	–	–	–	–	0.8825
5	0.1067	0.2444	0.2978	0.2444	0.1067	–	–	–	–	–	0.9201
6	0.0740	0.1810	0.2450	0.2450	0.1810	0.0740	–	–	–	–	0.9320
7	0.0536	0.1373	0.1987	0.2208	0.1987	0.1373	0.0536	–	–	–	0.9560
8	0.0403	0.1066	0.1615	0.1916	0.1916	0.1615	0.1066	0.0403	–	–	0.9655
9	0.0310	0.0845	0.1323	0.1644	0.1756	0.1644	0.1323	0.0845	0.0310	–	0.9721
10	0.0245	0.0662	0.1095	0.1406	0.1572	0.1572	0.1406	0.1095	0.0662	0.0245	0.9771

Таблица А.11

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании σ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	A
2	-1.5750	–	–	–	–	–	–	–	–	0.3042
	1.5750	–	–	–	–	–	–	–	–	0.3042
3	-1.4821	1.4821	–	–	–	–	–	–	–	0.6522
4	-2.0249	-1.1865	1.4520	–	–	–	–	–	–	0.7358
	-1.4520	1.1855	2.0249	–	–	–	–	–	–	0.7358
5	-1.9956	-1.1401	1.1401	1.9958	–	–	–	–	–	0.8244
6	-2.3269	-1.6190	-0.9837	1.1190	1.9821	–	–	–	–	0.8588
	-1.9821	-1.1190	0.9837	1.6190	2.3269	–	–	–	–	0.8588
7	-2.3130	-1.6002	-0.9558	0.9558	1.6002	2.3130	–	–	–	0.8943
8	-2.5488	-1.9105	-1.3848	-0.8548	0.9400	1.5897	2.3053	–	–	0.9117
	-2.3053	-1.5897	-0.9400	0.8548	1.3848	1.9105	2.5488	–	–	0.9117
9	-2.5408	-1.9003	-1.3715	-0.8355	0.8355	1.3715	1.9003	2.5408	–	0.9294
10	-2.7223	-2.1286	-1.6602	-1.2260	-0.7634	0.8233	1.3632	1.8939	2.5358	0.9394
	-2.5358	-1.8939	-1.3632	-0.8233	0.7634	1.2260	1.6602	2.1286	2.7223	0.9394

Таблица А.12

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании σ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	A
2	0.0576	0.9424	–	–	–	–	–	–	–	–	0.3042
	0.9424	0.0576	–	–	–	–	–	–	–	–	0.3042
3	0.0692	0.8616	0.0692	–	–	–	–	–	–	–	0.6522
4	0.0214	0.0965	0.8089	0.0732	–	–	–	–	–	–	0.7358
	0.0732	0.8089	0.0965	0.0214	–	–	–	–	–	–	0.7358
5	0.0230	0.1041	0.7458	0.1041	0.0230	–	–	–	–	–	0.8244
6	0.0100	0.0427	0.1099	0.7058	0.1079	0.0237	–	–	–	–	0.8588
	0.0237	0.1079	0.7058	0.1099	0.0427	0.0100	–	–	–	–	0.8588
7	0.0104	0.0444	0.1148	0.6608	0.1148	0.0444	0.0104	–	–	–	0.8943
8	0.0054	0.0226	0.0550	0.1133	0.6300	0.1177	0.0454	0.0106	–	–	0.9117
	0.0106	0.0454	0.1177	0.6300	0.1133	0.0550	0.0226	0.0054	–	–	0.9117
9	0.0055	0.0232	0.0564	0.1166	0.5966	0.1166	0.0564	0.0232	0.0055	–	0.9294
10	0.0032	0.0134	0.0318	0.0617	0.1125	0.5722	0.1188	0.0573	0.0235	0.0056	0.9394
	0.0056	0.0235	0.0573	0.1188	0.5722	0.1126	0.0617	0.0318	0.0314	0.0032	0.9394