Министерство образования Российской Федерации
Новосибирский государственный технический университет

Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов

ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА
Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим

Методические рекомендации

Часть II. **НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ**

Новосибирск – 1999

УДК 519.2

Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим: Методические рекомендации. Часть II. Непараметрические критерии. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999. – С.85 (С. *90 – с дополнениями*).

Методические рекомендации предназначены для использования в качестве руководства по применению непараметрических критериев согласия типа Колмогорова и типа ω^2 Мизеса при статистической обработке результатов наблюдений в различных приложениях: анализе данных физических и технологических экспериментов, обработке результатов измерений, в задачах исследования надежности, контроля качества и т.д.

Основное внимание уделено вопросам использования рассматриваемых критериев при проверке сложных гипотез о согласии опытного распределения с теоретическим, когда по той же выборке оцениваются и параметры распределения. Рекомендации содержат новые результаты, расширяющие область корректного применения критериев согласия.

Методические рекомендации предназначены для студентов различных направлений и специальностей, изучающих курс математической статистики. Они являются практическим руководством по применению критериев согласия в задачах статистического анализа наблюдений. Рекомендации будут полезны научным и инженерным работникам, аспирантам, специалистам различных отраслей, использующим аппарат теории вероятностей и математической статистики при описании результатов наблюдений и обработке экспериментальных наблюдений.

Ил. 23, табл. 28 (*34*), библ. 35 назв.

Рецензенты: В.В. Губарев, д-р техн. наук. проф.
А.А. Спектор, д-р техн. наук. проф.

Работа подготовлена на кафедре прикладной математики Новосибирского государственного технического университета, поддержана техническим комитетом по стандартизации ТК 125 “Стандартизация статистических методов управления качеством”.

Оглавление

Введение

Сфера применения критериев согласия чрезвычайно широка. Данные рекомендации предназначены для использования в качестве руководства по применению критериев согласия при статистической обработке результатов наблюдений, измерений, контроля, испытаний продукции и изделий. Рекомендации распространяется на правила и документы по стандартизации, метрологии, сертификации и аккредитации, использующие методы статистического анализа. Они определяют правила применения непараметрических критериев при проверке простых и сложных гипотез о согласии наблюдаемых выборочных данных с предполагаемым законом распределения непрерывной случайной величины.

Данное пособие является продолжением вышедшего в Новосибирском государственном техническом университете в 1998 г. издания “Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Методические рекомендации. Часть I. Критерии типа χ^2” [1].

Необходимость разработки второй части вызвана тем, что в действующих регламентирующих документах, в том числе в СТ СЭВ 1190-78 “Прикладная статистика. Правила проверки опытного распределения с теоретическим” практически не оговорены правила применения непараметрических критериев согласия типа Колмогорова или типа ω^2 Мизеса при проверке сложных гипотез. В этой связи практика использования таких критериев в задачах контроля качества, задачах исследования надежности и в других приложениях зачастую приводит к их некорректному применению и как следствие неверным статистическим выводам.

Рекомендации призваны устранить этот пробел в научно-методической литературе. С одной стороны, они являются практическим руководством, расширяющим за счет полученных и излагаемых результатов сферу корректного применения критериев согласия при проверке сложных гипотез, с другой стороны, содержат новые сведения из рассматриваемого раздела математической статистики, предлагают зарекомендовавшую себя методику исследования статистических закономерностей.

1. Общие положения

1.1. Простые и сложные гипотезы при проверке согласия

Применяя критерии согласия, следует различать проверку простых и сложных гипотез.

Простая проверяемая гипотеза имеет вид H_0: $F(x) = F(x,\theta)$, где $F(x,\theta)$ – функция распределения вероятностей, с которой проверяется согласие наблюдаемой выборки, а θ – известное значение параметра (скалярного или векторного).

При проверке сложной гипотезы проверяется гипотеза H_0: $F(x) \in \{F(x,\theta),\ \theta \in \Theta\}$. В этом случае оценка параметра распределения $\hat{\theta}$ вычисляется по той же самой выборке, по которой проверяется согласие. Если оценка $\hat{\theta}$ вычисляется по другой выборке, то гипотеза простая. В дальнейшем будем обозначать сложную гипотезу следующим образом H_0: $F(x) = F(x,\hat{\theta})$, где $\hat{\theta}$ – оценка параметра, вычисляемая по этой же выборке.

В процессе проверки согласия по выборке вычисляется значение S^* статистики используемого критерия. Затем для того, чтобы сделать вывод о том, принять или отклонить гипотезу H_0, необходимо знать условное распределение $G(S|H_0)$ статистики S при справедливости H_0. И если вероятность

$$P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{+\infty} g(s|H_0)ds \tag{1}$$

достаточно большая, по крайней мере $P\{S > S^*\} > \alpha$, где $g(s|H_0)$ – условная плотность, а α – задаваемый уровень значимости (вероятность ошибки первого рода – отклонить справедливую гипотезу H_0), то принято считать, что нет оснований для отклонения гипотезы H_0.

Если в процессе анализа выборки рассматривается некоторая альтернатива H_1: $F(x) = F_1(x,\theta)$, то с ней связывают условное распределение $G(S|H_1)$ и вероятность ошибки второго рода β (принять гипотезу H_0, в то время как верна гипотеза H_1). Задание значения α для применяемого критерия согласия однозначно определяет и величину β:

$$\alpha = \int_{S_\alpha}^{+\infty} g(s|H_0)ds, \tag{2}$$

$$\beta = \int_{0}^{S_\alpha} g(s|H_1)ds. \tag{3}$$

При этом, чем больше мощность критерия $1-\beta$, тем лучше он различает соответствующие гипотезы.

1.2. Распределения статистик непараметрических критериев согласия при простых гипотезах

1.2.1. Критерий Колмогорова

В случае простых гипотез предельные распределения статистик рассматриваемых критериев согласия Колмогорова, Смирнова, ω^2 и Ω^2 Мизеса известны и не зависят от вида наблюдаемого закона распределения и, в частности, от его параметров. Говорят, что эти критерии являются “свободными от распределения”. Это достоинство предопределяет широкое использование данных критериев в приложениях.

Распределение статистики

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} \left| F_n(x) - F(x,\theta) \right|, \tag{4}$$

где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, $F(x,\theta)$ – теоретическая функция распределения, n – объём выборки, было получено Колмогоровым в [2]. При $n \to \infty$ распределение статистики $\sqrt{n}D_n$ сходится равномерно к распределению Колмогорова

$$K(S) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 s^2} . \tag{5}$$

Наиболее часто в критерии Колмогорова (Колмогорова-Смирнова) используется статистика вида [3]

$$S_K = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \tag{6}$$

где

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-) , \tag{7}$$

$$D_n^+ = \max_{1\le i\le n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i,\theta) \right\}, \tag{8}$$

$$D_n^- = \max_{1\le i\le n} \left\{ F(x_i,\theta) - \frac{i-1}{n} \right\}, \tag{9}$$

n - объем выборки, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - упорядоченные по возрастанию выборочные значения, $F(x,\theta)$ - функция закона распределения, согласие с которым проверяется. Распределение величины S_K при простой гипотезе в пределе подчиняется закону Колмогорова $K(S)$.

Если для вычисленного по выборке значения статистики S_K^* выполняется неравенство

$$P\{S > S_{\text{К}}^*\} = 1 - K(S_{\text{К}}^*) > \alpha,$$

то нет оснований для отклонения гипотезы H_0.

1.2.2. Критерий Смирнова

В критерии Смирнова используется статистика

$$D_n^+ = \sup_{|x|<\infty}\left(F_n(x) - F(x,\theta)\right) \quad (10)$$

или статистика

$$D_n^- = -\inf_{|x|<\infty}\left(F_n(x) - F(x,\theta)\right), \quad (11)$$

значения которых вычисляются по эквивалентным соотношениям (8),(9).

Реально в критерии обычно используется статистика [3]

$$S_m = \frac{(6nD_n^+ + 1)^2}{9n}, \quad (12)$$

которая при простой гипотезе в пределе подчиняется распределению χ^2 с числом степеней свободы, равным 2.

Гипотеза H_0 не отвергается, если для вычисленного по выборке значения статистики S_m^*

$$P\{S_m > S_m^*\} = \int_{S_m^*}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = e^{-S_m^*/2} > \alpha.$$

1.2.3. Критерии ω^2

В критериях типа ω^2 расстояние между гипотетическим и истинным распределениями рассматривается в квадратичной метрике.

Проверяемая гипотеза H_0 имеет вид [3]

$$H_0\colon \int_{-\infty}^{\infty} \left\{E\left[F_n(x)\right] - F(x)\right\}^2 \psi\left(F(x)\right) dF(x) = 0 \quad (13)$$

при альтернативной гипотезе

$$H_1\colon \int_{-\infty}^{\infty} \left\{E\left[F_n(x)\right] - F(x)\right\}^2 \psi\left(F(x)\right) dF(x) > 0, \quad (14)$$

где $E[\cdot]$ - оператор математического ожидания, $\psi(t)$ - заданная на отрезке $0 \le t \le 1$ неотрицательная функция, относительно которой предполагается, что $\psi(t)$, $t\,\psi(t)$, $t^2\psi(t)$ интегрируемы на отрезке $0 \le t \le 1$ [4]. Статистика критерия [3] выражается соотношением

$$\omega_n^2[\psi(F)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{E[F_n(x)] - F(x)\right\}^2 \psi\big(F(x)\big) dF(x) =$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{g[F(x_i)] - \frac{2i-1}{2n} f[F(x_i)]\right\} + \int_0^1 (1-t)^2\psi(t)dt\,, \qquad (15)$$

где

$$f(t) = \int_0^t \psi(s)ds, \quad g(t) = \int_0^t s\psi(s)ds.$$

При выборе $\psi(t) \equiv 1$ для критерия ω^2 Мизеса получают статистику вида (статистику **Крамера-Мизеса-Смирнова**)

$$S_\omega = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left\{F(x_i,\theta) - \frac{2i-1}{2n}\right\}^2, \qquad (16)$$

которая при простой гипотезе подчиняется распределению $a1(S)$, имеющему вид [3]

$$a1(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j+1/2)\sqrt{4j+1}}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)}\exp\left\{-\frac{(4j+1)^2}{16s}\right\}\times$$

$$\times\left\{I_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right] - I_{\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right]\right\}, \qquad (17)$$

где $I_{-\frac{1}{4}}(\cdot)$, $I_{\frac{1}{4}}(\cdot)$ - модифицированные функции Бесселя,

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi. \qquad (18)$$

При выборе $\psi(t) \equiv 1/t(1-t)$ для критерия Ω^2 Мизеса статистика приобретает вид (статистика **Андерсона-Дарлинга**)

$$S_\Omega = n\Omega_n^2 = -n - 2\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{2i-1}{2n}\ln F(x_i,\theta) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n}\right)\ln(1 - F(x_i,\theta))\right\}. \qquad (19)$$

В пределе эта статистика подчиняется распределению $a2(S)$, имеющему вид [3]

$$a2(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{s} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(j+1/2)(4j+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \exp\left\{ -\frac{(4j+1)^2 \pi^2}{8s} \right\} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \exp\left\{ \frac{s}{8(y^2+1)} - \frac{(4j+1)^2 \pi^2 y^2}{8s} \right\} dy. \qquad (20)$$

Гипотезы о согласии не отвергаются, если выполняются неравенства

$$P\{S_\omega > S_\omega^*\} = 1 - a1(S_\omega^*) > \alpha \text{ и } P\{S_\Omega > S_\Omega^*\} = 1 - a2(S_\Omega^*) > \alpha.$$

1.3. Непараметрические критерии согласия при сложных гипотезах

1.3.1. Потеря критериями свойства “свободы от распределения”

При проверке сложных гипотез, когда по той же самой выборке оцениваются параметры наблюдаемого закона распределения вероятностей, непараметрические критерии согласия Колмогорова, Смирнова, ω^2 и Ω^2 Мизеса теряют свойство “свободы от распределения”. В этом случае предельные распределения статистик этих критериев будут зависеть от закона, которому подчинена наблюдаемая выборка. Более того, распределения статистик непараметрических критериев согласия зависят к тому же и от используемого *метода оценивания параметров*. Следует также учитывать, что распределения статистик существенно зависят от *объёма выборки*.

Игнорирование того, что проверяется сложная гипотеза, неучет фактов различия в сложных гипотезах приводит к некорректному применению непараметрических критериев согласия в приложениях и как следствие неверным статистическим выводам. Различия в предельных распределениях тех же самых статистик при проверке простых и сложных гипотез настолько существенны, что пренебрегать этим абсолютно недопустимо. Поэтому предостережения против неаккуратного применения критериев согласия при проверке сложных гипотез неоднократно поднимались на страницах печати [5-7].

Точкой отсчета, с которой начались исследования предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при сложных гипотезах, послужила работа [8].

В литературе изложен ряд подходов к использованию непараметрических критериев согласия в этом случае.

При достаточно большой выборке ее можно разбить на две части и по одной из них оценивать параметры, а по другой проверять согласие. В случае больших объемов выборки такой подход оправдан [9]. Но если объем выборки относительно невелик, то способ разбиения ее на две части будет отражаться и на оценках параметров, и на распределениях статистик критериев согласия.

Для случая принадлежности выборки нормальному закону предельные распределения статистики критерия ω^2 Мизеса при использовании оценок максимального правдоподобия для оценивания одного или обоих параметров закона были исследованы в [10] аналитическими методами.

В некоторых частных случаях проверки сложных гипотез, например при оценивании параметров распределений экспоненциального, нормального, экстремальных значений, Вейбулла и некоторых других законов, таблицы процентных точек для предельных распределений статистик непараметрических критериев были получены с использованием методов статистического моделирования [11-14].

В [15-19] для статистик типа Колмогорова-Смирнова и некоторых законов, соответствующих гипотезе H_0, получены формулы для приближенного вычисления вероятностей “согласия” вида $P\{S > S^*\}$, где S^* - вычисленное по выборке значение соответствующей статистики S. Построенные формулы дают достаточно хорошие приближения при малых значениях соответствующих вероятностей.

В [20-21] в результате компьютерного моделирования распределений статистик непараметрических критериев для ряда законов, соответствующих гипотезе H_0, найдены аналитически простые модели, которые хорошо аппроксимируют предельные распределения статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки сложных гипотез и оценивания по выборке параметров методом максимального правдоподобия. В [22] методами статистического моделирования исследовано влияние на распределения статистик непараметрических критериев согласия при простых и сложных гипотезах объема наблюдаемой выборки и применяемого метода оценивания параметров.

Построенные на настоящий момент таблицы процентных точек и предельные распределения статистик непараметрических критериев ограничены относительно узким кругом сложных гипотез. Предельные распределения статистик (или процентные точки распределений) при проверке сложных гипотез получены лишь для порядка 15 законов, в то время как множество вероятностных моделей, используемых в приложениях для описания реальных случайных величин, существенно шире.

1.3.2. Методика компьютерного анализа статистических закономерностей

Очевидно, что бесконечное множество случайных величин, с которым мы можем столкнуться на практике, не может быть описано ограниченным подмножеством моделей законов распределений, наиболее часто используемых для описания реальных наблюдений в приложениях. Вообще говоря, любой исследователь для конкретной наблюдаемой величины может предложить (построить) свою параметрическую модель закона, наиболее адекватно, с его точки зрения, описывающего эту случайную величину. Естественно, после оценки по данной выборке параметров модели возникает необходимость проверки сложной гипотезы об адекватности выборочных наблюдений и построенного закона с использованием критериев согласия.

Понятно, что множество всех сложных гипотез бесконечно и заранее иметь распределения $G(S|H_0)$ для любой сложной гипотезы H_0 практически невозможно. Именно поэтому найденные различным образом предельные распределения статистик непараметрических критериев согласия представлены в литературе лишь для ограниченного ряда распределений, наиболее часто используемых в приложениях, особенно в задачах контроля качества и исследования надежности. Что же делать, если для описания выборки используется закон распределения вероятностей $F(x,\theta)$ и найдена оценка его параметра $\hat{\theta}$, а для проверки сложной гипотезы H_0: $F(x) \in \{F(x,\theta),\ \theta \in \Theta\}$ исследователю неизвестно распределение $G(S|H_0)$ статистики соответствующего критерия согласия?

Наиболее целесообразно воспользоваться методикой компьютерного анализа статистических закономерностей, хорошо зарекомендовавшей себя при моделировании распределений статистик критериев [20-23].

Для этого следует в соответствии с законом $F(x,\hat{\theta})$ смоделировать N выборок того же объема n, что и выборка, для которой необходимо проверить гипотезу H_0: $F(x) \in \{F(x,\theta),\ \theta \in \Theta\}$. Далее для каждой из N выборок вычислить оценки тех же параметров закона, а затем значение статистики S соответствующего критерия согласия. В результате будет получена выборка значений статистики $S_1, S_2, \ldots, S_N$ с законом распределения $G(S_n|H_0)$ для проверяемой гипотезы H_0. По этой выборке при достаточно большом N можно построить достаточно гладкую эмпирическую функцию распределения $G_N(S_n|H_0)$, которой можно непосредственно воспользоваться для вывода о том, следует ли принимать гипотезу H_0. При необходимости можно по $G_N(S_n|H_0)$ построить приближенную аналитическую модель, аппроксимирующую $G_N(S_n|H_0)$, и тогда уже, опираясь на эту модель, принимать решение относительно проверяемой гипотезы.

Как показывает практика, хорошей аналитической моделью для $G_N(S_n|H_0)$ часто оказывается один из следующих четырех законов: логарифмически нормальный, гамма-распредление, распределение *Su*-Джонсона или распределение *Sl*-Джонсона [21]. Во всяком случае, всегда можно, опираясь на ограниченное множество законов распределения, построить модель в виде смеси законов [24-25].

Реализация такой процедуры компьютерного анализа распределения статистики в настоящий момент не содержит ни принципиальных, ни практических трудностей. Уровень вычислительной техники позволяет очень быстро получить результаты моделирования, а реализация алгоритма под силу инженеру, владеющему навыками программирования.

В то же время нельзя не согласиться с тем, что такая методика анализа распределений статистик имеет и недостатки, связанные с ограниченной точностью построения закона распределения статистики и возможным влиянием качества используемого датчика псевдослучайных чисел [26]. Поэтому при ее реализации обязательно следует контролировать качество датчиков, генерирующих числа в соответствии с требуемыми законами “наблюдаемых” случайных величин. Современные системы программирования включают в себя достаточно хорошие датчики, генерирующие псевдослучайные числа, распределенные по равномерному закону. При необходимости построения собственного датчика можно воспользоваться алгоритмами моделирования, изложенными в [27].

Отдельно надо коснуться точности построения закона распределения статистики на основании $G_N(S_n|H_0)$. Конечно, точность можно повышать, увеличивая N. По нашим оценкам, отклонения смоделированного распределения от теоретического при $N = 2000$ обычно имеют порядок $\approx \pm 0{,}015$. Если поставить такую цель, то, аппроксимируя эмпирические распределения теоретическими законами и усредняя их по реализациям (при многократном моделировании), можно при необходимости добиться более высокой точности построения закона распределения исследуемой статистики. Вопрос только в том, есть ли в этом необходимость. Как видим, опираясь на построенное распределение $G_N(S_n|H_0)$, можно достаточно точно оценить величину $P\{S > S^*\}$, но значения процентных точек, полученные по $G_N(S_n|H_0)$, могут оказаться с существенной погрешностью. На практике же, к сожалению, проверяя различные гипотезы, чаще сравнивают полученное значение статистики S^* с соответствующей процентной точкой предельного распределения, от чего, по нашему мнению, давно следует отказаться и принимать решение по достигнутому уровню значимости $P\{S > S^*\}$.

Во всех приводимых в дальнейшем примерах, иллюстрирующих распределения статистик критериев $G_N(S_n|H_i)$, $i = \overline{1,2}$, в зависимости от различных факторов с применением изложенной методики количество моделируемых выборок N принималось равным 2000, а их объем n, кроме особо оговоренных случаев, равным 1000.

1.3.3. Факторы, влияющие на распределения статистик критериев при проверке сложных гипотез

Распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез зависят от характера этой сложной гипотезы. На закон распределения статистики $G(S|H_0)$ влияет целый ряд факторов, определяющих “сложность” гипотезы:

– вид наблюдаемого закона распределения $F(x,\theta)$, соответствующего истин-

ной гипотезе H_0;
– тип оцениваемого параметра и количество оцениваемых параметров;
– в некоторых ситуациях конкретное значение параметра (например, в случае гамма-распределения);
– используемый метод оценивания параметров.

При малых объемах выборки n распределение $G(S_n|H_0)$ зависит от n. Однако существенная зависимость распределения статистики от n наблюдается только при небольших объемах выборки. Уже при $n \geq 15 \div 20$ распределение $G(S_n|H_0)$ достаточно близко к предельному $G(S|H_0)$ и зависимостью от n можно пренебречь.

В случае задания конкретной альтернативы (конкурирующей гипотезы H_1, которой соответствует распределение $F_1(x,\theta)$), функция распределения статистики $G(S|H_1)$ также зависит от всех перечисленных факторов. Но в отличие от $G(S|H_0)$ распределение статистики $G(S|H_1)$ при справедливой гипотезе H_1 очень сильно зависит от объема выборки n. Именно благодаря этому с ростом n повышается способность критериев различать гипотезы, возрастает мощность критериев.

1.3.4. Влияние объёма выборки на распределения статистик непараметрических критериев при простых и сложных гипотезах

В случае проверки простых гипотез предельными распределениями статистик критериев Колмогорова и Смирнова можно пользоваться при $n > 20$ [3]. Исследование методами статистического моделирования зависимости распределений статистик всех рассматриваемых здесь непараметрических критериев от объема выборки при проверке различных как простых, так и сложных гипотез показывает, что это справедливо во всех случаях.

Например, рис. 1 иллюстрирует, как при увеличении объёма выборки (n=5,10,20) меняется распределение $G(S_n|H_0)$ статистики Колмогорова S_K в случае проверки простой гипотезы о принадлежности выборки нормальному закону. На рисунке отражено также предельное распределение статистики – функция распределения Колмогорова $K(S)$. Эмпирические распределения $G_N(S_n|H_0)$ при больших n практически сливаются с $K(S)$ и на рисунке не показаны. Как видим, при малых n распределение существенно отличается от предельного, но уже при $n \geq 15 \div 20$ ошибка при вычислении вероятности "согласия" $P\{S > S^*\}$ оказывается достаточно малой.

Та же самая картина наблюдается в случае проверки сложных гипотез о согласии. На рис. 2 при n= 5, 10, 20, 1000 представлены распределения $G(S_n|H_0)$ статистики S_K в случае проверки аналогичной, но уже сложной, гипотезы о нормальности, когда по выборке вычисляются оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметров нормального закона.

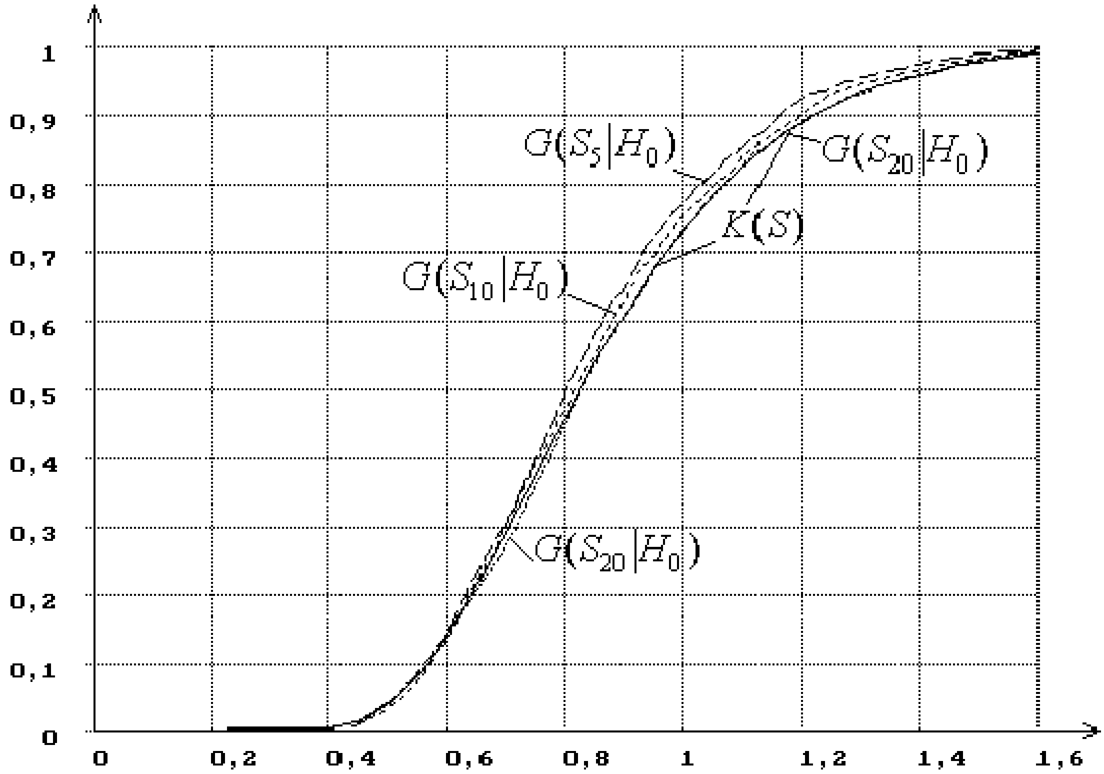

Рис. 1. Зависимость от n распределений $G(S_n|H_0)$ статистики S_K Колмогорова при простой гипотезе (H_0 - нормальное распределение): $n = 5, 10, 20$, $K(S)$

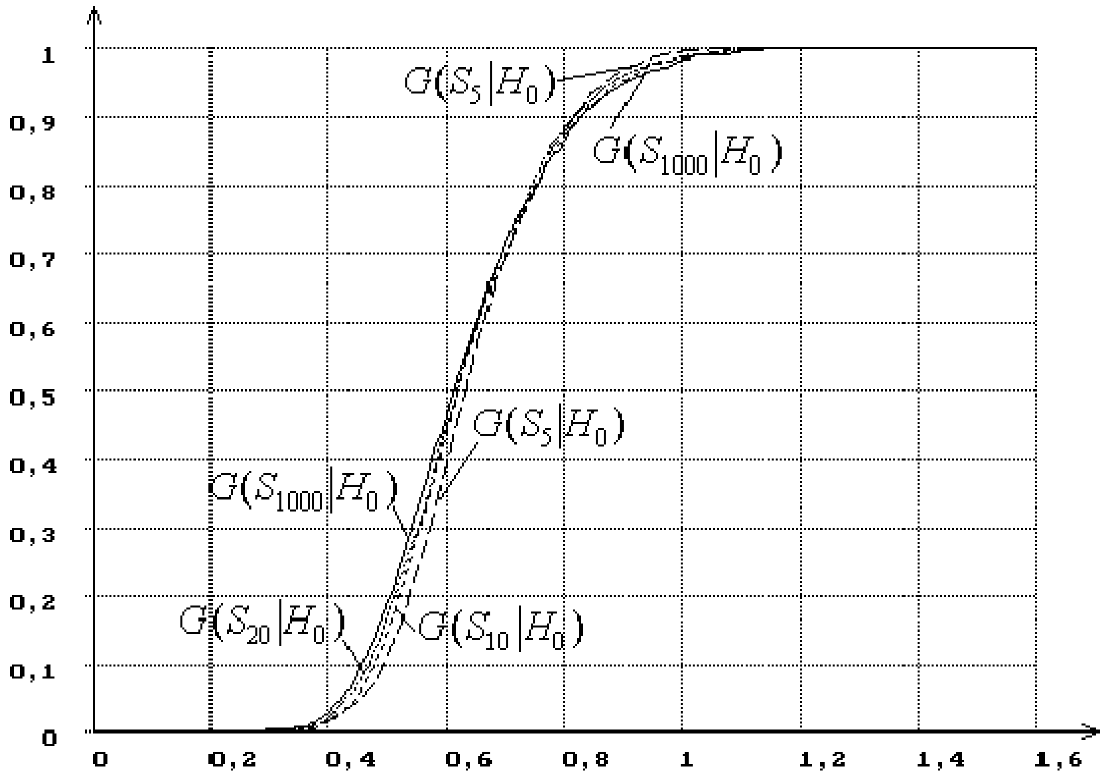

Рис. 2. Зависимость от n распределений $G(S_n(H_0)$ статистики S_K Колмогорова при сложной гипотезе (H_0 - нормальное распределение, ОМП): $n = 5, 10, 20, 1000$

Следует отметить, что при малых n наибольшие отклонения от предельных распределений наблюдаются на “хвостах”. И при простых, и при сложных гипотезах с ростом n распределения $G(S_n|H_0)$ равномерно сходятся к предельному. Но если в случае простых гипотез с ростом n увеличивается вероятность больших значений статистик, то в случае сложных возрастают вероятности и больших, и малых значений статистик. Последнее замечание справедливо для распределений статистик S_K, S_ω, S_Ω.

Рис. 3 иллюстрирует изменения с ростом n распределений $G(S_n|H_0)$ статистики Крамера-Мизеса-Смирнова S_ω при проверке сложной гипотезы о нормальности и использовании при оценивании параметров метода максимального правдоподобия. Чтобы подчеркнуть разницу в распределениях статистик при простых и сложных гипотезах, на рисунке приведены $G(S_n|H_0)$ для n= 5, 20, 1000 и $a1(S)$ – предельная функция распределения статистики S_ω при проверке простой гипотезы.

Таким образом, распределения $G(S_n|H_0)$ статистик непараметрических критериев при простых и сложных гипотезах очень быстро сходятся к предельным, и уже при $n \ge 15 \div 20$ можно, не опасаясь больших ошибок, пользоваться этими предельными законами при анализе данных.

Однако последний вывод не означает, что при малых объемах выборок с помощью этих критериев можно успешно различать близкие гипотезы. Для надежного различения близких законов распределения, в частности, с помощью критерия согласия Колмогорова, может потребоваться выборка достаточно большого объема [28].

1.3.5. Влияние объема выборки на мощность непараметрических критериев при простых и сложных гипотезах

Способность различать близкие гипотезы зависит от того, насколько сильно отличаются распределения $G(S_n|H_0)$ и $G(S_n|H_1)$.

Рассмотрим две близкие гипотезы: H_0 – нормальное распределение с плотностью $f_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ и параметрами $\mu = 0,\ \sigma = 1;\ H_1$ – логистическое с такими же параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$ и плотностью $f_1(x) = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x-\mu)}{\sigma\sqrt{3}}\right\} \Big/ \left[1 + \exp\left\{-\frac{\pi(x-\mu)}{\sigma\sqrt{3}}\right\}\right]^2$. О близости этих законов распределения можно судить по рис. 4, на котором представлены их функции распределения. Рис. 5 иллюстрирует зависимость распределений $G(S_n|H_1)$ статистики S_K Колмогорова от n при проверке простой (n= 20, 100, 500, 1000), а рис. 6 – при проверке сложной гипотезы H_0 (в случае ОМП).

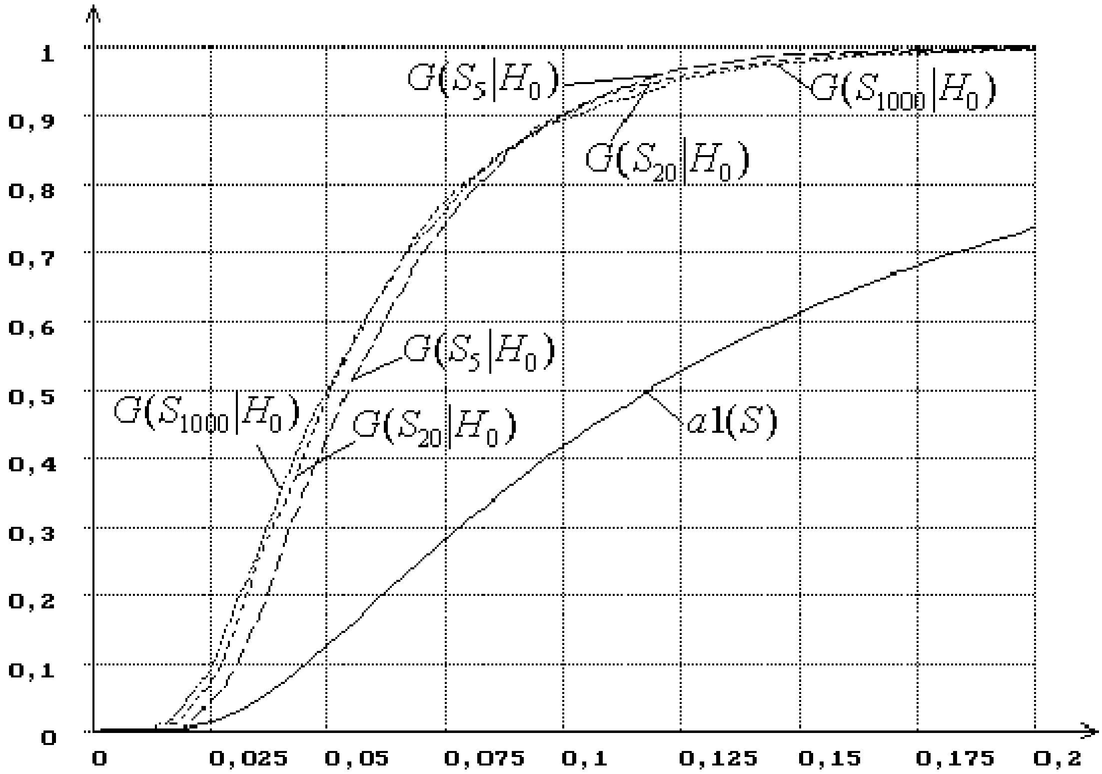

Рис. 3. Зависимость от n распределений $G(S_n(H_0)$ статистики S_ω Крамера-Мизеса-Смирнова при сложной гипотезе (H_0 - нормальное распределение, ОМП): n = 5, 20, 1000

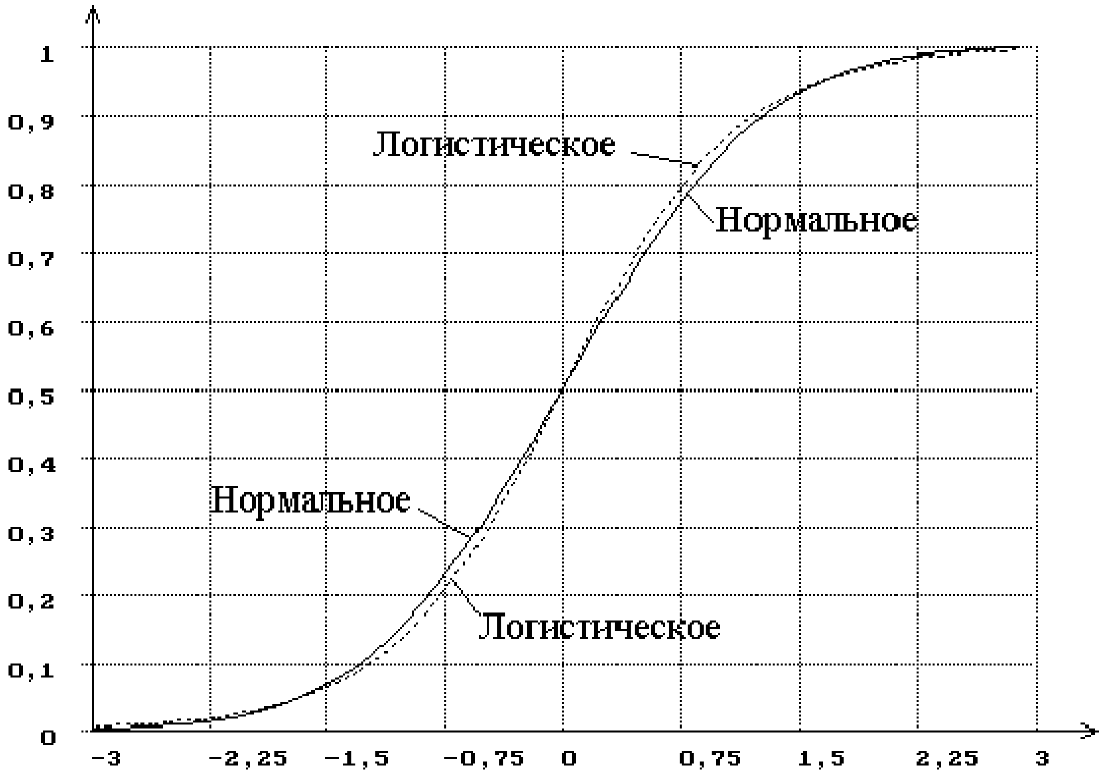

Рис. 4. Функции распределения нормального и логистического законов

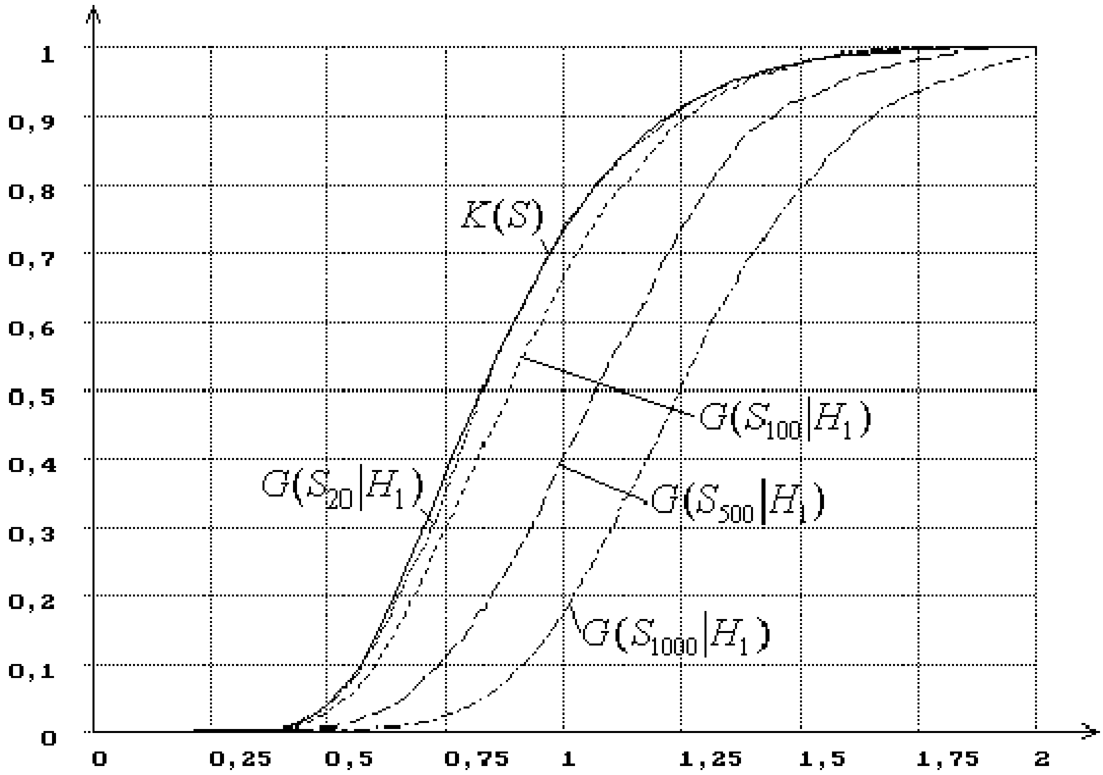

Рис. 5. Зависимость от n распределений $G(S_n(H_1)$ статистики S_K Колмогорова при простой гипотезе (H_0 - нормальное распределение, H_1 - логистическое): n = 20, 100, 500, 1000

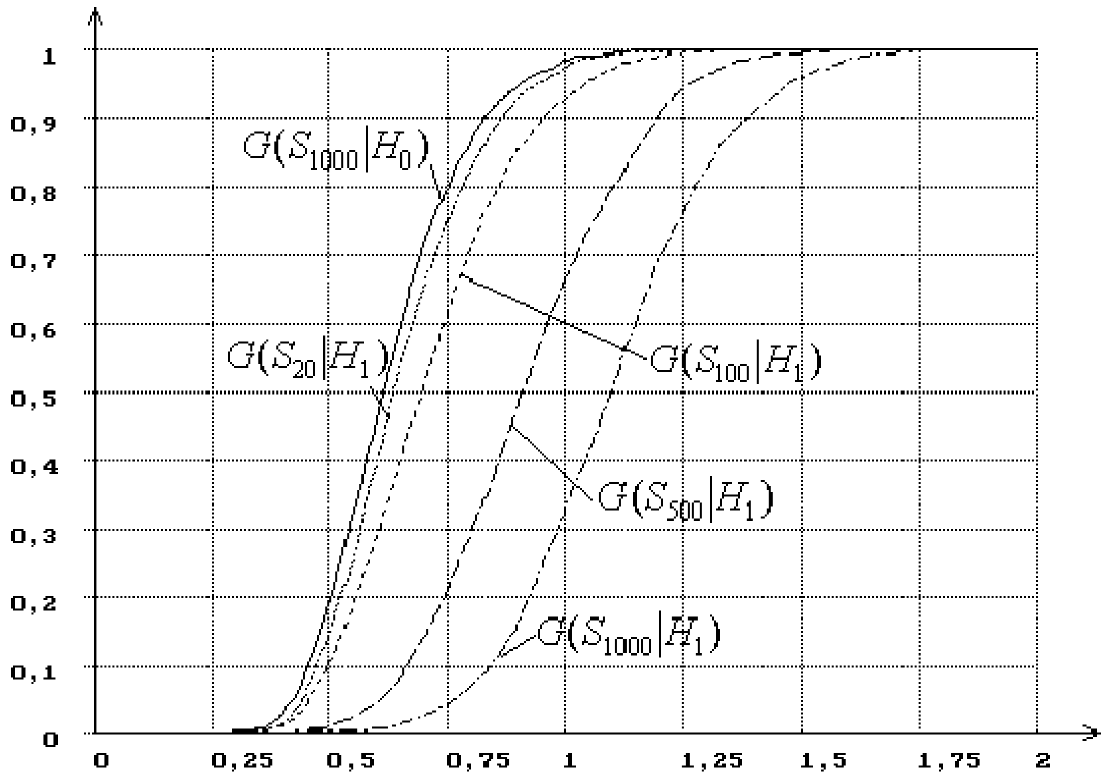

Рис. 6. Зависимость от n распределений $G(S_n(H_1)$ статистики S_K Колмогорова при сложной гипотезе (H_0 - нормальное распределение, H_1 - логистическое, ОМП): n = 20, 100, 500, 1000

На рис. 7–8 для сравнения представлены распределения $G(S_n|H_1)$ статистики S_ω при проверке простой (рисунок 7) и сложной гипотезы (рисунок 8) для тех же самых альтернатив H_0 и H_1. Интересно отметить, что для данной пары альтернатив в случае проверки сложной гипотезы критерий согласия типа ω^2 Крамера-Мизеса-Смирнова обладает несколько большей мощностью при различении близких гипотез, чем критерий типа Колмогорова, а в случае простых – наоборот.

Подчеркнем два момента, важных с точки зрения практического использования критериев, которые подтверждаются результатами исследований и хорошо иллюстрируются рисунками 5–8. Во-первых, очевидно, что при малых выборках пытаться различать с помощью непараметрических критериев согласия близкие гипотезы (особенно простые) абсолютно бесполезно. Во-вторых, мощность непараметрических критериев при проверке сложных гипотез при тех же объемах выборок n всегда существенно выше, чем при проверке простых.

Следует отметить, что при проверке простых гипотез непараметрические критерии типа Колмогорова, Смирнова, ω^2 и Ω^2 Мизеса уступают по мощности критериям типа χ^2, особенно, если в последних используется асимптотически оптимальное группирование [29-32]. Но при проверке сложных гипотез непараметрические критерии оказываются более мощными. Для того чтобы воспользоваться их преимуществами, надо только знать распределение $G(S|H_0)$ при проверяемой сложной гипотезе.

1.3.6. Влияние метода оценивания на распределения статистик непараметрических критериев при сложных гипотезах

Распределения статистик критериев согласия существенно зависят от метода оценивания параметров. Строго говоря, каждому типу оценок при конкретной сложной проверяемой гипотезе соответствует своё предельное распределение $G(S|H_0)$ статистики. В данном случае по вполне очевидным причинам при проверке сложных гипотез сравним результаты использования ОМП и *MD*-оценок. Оценки максимального правдоподобия предпочтительны благодаря своим асимптотическим свойствам [33,34], а в случае *MD*-оценок может минимизироваться значение статистики, используемой в критерии.

ОМП вычисляются в результате максимизации по θ функции правдоподобия

$$L(\theta) = \gamma \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \tag{21}$$

или её логарифма

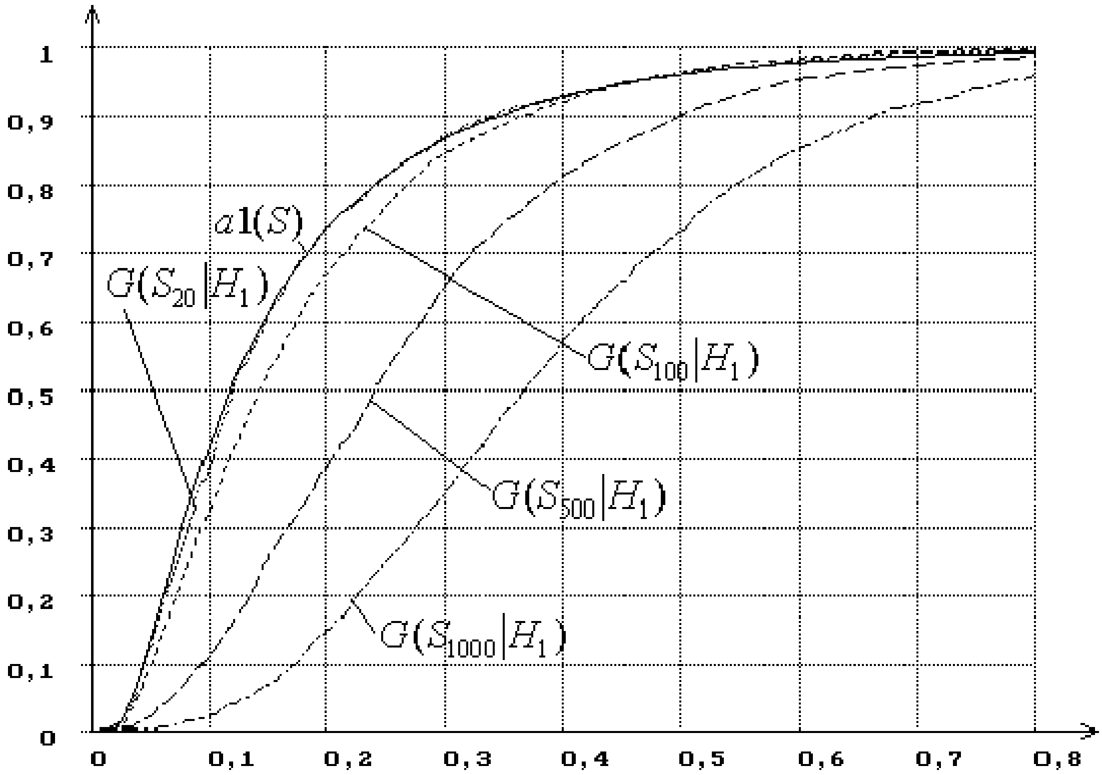

Рис. 7. Зависимость от n распределений $G(S_n(H_1)$ статистики S_ω Крамера-Мизеса-Смирнова при простой гипотезе (H_0 - нормальное распределение, H_1 - логистическое): n = 20, 100, 500, 1000

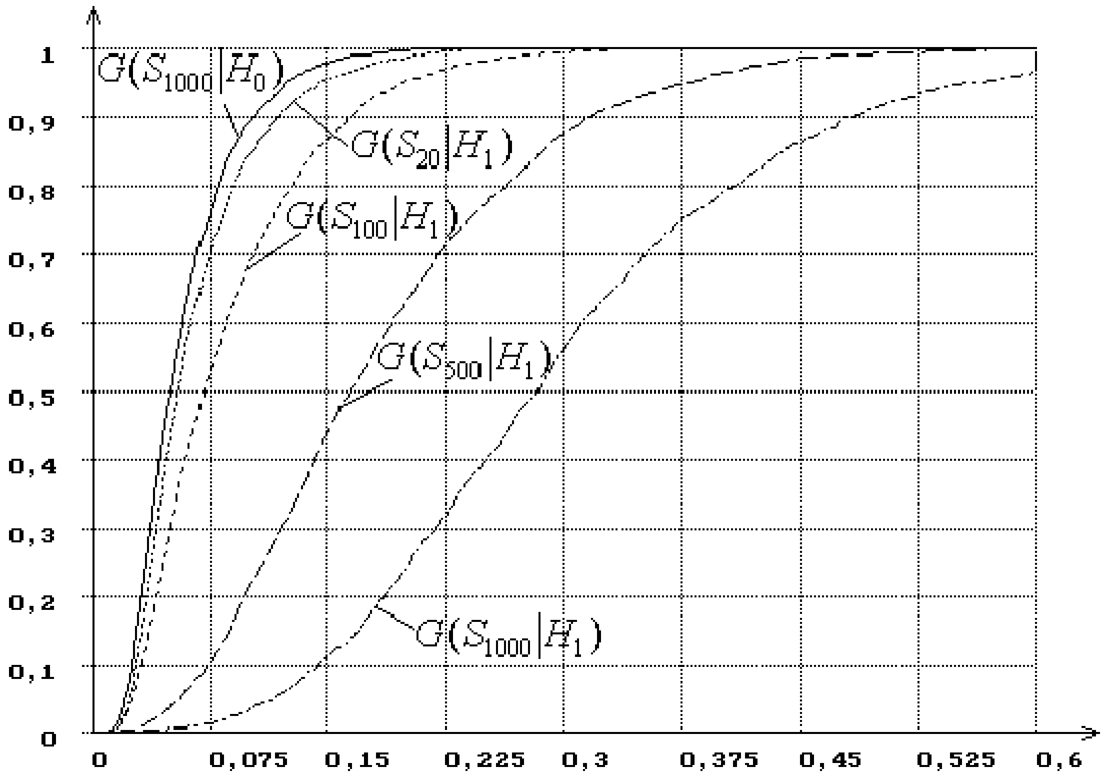

Рис. 8. Зависимость от n распределений $G(S_n(H_1)$ статистики S_ω Крамера-Мизеса-Смирнова при сложной гипотезе (H_0 - нормальное распределение, H_1 - логистическое, ОМП): n = 20, 100, 500, 1000

$$\ln L(\theta) = \ln\gamma + \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \theta). \qquad (22)$$

Чаще всего в случае скалярного параметра ОМП определяются как решение уравнения, а в случае векторного параметра – как решение системы уравнений правдоподобия вида

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta_l} = 0, \quad l = \overline{1, m}, \qquad (23)$$

где m – размерность вектора параметров θ. В общем случае эта система оказывается нелинейной и, за редким исключением, решается только численно.

При практическом использовании критериев необходимо иметь ввиду следующее. В данном случае, как и в [20-22], при построении распределений статистик и исследовании их зависимости от метода оценивания ОМП вычислялись как решение системы (23). Если использовать грубые приближения ОМП, то это соответственно отражается на распределениях статистик и свойствах критериев.

При вычислении *MD*-оценок минимизируется соответствующее расстояние между эмпирическим и теоретическим распределениями. При использовании статистики Колмогорова S_K в качестве оценки вектора параметров θ выбираются значения, минимизирующие эту статистику:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} S_K \qquad (24)$$

(*MD*-оценки S_K). Аналогично, при использовании статистики S_ω минимизируется по θ статистика S_ω:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} S_\omega \qquad (25)$$

(*MD*-оценки S_ω). При использовании статистики S_Ω –

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} S_\Omega \qquad (26)$$

(*MD*-оценки S_Ω).

Влияние метода оценивания на распределение статистики иллюстрирует рис. 9, на котором показаны полученные в результате моделирования плотности распределения $g(S_n | H_0)$ статистики критерия типа Колмогорова S_K при вычислении оценок параметра сдвига нормального распределения тремя различными методами: минимума статистики S_K (график отмечен цифрой “*1*”), минимума статистики S_ω (“*2*”) и максимального правдоподобия (“*3*”). Функция плотности распределения Колмогорова обозначена на рисунке как $k(S)$.

На рис. 10 приведены распределения $G(S_n | H_0)$ статистики Колмогорова S_K, когда при проверке сложной гипотезы два параметра закона, соответствующего гипотезе H_0, оценивались с использованием метода максимального правдоподобия.

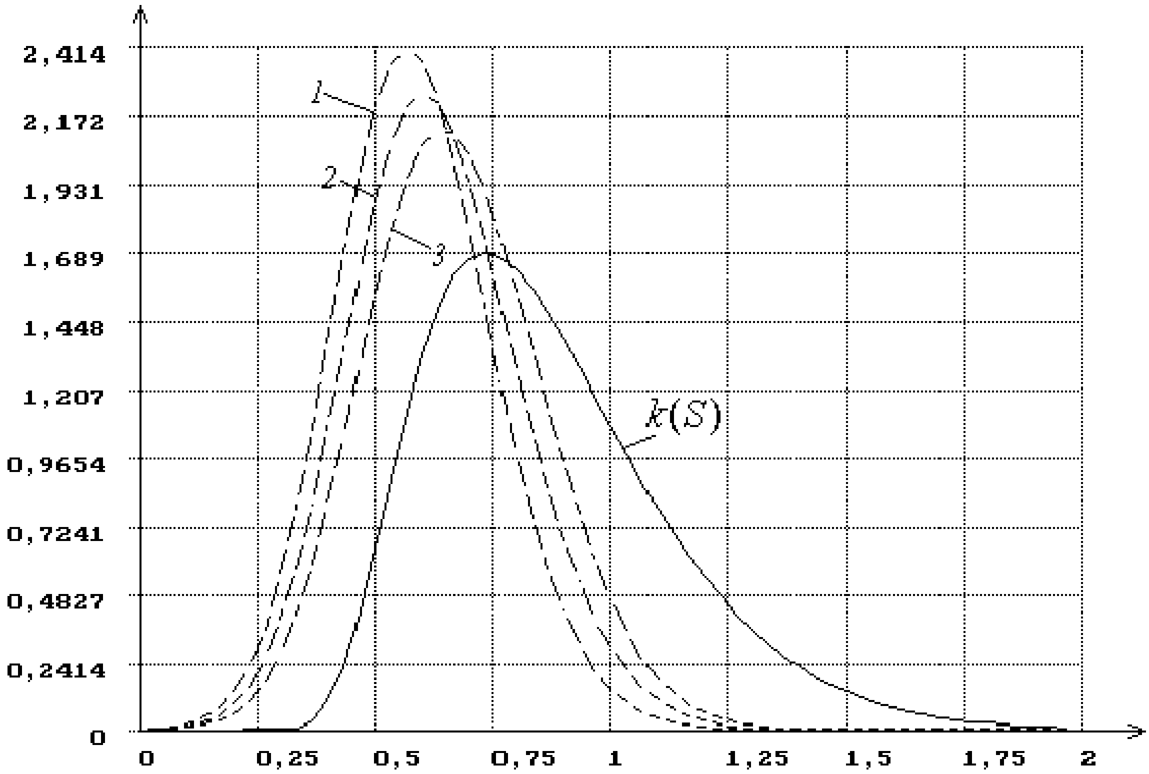

Рис. 9. Плотности распределения $g(S_n|H_0)$ статистики S_K при проверке сложной гипотезы (H_0 - нормальный закон, оценивается сдвиг: *1* - с использованием *MD*-оценок S_K, *2* - с использованием *MD*-оценок S_ω, *3* - с использованием ОМП).

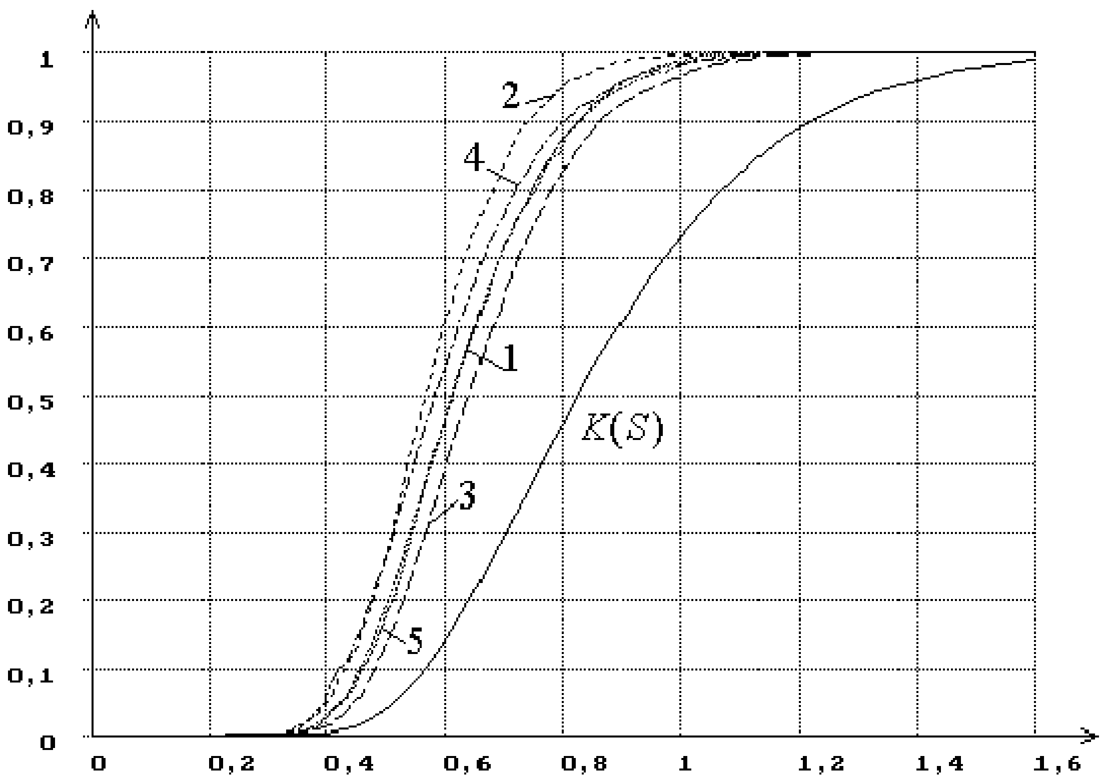

Рис. 10. Распределения $G(S_n|H_0)$ статистики Колмогорова S_K при оценивании двух параметров закона, соответствующего гипотезе H_0 (1 – нормального, 2 – логистического, 3 – Лапласа, 4 – наименьшего значения, 5 – Коши). При использовании ОМП.

При этом на рисунке *“1”* отмечено распределение $G(S_n|H_0)$, когда гипотеза H_0 соответствует нормальному закону, *“2”* – логистическому, *“3”* – Лапласа с плотностью $f(x)=\frac{1}{2\theta_0}e^{-|x-\theta_1|/\theta_0}$, *“4”* – распределению наименьшего значения $f(x)=\frac{1}{\theta_0}\exp\left\{\frac{x-\theta_1}{\theta_0}-\exp\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_0}\right)\right\}$, *“5”* – распределению Коши с плотностью $f(x)=\frac{\theta_0}{\pi[\theta_0^2+(x-\theta_1)^2]}$. На рис. 11 показаны распределения $G(S_n|H_0)$ той же статистики S_K при проверке тех же гипотез, но с использованием *MD*-оценок параметров, полученных минимизацией по параметрам статистики S_K.

На рис. 12 приведены распределения статистики S_ω для аналогичных гипотез H_0 при использовании ОМП, а на рис. 13 – при использовании *MD*-оценок, минимизирующих по параметрам статистику S_ω.

При использовании *MD*-оценок, минимизирующих по параметрам статистику S_ω, эмпирические распределения смоделированных распределений $G(S_n|H_0)$ практически совпадают для законов нормального, логистического, Лапласа, наименьшего значения, максимального значения с плотностью $f(x)=\frac{1}{\theta_0}\exp\left\{-\frac{x-\theta_1}{\theta_0}-\exp\left(-\frac{x-\theta_1}{\theta_0}\right)\right\}$, распределения Вейбулла с плотностью $f(x)=\frac{\theta_0 x^{\theta_0-1}}{\theta_1^{\theta_0}}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right\}$ и хорошо аппроксимируются логарифмически нормальным законом с плотностью $f(s)=\frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln s-\mu)^2/2\sigma^2}$ и параметрами $\mu=-3{,}2702$; $\sigma=0{,}4719$.

На рис. 14 показаны распределения $G(S_n|H_0)$ статистики S_ω Крамера-Мизеса-Смирнова при использовании *MD*-оценок S_ω и оценивании масштабного параметра закона, соответствующего гипотезе H_0 (1 – нормального, 2 – логистического, 3 – Лапласа, 4 – наименьшего значения, 5 – Коши, 6 – максимального значения, 7 – Вейбулла при оценивании параметра формы). На рис. 15 представлены аналогичные распределения статистик, но при оценивании для тех же распределений параметра сдвига. Распределения статистик в случае оценивания параметра сдвига распределения максимального значения и масштабного параметра распределения Вейбулла совпадают с распределением статистики для распределения минимального значения.

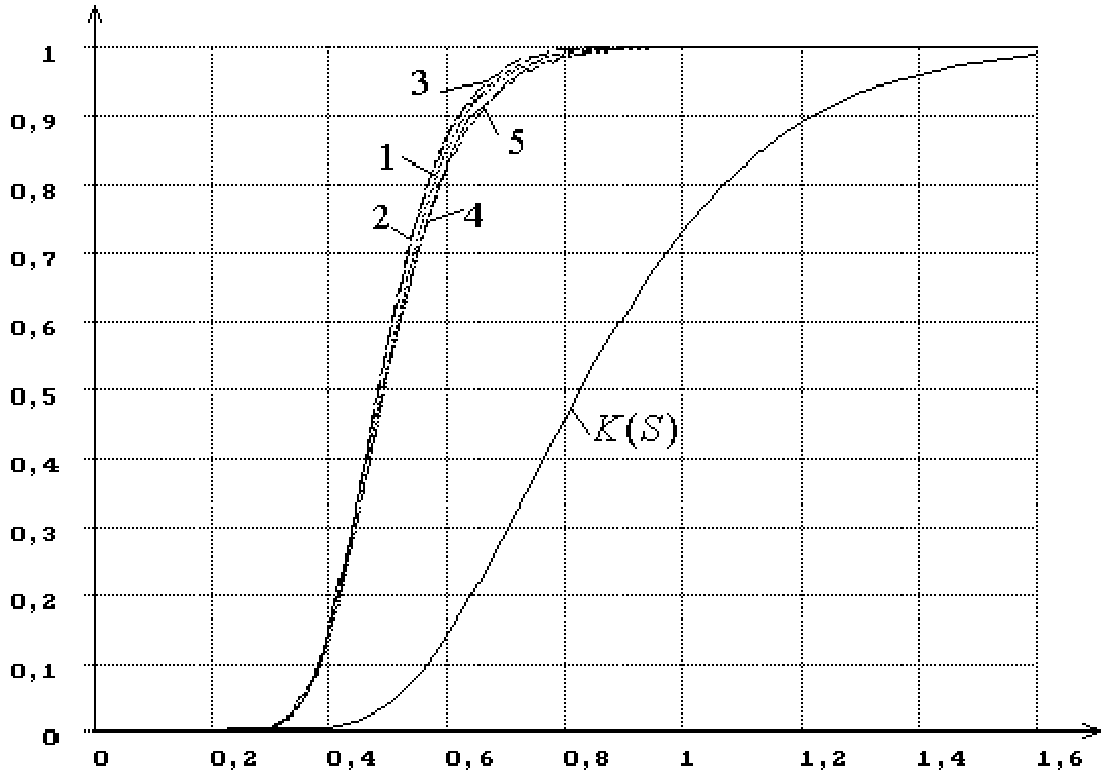

Рис. 11. Распределения $G(S_n(H_0)$ статистики Колмогорова S_K при оценивании двух параметров закона, соответствующего гипотезе H_0 (1 – нормального, 2 – логистического, 3 – Лапласа, 4 – наименьшего значения, 5 – Коши). При использовании *MD*-оценок S_K .

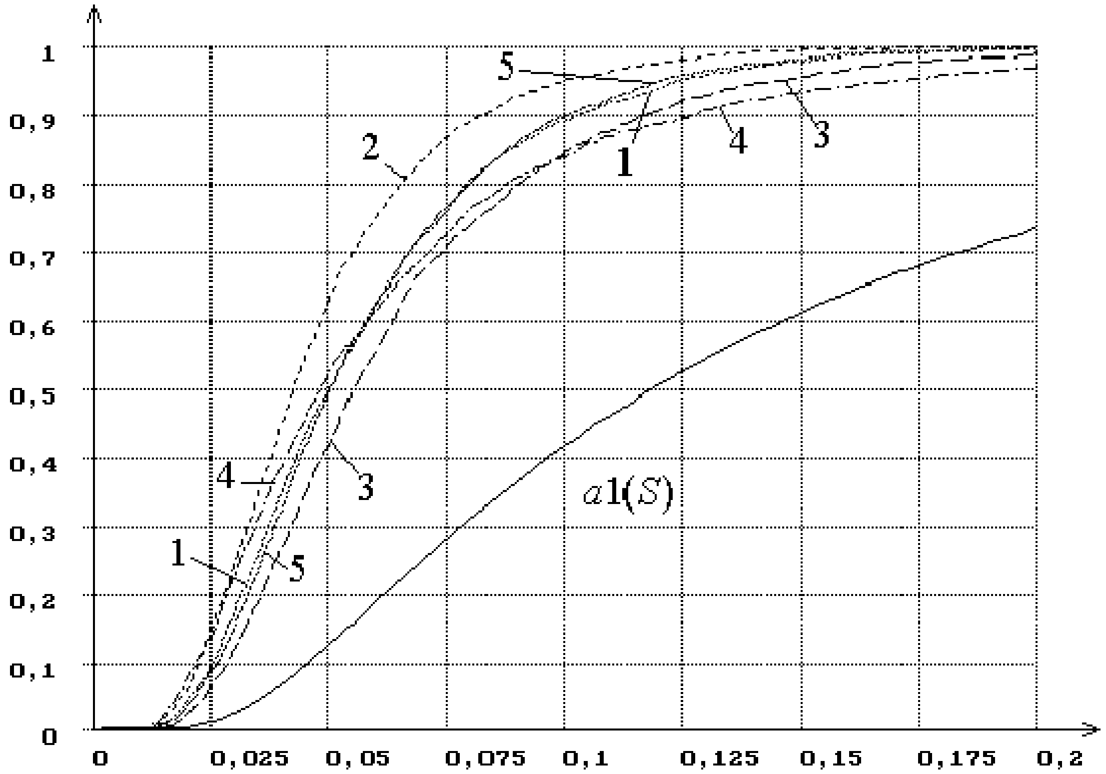

Рис. 12. Распределения $G(S_n(H_0)$ статистики S_ω Крамера-Мизеса-Смирнова при оценивании двух параметров закона, соответствующего гипотезе H_0 (1 – нормального, 2 – логистического, 3 – Лапласа, 4 – наименьшего значения, 5 – Коши). При использовании ОМП.

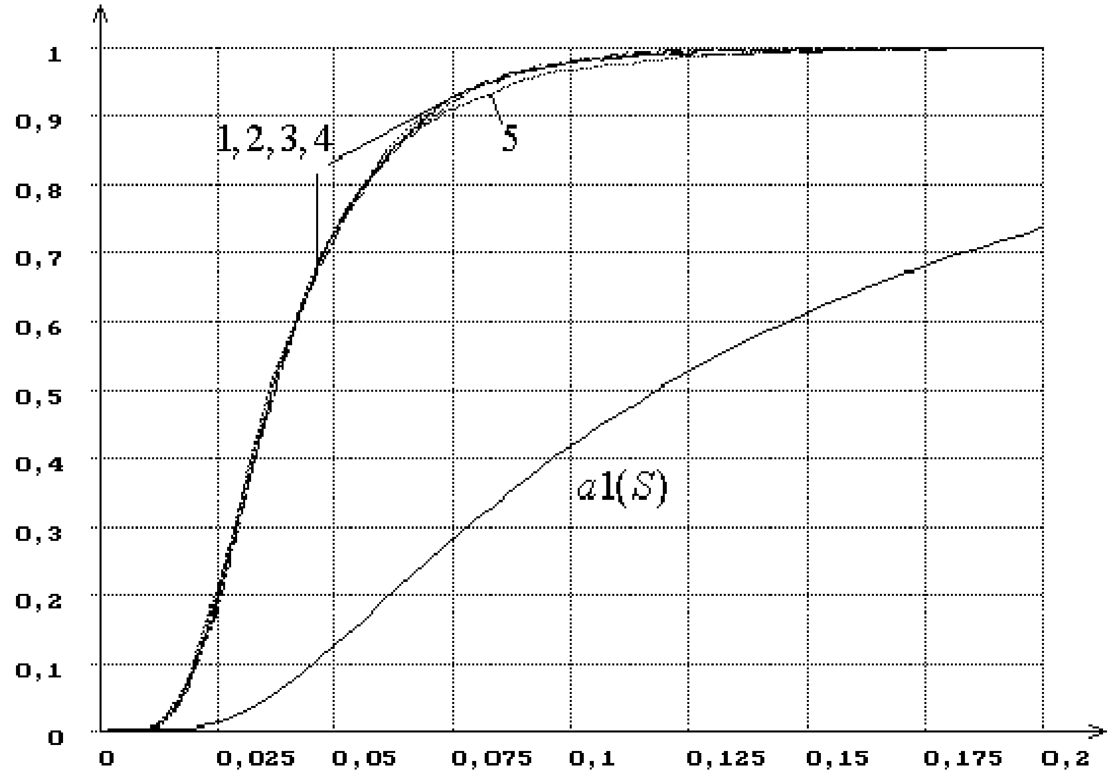

Рис. 13. Распределения $G(S_n(H_0)$ статистики S_ω Крамера-Мизеса-Смирнова при оценивании двух параметров закона, соответствующего гипотезе H_0 (1 – нормального, 2 – логистического, 3 – Лапласа, 4 – наименьшего значения, 5 – Коши). При *MD*-оценках S_ω.

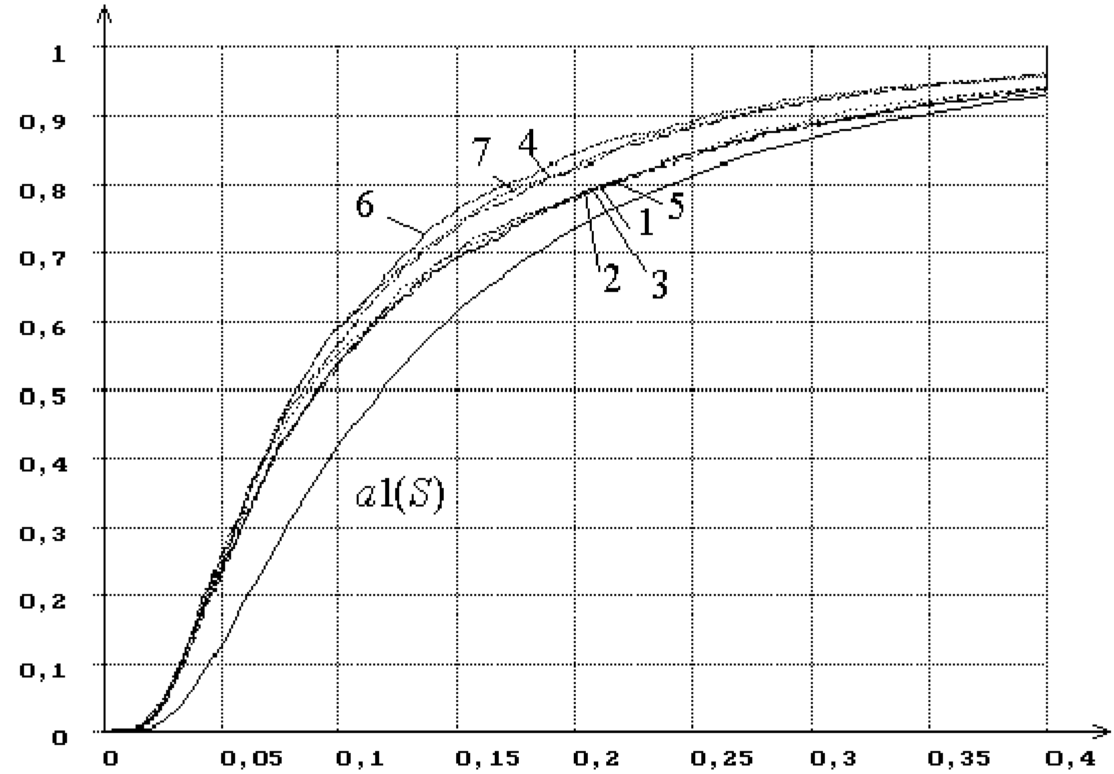

Рис. 14. Распределения $G(S_n(H_0)$ статистики S_ω Крамера-Мизеса-Смирнова при оценивании масштабного параметра закона, соответствующего гипотезе H_0 (1 – нормального, 2 – логистического, 3 – Лапласа, 4 – наименьшего значения, 5 – Коши, 6 –максимального значения, 7 – Вейбулла, параметр формы). При использовании *MD*-оценок S_ω.

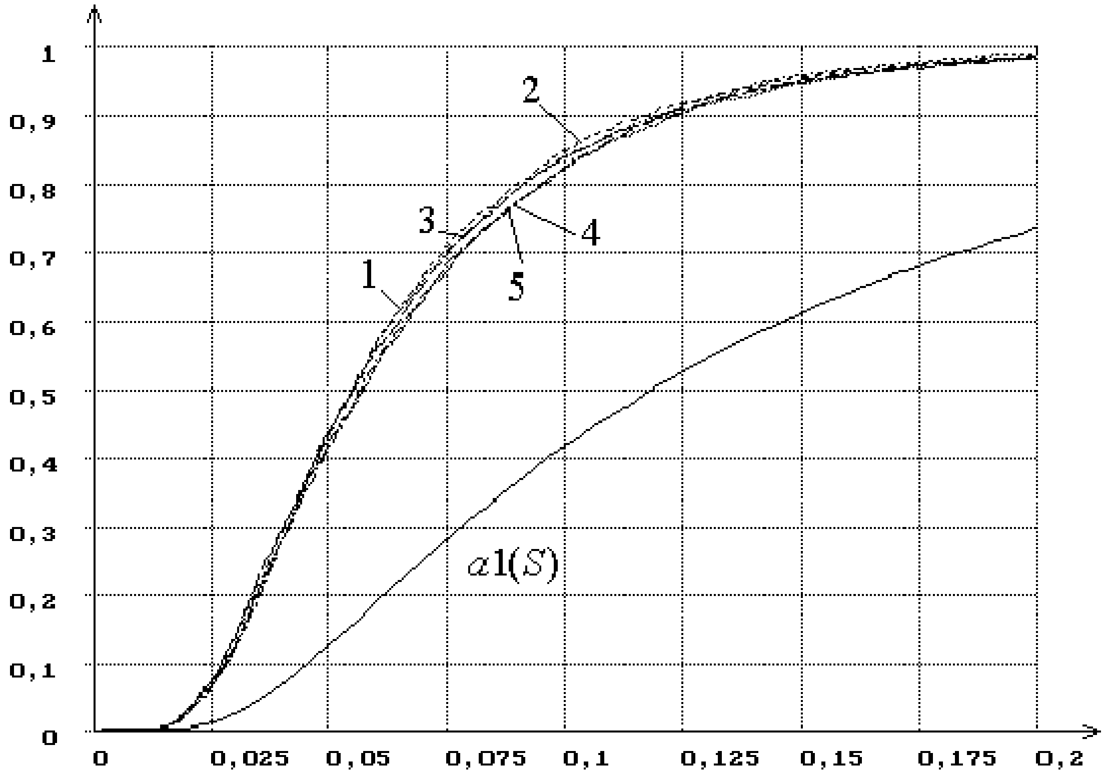

Рис. 15. Распределения $G(S_n(H_0)$ статистики S_ω Крамера-Мизеса-Смирнова при оценивании параметра сдвига, соответствующего гипотезе H_0 (1 – нормального, 2 – логистического, 3 – Лапласа, 4 – наименьшего значения, 5 – Коши). При *MD*-оценках S_ω.

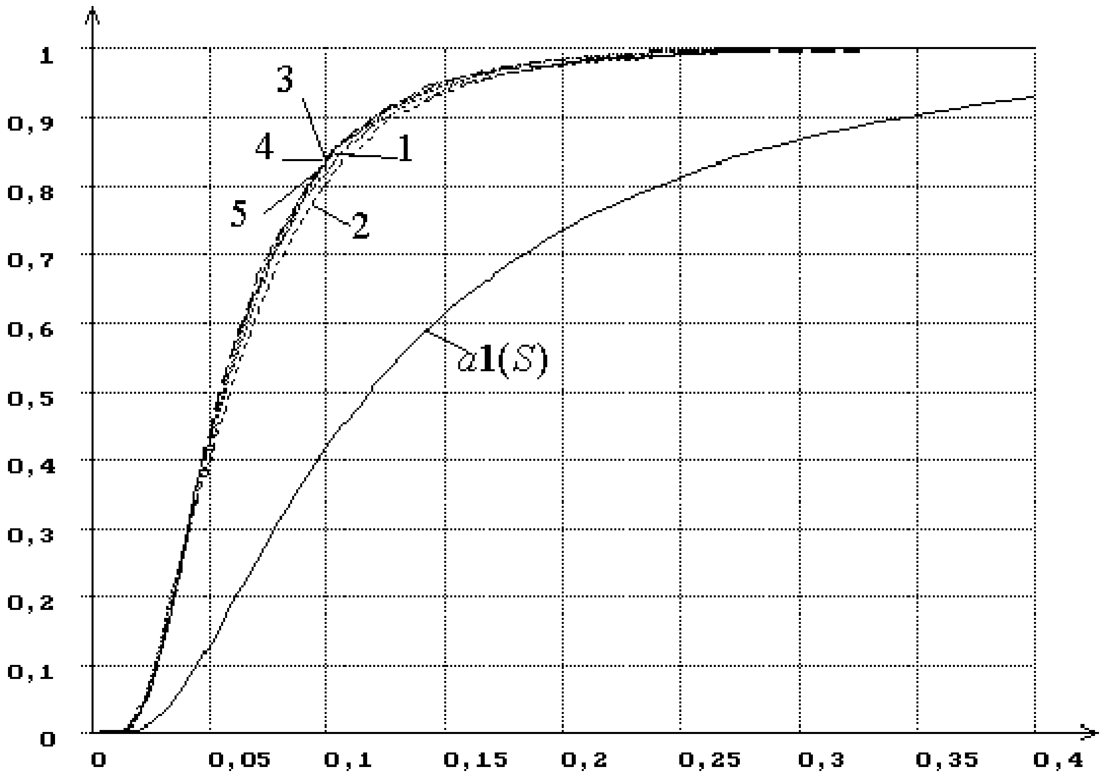

Рис. 16. Распределения $G(S_n(H_0)$ статистики S_ω Крамера-Мизеса-Смирнова при оценивании масштабного параметра закона, соответствующего гипотезе H_0 (1 – экспоненциального, 2 – полунормального, 3 – Рэлея, 4 – Максвелла, 5 – модуля 5-мерного нормального вектора). При использовании *MD*-оценок S_ω.

Если обратить внимание на рис. 16, на котором отображены распределения $G(S_n|H_0)$ статистики S_ω при проверке согласия с распределениями экспоненциальным $f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}$, полунормальным $f(x)=\frac{2}{\theta\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\theta^2}$, Рэлея $f(x)=\frac{x}{\theta^2}e^{-x^2/2\theta^2}$, Максвелла $f(x)=\frac{2x^2}{\theta^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}$, модуля m-мерного ($m=5$) нормального вектора $f(x)=\frac{2x^{m-1}}{(2\theta^2)^{m/2}\Gamma(m/2)}e^{-x^2/2\theta^2}$ при оценивании масштабного параметра соответствующего закона с использованием *MD*-оценок S_ω, то заметим, что распределения статистик близки к приведенным на рис. 15. Распределения статистик, показанные на рис. 16, например, достаточно хорошо аппроксимируются логарифмически нормальным законом с параметрами $\mu=-2{,}8484$; $\sigma=0{,}5669$.

Таким образом, применяя непараметрические критерии согласия, следует непременно учитывать используемый метод оценивания. При этом в случае метода максимального правдоподобия распределения статистик $G(S|H_0)$ очень сильно зависят от закона, соответствующего гипотезе H_0. Разброс распределений $G(S|H_0)$ при использовании *MD*-оценок, минимизирующих статистику критерия, зависит от закона $F(x,\theta)$, соответствующего гипотезе H_0, в существенно меньшей степени.

1.3.7. Метод оценивания и мощность непараметрических критериев согласия

При использовании *MD*-оценок, минимизирующих статистику критерия, эмпирические распределения $G(S_n|H_0)$, соответствующие различным гипотезам H_0, имеют минимальный разброс, что позволяет говорить об определенной “свободе от распределения” для рассматриваемых критериев. Если опираться только на этот факт, то, казалось бы, что только такие методы оценивания и следует применять при проверке сложных гипотез. Но если исследовать мощность рассматриваемых критериев при различных методах оценивания, то оказывается, что максимальную мощность непараметрические критерии при близких альтернативах имеют в случае оценивания параметров методом максимального правдоподобия.

Рис. 17 иллюстрирует зависимость от n распределений $G(S_n|H_1)$ статистики S_K Колмогорова при проверке сложной гипотезы при паре альтернатив H_0 - нормальное распределение, H_1 - логистическое и использовании *MD*-оценок S_K при объеме выборок n = 20, 100, 500, 1000.

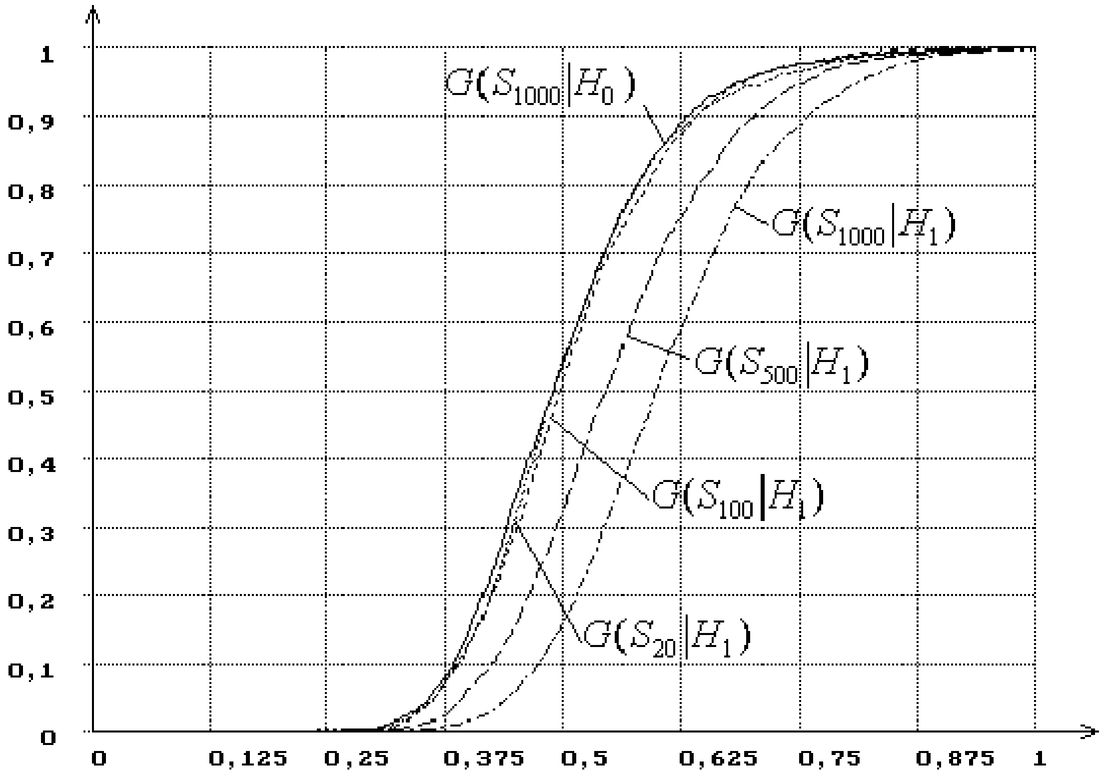

Рис. 17. Зависимость от n распределений $G(S_n(H_1)$ статистики S_K Колмогорова при сложной гипотезе (H_0 - нормальное распределение, H_1 - логистическое, *MD*-оценки S_K): n = 20, 100, 500, 1000.

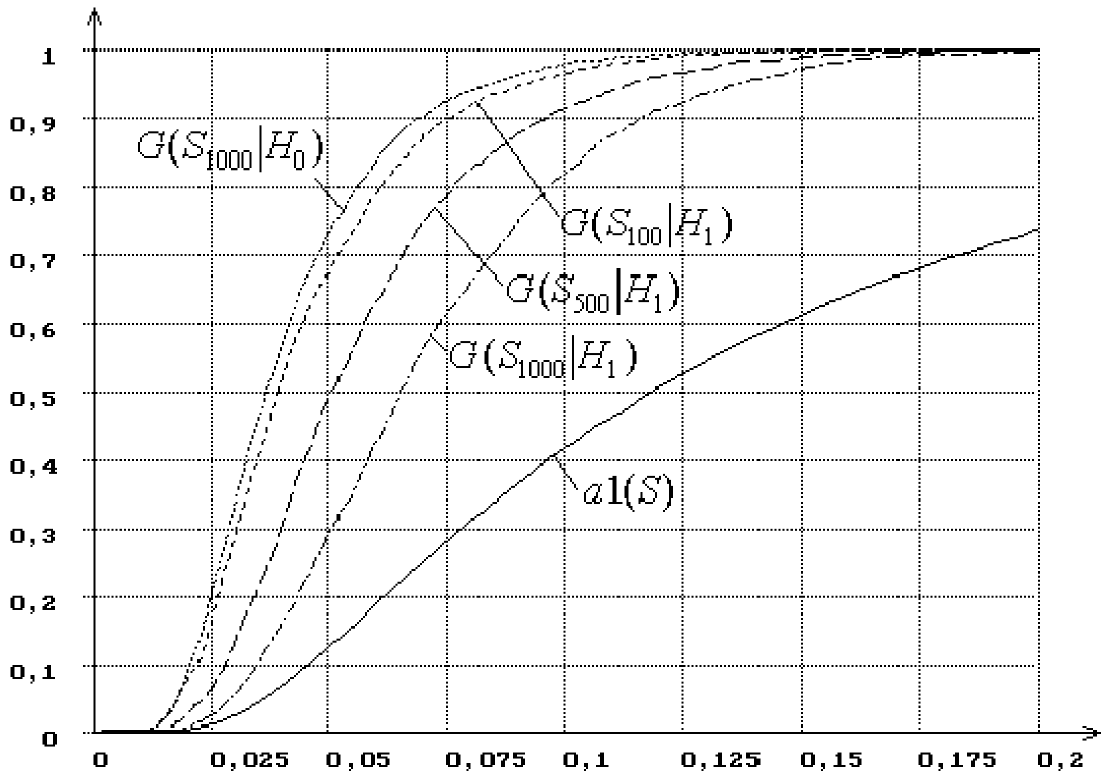

Рис. 18. Зависимость от n распределений $G(S_n(H_1)$ статистики S_ω Крамера-Мизеса-Смирнова при сложной гипотезе (H_0 - нормальное распределение, H_1 - логистическое, *MD*-оценки S_ω): n = 100, 500, 1000.

Рис. 18 таким же образом характеризует зависимость от n распределений $G(S_n|H_1)$ статистики S_ω Крамера-Мизеса-Смирнова при проверке сложной гипотезы и тех же альтернативах H_0 и H_1 при использовании *MD*-оценок S_ω и n = 100, 500, 1000.

Сравнивая рис. 17 с рис. 6, а рис. 18 с рис. 8, можем убедиться, что в случае использования метода максимального правдоподобия мощность критериев типа Колмогорова и типа ω^2 Мизеса много выше, чем при использовании соответствующих *MD*-оценок. Аналогичная картина справедлива и для критерия типа Ω^2 Мизеса со статистикой S_Ω Андерсона-Дарлинга.

Для того, чтобы сравнить по мощности непараметрические критерии согласия для рассматриваемой пары близких гипотез H_0 и H_1 при использовании ОМП, на рис. 19 приведены распределения $G(S_{1000}|H_0)$ и $G(S_n|H_1)$ при n = 20, 100, 500, 1000 для статистики S_Ω Андерсона-Дарлинга, а на рис. 20 для статистики S_m Смирнова.

Анализируя распределения на рис. 6, 8, 19 и 20, можно заметить, что наиболее мощным для данной пары гипотез является критерий Ω^2 со статистикой S_Ω Андерсона-Дарлинга, затем критерий ω^2 со статистикой S_ω Крамера-Мизеса-Смирнова, далее критерий Колмогорова со статистикой S_K и на последнем месте критерий Смирнова со статистикой S_m. Данное наблюдение о порядке предпочтения критериев хорошо согласуется с опытом их применения.

Почему мощность рассматриваемых критериев при проверке близких гипотез в случае ОМП выше, чем при *MD*-оценках, достаточно логично объясняет следующая версия. Использование *MD*-оценок, минимизирующих статистику критерия, приводит к распределению $G(S|H_0)$ с меньшим параметром масштаба (к более крутой функции распределения), чем в случае ОМП. Но с другой стороны, *MD*-оценки в отличие от ОМП являются робастными, они менее чувствительны к малым отклонениям выборки от предполагаемого закона распределения. Поэтому функция распределения $G(S_n|H_1)$ оказывается еще более крутой по отношению к аналогичному распределению при использовании ОМП.

1.3.8. Зависимость распределений статистик непараметрических критериев от конкретных значений параметра

В некоторых случаях предельные распределения $G(S|H_0)$ рассматриваемых статистик при проверке сложных гипотез зависят от конкретных значений параметров распределения, с которым проверяется согласие. В частности, распределения $G(S|H_0)$ непараметрических критериев согласия в случае проверки согласия с гамма-распределением с плотностью

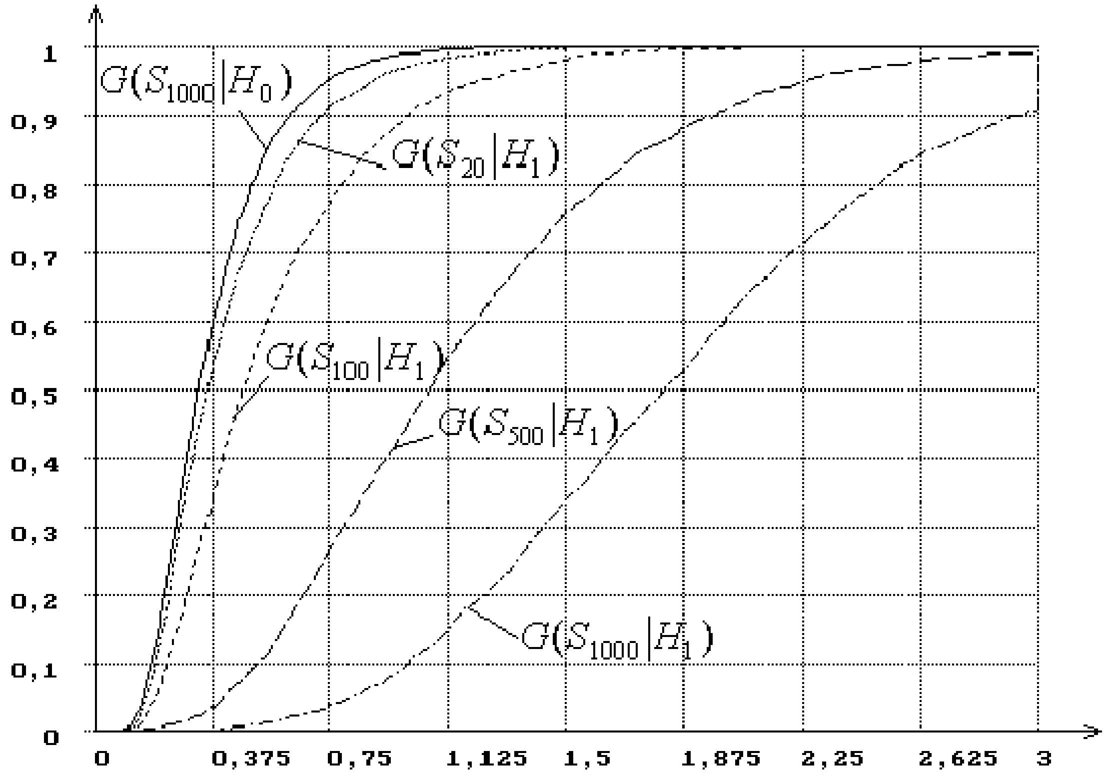

Рис. 19. Зависимость от n распределений $G(S_n(H_1)$ статистики S_Ω Андерсона-Дарлинга при сложной гипотезе (H_0 - нормальное распределение, H_1 - логистическое, ОМП): n = 20, 100, 500, 1000.

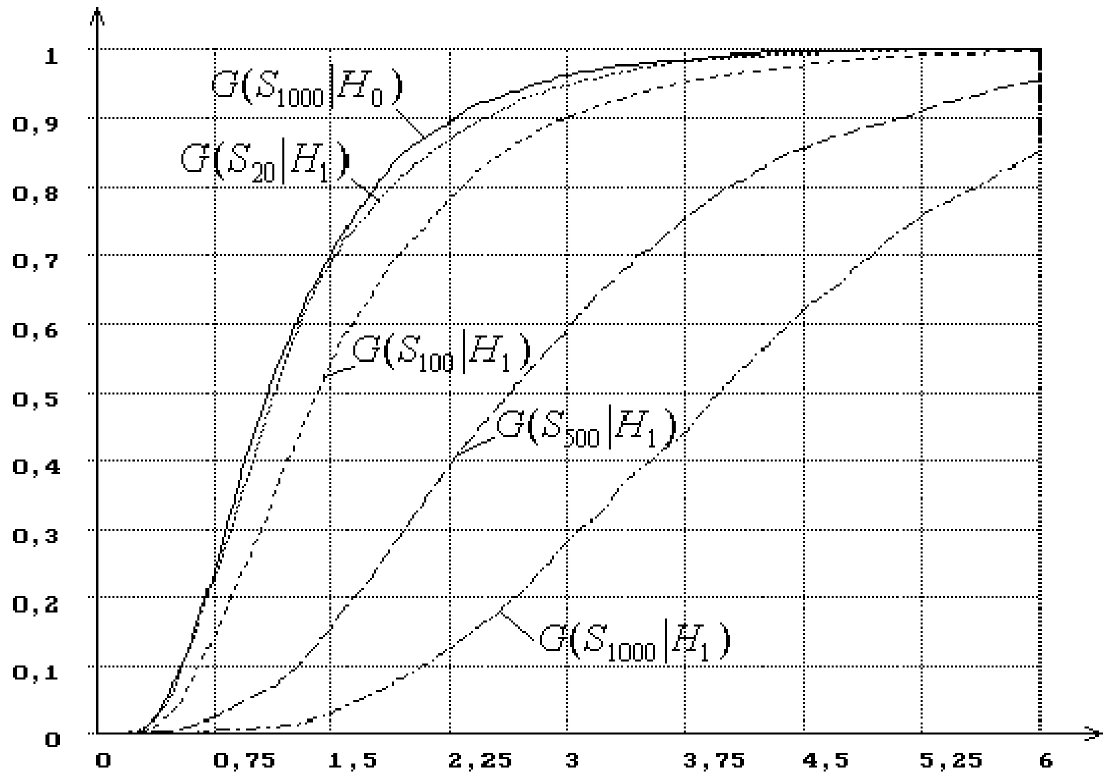

Рис. 20. Зависимость от n распределений $G(S_n(H_1)$ статистики S_m Смирнова при сложной гипотезе (H_0 - нормальное распределение, H_1 - логистическое, ОМП): n = 20, 100, 500, 1000.

$$f(x)=\frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)}x^{\theta_0-1}e^{-x/\theta_1}$$

зависят от его параметра формы θ_0. Для иллюстрации приведем лишь распределения $G(S|H_0)$ статистики Колмогорова $S_К$. На рис. 21 показаны эмпирические распределения статистики при оценивании по выборке параметра формы, на рис. 22 - масштабного параметра, на рис. 23 - двух параметров распределения. На этих рисунках *“1”* помечена эмпирическая функция распределения статистики при θ_0=0,5; *“2”* – при θ_0=1,0; *“3”* – при θ_0=2,0; *“4”* – при θ_0=3,0; *“5”* – при θ_0=4,0; *“6”* – при θ_0=5,0. $K(S)$ отмечена функция распределения Колмогорова. Отметим, что с ростом θ_0 предельные распределения статистик стремятся к предельным распределениям статистик для выборок из нормального закона. При значениях θ_0>5 эмпирические распределения статистик при оценивании двух параметров практически совпадают и хорошо согласуются с распределением соответствующей статистики для нормального закона.

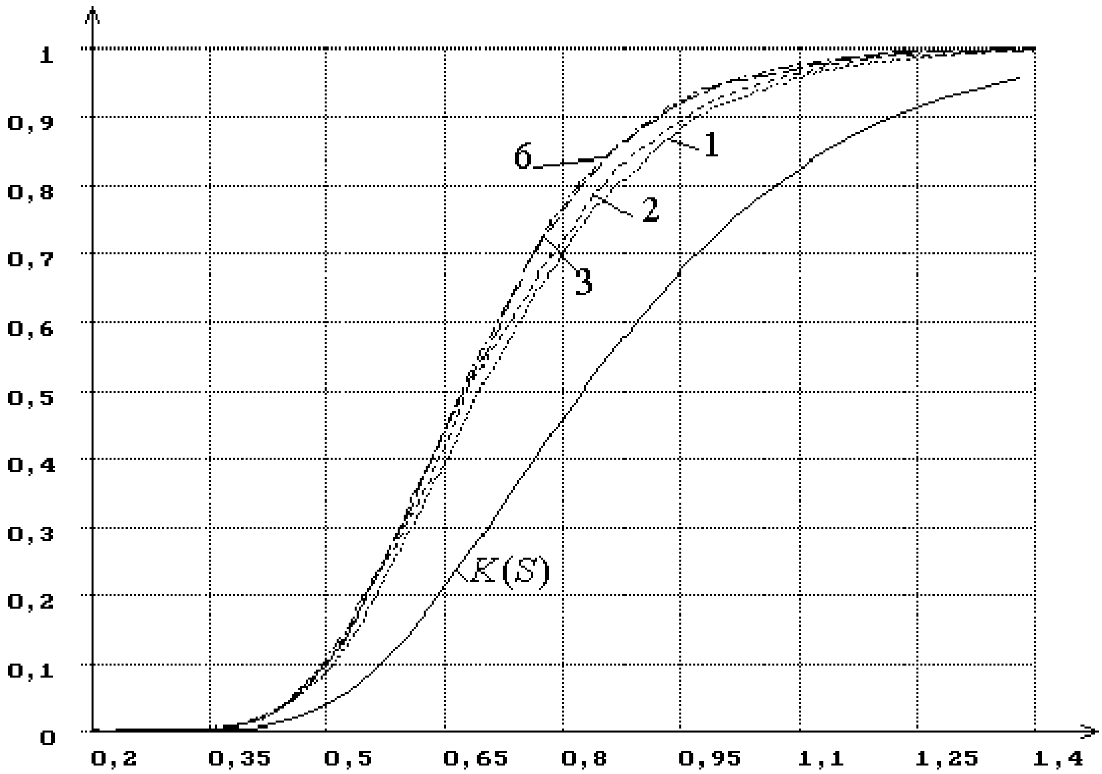

Рис. 21. Эмпирические функции распределения статистики $S_К$ Колмогорова при вычислении ОМП параметра формы гамма-рапределения: $K(S)$ - функция распределения Колмогорова; *1* - θ_0=0,5; *2* - θ_0=1,0; *3* - θ_0=2,0; *6* - θ_0=5,0.

Общая картина принципиально сохраняется и для распределений других непараметрических статистик.

1.3.9. Выводы

Таким образом, на основании изложенного выше можно сделать следующие выводы и рекомендации.

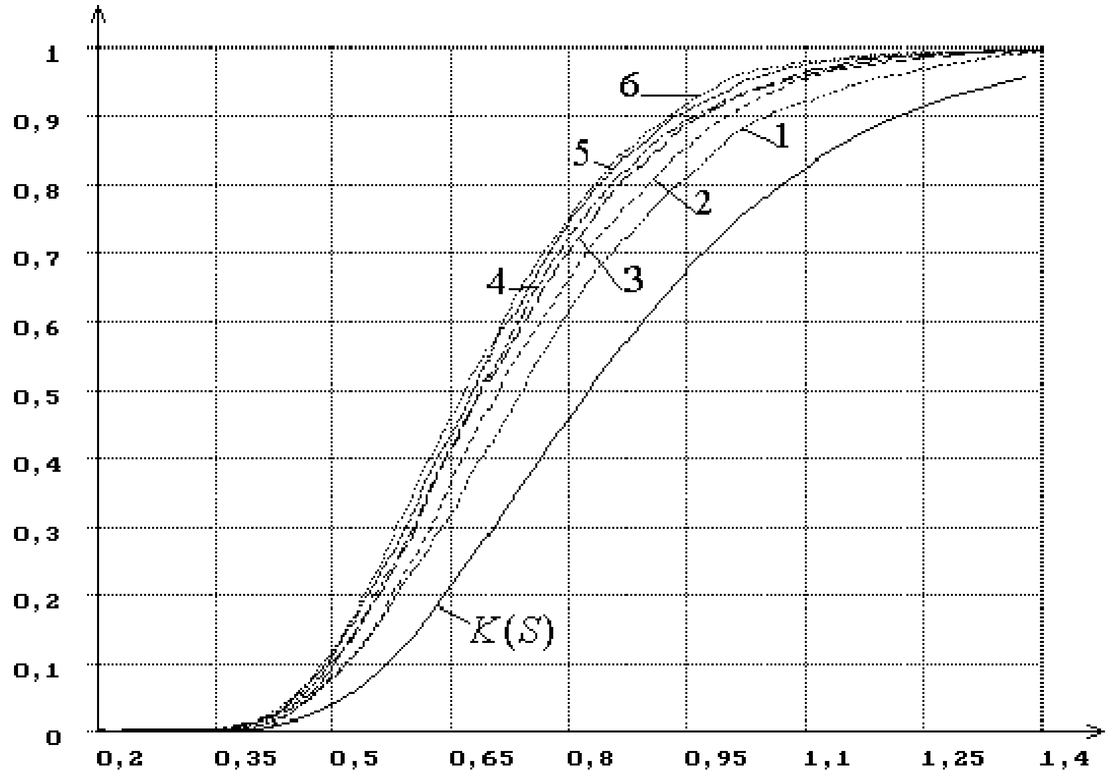

Рис. 22. Эмпирические функции распределения статистики $S_К$ Колмогорова при вычислении ОМП масштабного параметра гамма-рапределения: $K(S)$ - функция распределения Колмогорова; *1* - θ_0=0,5; *2* - θ_0=1,0; *3* - θ_0=2,0; *4* - θ_0=3,0; *5* - θ_0=4,0; *6* - θ_0=5,0.

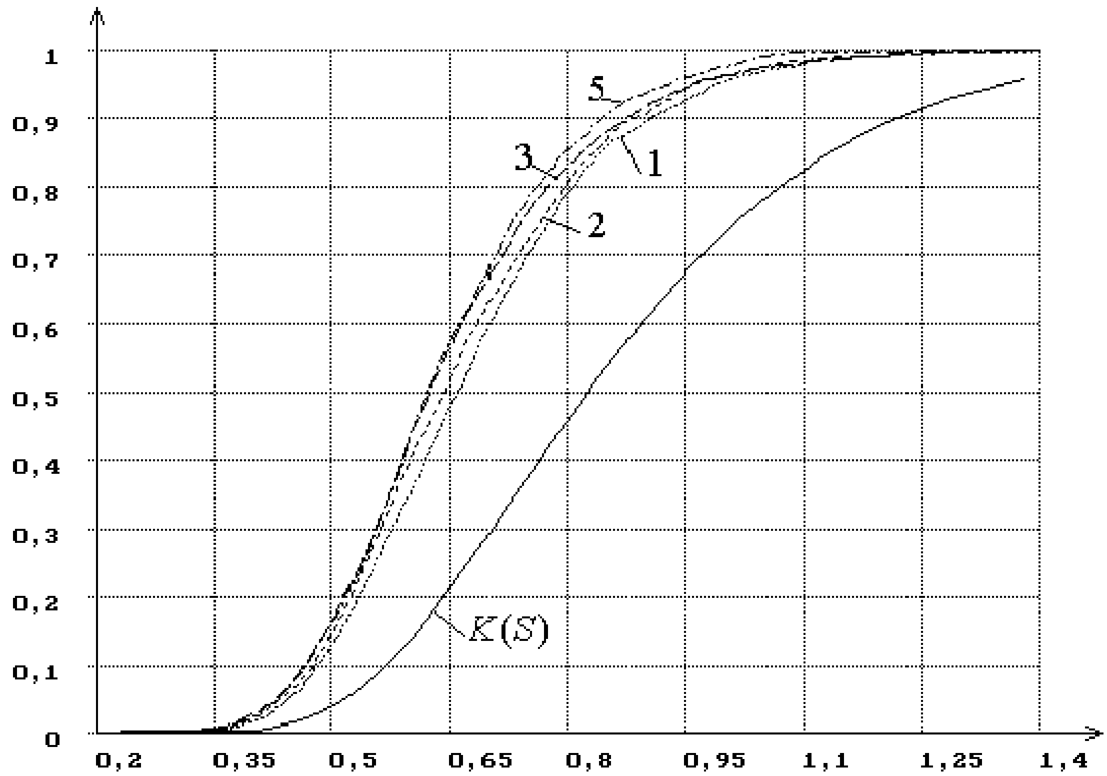

Рис. 23. Эмпирические функции распределения статистики $S_К$ Колмогорова при оценивании методом максимального правдоподобия одновременно двух параметров гамма-рапределения: $K(S)$ - функция распределения Колмогорова; *1* - θ_0=0,5; *2* - θ_0=1,0; *3* - θ_0=2,0; *5* - θ_0=4,0.

Распределения статистик непараметрических критериев согласия при простых и сложных гипотезах очень быстро сходятся к предельным законам. Уже при $n \geq 20$, не опасаясь больших ошибок, можно пользоваться этими предельными законами для вычисления достигаемого уровня значимости $P\{S > S^*\}$.

В то же время надо иметь в виду, что различать близкие гипотезы (особенно простые) при малых выборках с помощью непараметрических критериев согласия невозможно.

Мощность непараметрических критериев при проверке сложных гипотез при тех же объемах выборок n всегда существенно выше, чем при проверке простых.

Следует помнить, что при проверке сложных гипотез распределения статистик $G(S|H_0)$ непараметрических критериев зависят не только от закона распределения $F(x,\theta)$, соответствующего гипотезе H_0, числа и вида оцениваемых параметров (иногда конкретного значения параметра), но и от используемого метода оценивания параметров. Ни в коем случае нельзя использовать (предельный) закон распределения статистики, построенный для одного метода оценивания, применяя другой.

В случае применения *MD*-оценок, минимизирующих статистику используемого критерия согласия, распределения статистик непараметрических критериев в меньшей степени подвержены зависимости от вида $F(x,\theta)$, соответствующего гипотезе H_0. Однако наиболее мощными эти критерии оказываются при использовании ОМП.

В случае простых гипотез и при близких альтернативах непараметрические критерии согласия уступают по мощности критериям типа χ^2. В случае проверки сложных гипотез – преимущество за непараметрическими критериями согласия. В то же время рекомендуется при проверке гипотез о согласии не останавливаться на использовании одного из критериев согласия, так как каждый из критериев по-разному улавливает различные отклонения эмпирического распределения от теоретического.

Изложенная и апробированная методика моделирования распределений статистик при корректном ее применении может быть рекомендована для построения статистических закономерностей в ситуации, когда аналитическими методами не удается решить задачу.

2. Порядок проверки гипотез о согласии

2.1. Порядок проверки простой гипотезы о согласии

При проверке согласия опытного распределения с теоретическим распределением случайной величины X действуют в соответствии с пп. 1-4.

1. Формулируют проверяемую гипотезу, выбирая теоретическое распределение случайной величины, согласие которого с опытным распределением этой величины следует проверить.
2. Из совокупности отбирают случайную выборку объема n. Полученные результаты наблюдений располагают в порядке их возрастания, так что в распоряжении имеют упорядоченную выборку значений
$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n .$$
3. В соответствии с выбранным критерием проверки вычисляют значение статистики S^* критерия [по формулам (6), (12), (15) или (16)].
4. В соответствии с выбранным критерием проверки вычисляют значение $P\{S > S^*\} = \int\limits_{S^*}^{+\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G(S^*|H_0)$, где $G(S|H_0)$ – распределение статистики критерия при справедливости гипотезы H_0. Если $P\{S > S^*\} > \alpha$, где α – задаваемый уровень значимости, то нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы. В противном случае проверяемая гипотеза H_0 отвергается.

   Можно вычисленное значение статистики S^* сравнить с критическим значением S_α, определяемым из условия $\alpha = \int\limits_{S_\alpha}^{+\infty} g(s|H_0)ds$. Гипотеза о согласии отвергается, если значение статистики попадает в критическую область, т. е. при $S^* > S_\alpha$.

2.1.1. Критерий Колмогорова при простой гипотезе

Порядок проверки простой гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим осуществляется в соответствии с пп. 1-4 раздела 2.1.

1. Значение статистики Колмогорова $S_К$ вычисляется по формуле (6) на основании формул (7-9).
2. Значение вероятности $P\{S > S_К^*\} = 1 - K(S_К^*)$ вычисляется по функции распределения Колмогорова (5) или берется из таблицы А.1 приложения.
3. Критические значения критерия S_α при заданном α могут быть взяты из таблицы А.2.

2.1.2. Критерий Смирнова при простой гипотезе

Порядок проверки простой гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим с использованием критерия Смирнова осуществляется в соответствии с пп. 1-4 раздела 2.1.

1. Значение статистики Смирнова S_m вычисляется по формуле (12) на основании формул (8)-(9).
2. Значение вероятности $P\{S_m > S_m^*\} = e^{-S_m^*/2}$ вычисляется по функции χ_2^2–распределения (с двумя степенями свободы).
3. Гипотеза H_0 не отвергается, если для вычисленного по выборке значения статистики S_m^*

$$P\{S_m > S_m^*\} = e^{-S_m^*/2} > \alpha.$$

2.1.3. Критерий ω^2 Крамера-Мизеса-Смирнова при простой гипотезе

Порядок проверки простой гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим осуществляется в соответствии с пп. 1-4 раздела 2.1.

1. Значение статистики Крамера-Мизеса-Смирнова S_ω вычисляется по формуле (16).
2. Значение вероятности $P\{S_\omega > S_\omega^*\} = 1 - a1(S_\omega^*)$ вычисляется по функции распределения $a1(S)$ (17) или берется из таблицы приложения А.3.
3. Критические значения критерия S_α при заданном α могут быть взяты из таблицы А.4.
4. Гипотеза H_0 не отвергается, если для вычисленного по выборке значения статистики S_ω^*

$$P\{S_\omega > S_\omega^*\} = 1 - a1(S_\omega^*) > \alpha.$$

2.1.4. Критерий Ω^2 Андерсона-Дарлинга при простой гипотезе

Порядок проверки простой гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим осуществляется в соответствии с пп.1-4 раздела 2.1.

1. Значение статистики Андерсона-Дарлинга S_Ω вычисляется по формуле (19).
2. Значение вероятности $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\} = 1 - a2(S_\Omega^*)$ вычисляется по функции распределения $a2(S)$ (20) или берутся из таблицы А.5 приложения.
3. Критические значения критерия S_α при заданном α могут быть взяты из таблицы А.6.

4. Гипотеза H_0 не отвергается, если для вычисленного по выборке значения статистики S_Ω^*

$$P\{S_\Omega > S_\Omega^*\} = 1 - a2(S_\Omega^*) > \alpha .$$

2.2. Порядок проверки сложной гипотезы

При проверке согласия опытного распределения с теоретическим распределением случайной величины X действуют в соответствии с пп. 1-7.

1. Формулируют проверяемую гипотезу, выбирая теоретическое распределение $F(x,\theta)$ случайной величины, согласие которого с опытным распределением этой величины следует проверить. Перечень теоретических распределений, для которых возможна проверка сложных гипотез с использованием данных рекомендаций, приведен в разделе 2.2.5
2. Из совокупности отбирают случайную выборку объема n. Полученные результаты наблюдений располагают в порядке их возрастания, так что в распоряжении имеют упорядоченную выборку значений
$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n .$$
3. По выборке вычисляют оценки параметров распределения $F(x,\theta)$, выбранного в п.1 [оценки максимального правдоподобия на основании (21)-(23) или *MD*-оценки, минимизирующие статистику критерия на основании соответственно (24), (25) или (26)].
4. В соответствии с выбранным критерием проверки вычисляют значение статистики S^* критерия [по формулам (6), (12), (15) или (16)].
5. В соответствии с выбранным критерием проверки, теоретическим распределением $F(x,\theta)$, оцененным параметром или параметрами, используемым методом оценивания определяют распределение статистики критерия $G(S|H_0)$ при справедливости гипотезы H_0.
6. На основании выбранного в п. 5 распределения $G(S|H_0)$ вычисляют значение $P\{S > S^*\} = \int\limits_{S^*}^{+\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G(S^*|H_0)$.
7. Если $P\{S > S^*\} > \alpha$, где α – задаваемый уровень значимости, то нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы. В противном случае проверяемая гипотеза H_0 отвергается. Можно вычисленное значение статистики S^* сравнить с критическим значением S_α, определяемым из условия $\alpha = \int\limits_{S_\alpha}^{+\infty} g(s|H_0)ds$. Гипотеза о согласии не отвергается, если $S^* < S_\alpha$.

Если закон распределения, относительно которого проверяется гипотеза о согласии с использованием непараметрического критерия, не входит в перечень п. 2.2.6, то для построения распределения статистики $G(S|H_0)$, соответствующего проверяемой гипотезе H_0, рекомендуется воспользоваться методикой компьютерного анализа, изложенной в п. 1.3.2.

2.2.1. Проверка сложной гипотезы о согласии по критерию типа Колмогорова

Порядок проверки сложной гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим осуществляется в соответствии с пп. 1-7 раздела 2.2.

Особенности применения, связанные с видом статистики, определяются следующим.

1. Оценка скалярного или векторного параметра распределения $F(x,\theta)$ может вычисляться методом максимального правдоподобия на основании формул (21)-(23) или при минимизации статистики $S_К$ на основании (24).
2. Значение статистики Колмогорова $S_К$ (при использовании ОМП) или её минимума (при использовании MD-оценок (24)) вычисляется по формуле (6) на основании формул (7)-(9).
3. Распределение $G(S_К|H_0)$ в случае использования ОМП в соответствии с теоретическим распределением $F(x,\theta)$, оцененным параметром или параметрами выбирается из таблицы А.7 приложения. Критические значения критерия S_α при заданном α могут быть взяты из таблицы А.8.
4. В случае использования MD-оценок (26) распределение $G(S_К|H_0)$ выбирается из таблицы А.9 приложения, а критические значения критерия S_α могут быть взяты из таблицы А.10.
5. Гипотеза о согласии не отвергается, если $P\{S > S_К^*\} = 1 - G(S_К^*|H_0) > \alpha$ (или $S_К^* < S_\alpha$).

2.2.2. Проверка сложной гипотезы о согласии по критерию типа Смирнова

Порядок проверки сложной гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим с использованием критерия типа Смирнова осуществляется в соответствии с пп. 1-7 раздела 2.2.

Особенности применения критерия определяются следующим.

1. Оценка скалярного или векторного параметра распределения $F(x,\theta)$ вычисляется методом максимального правдоподобия (21)-(23).
2. Значение статистики Смирнова S_m вычисляется по формуле (12) на основании формул (8)-(9).

3. Распределение $G(S_m | H_0)$ в случае использования ОМП в соответствии с теоретическим распределением $F(x, \theta)$, оцененным параметром или параметрами, выбирается из таблицы А.11 приложения. Критические значения критерия S_α при заданном α могут быть взяты из таблицы А.12.
4. Гипотеза о согласии не отвергается, если $P\{S > S_m^*\} = 1 - G(S_m^* | H_0) > \alpha$ (или $S_m^* < S_\alpha$).

2.2.3. Проверка сложной гипотезы о согласии по критерию типа ω^2 Мизеса

Порядок проверки сложной гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим осуществляется в соответствии с пп.1-7 раздела 2.2.

Особенности применения критерия определяются следующим.

1. Оценка скалярного или векторного параметра распределения $F(x, \theta)$ может вычисляться методом максимального правдоподобия на основании формул (21)-(23) или при минимизации статистики S_ω на основании (25).
2. Значение статистики Крамера-Мизеса-Смирнова S_ω (при использовании ОМП) или её минимума (при использовании MD-оценок (25)) вычисляется по формуле (16).
3. Распределение $G(S_\omega | H_0)$ в случае использования ОМП в соответствии с теоретическим распределением $F(x, \theta)$, оцененным параметром или параметрами выбирается из таблицы А.13 приложения. Критические значения критерия S_α при заданном α могут быть взяты из таблицы А.14.
4. В случае использования MD-оценок (27) распределение $G(S_\omega | H_0)$ выбирается из таблицы А.15 приложения, а критические значения критерия S_α могут быть взяты из таблицы А.16.
5. Гипотеза о согласии не отвергается, если $P\{S > S_\omega^*\} = 1 - G(S_\omega^* | H_0) > \alpha$ (или $S_\omega^* < S_\alpha$).

2.2.4. Проверка сложной гипотезы о согласии по критерию типа Ω^2 Мизеса

Порядок проверки сложной гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим осуществляется в соответствии с пп. 1-7 раздела 2.2.

Особенности применения критерия определяются следующим.

1. Оценка скалярного или векторного параметра распределения $F(x, \theta)$ может вычисляться методом максимального правдоподобия на основании формул (21)-(23) или при минимизации статистики S_Ω на основании (26).

2. Значение статистики Андерсона-Дарлинга S_Ω (при использовании ОМП) или её минимума (при использовании MD-оценок (26)) вычисляется по формуле (19).
3. Распределение $G(S_\Omega | H_0)$ в случае использования ОМП в соответствии с теоретическим распределением $F(x,\theta)$, оцененным параметром или параметрами выбирается из таблицы А.17 приложения. Критические значения критерия S_α при заданном α могут быть взяты из таблицы А.18.
4. В случае использования MD-оценок (28) распределение $G(S_\Omega | H_0)$ выбирается из таблицы А.19 приложения, а критические значения критерия S_α могут быть взяты из таблицы А.20.
5. Гипотеза о согласии не отвергается, если $P\{S > S_\Omega^*\} = 1 - G(S_\Omega^* | H_0) > \alpha$ (или $S_\Omega^* < S_\alpha$).

2.2.5. Проверка сложных гипотез о согласии с гамма-распределением

Порядок проверки сложной гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим гамма-распределением осуществляется в соответствии с пп. 1-7 раздела 2.2.

Особенности применения рассматриваемых критериев определяется тем фактом, что предельные распределения статистик критериев в данном случае зависят от значения параметра формы θ_0 гамма-распределения (см. табл. 1). Кроме того, модели распределений статистик при проверке согласия с гамма-распределением построены только для случая использования ОМП и для ограниченного ряда значений параметра формы θ_0.

При необходимости проверки гипотезы о согласии для значения параметра θ_0, не совпадающего с представленными в таблицах А.21–А.28 приложения, следует воспользоваться законом распределения соответствующей статистики (или процентными точками) при ближайшем к θ_0 табличном значении этого параметра. Можно найти искомые приближенные значения вероятности $P\{S > S^*\}$ (или процентных точек) с помощью интерполяции.

2.2.5.1. Проверка сложной гипотезы о согласии с гамма-распределением по критерию типа Колмогорова

Общий порядок проверки сложной гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим гамма-распределением осуществляется в соответствии с пп. 1-7 раздела 2.2.

Особенности применения, связанные с видом статистики, определяются следующим.

1. Оценка скалярного или векторного параметра гамма-распределения вычисляется методом максимального правдоподобия на основании формул (21)-(23).
2. Значение статистики Колмогорова $S_{\text{К}}$ вычисляется по формуле (6) на основании формул (7)-(9).
3. Распределение $G(S_{\text{К}}|H_0)$ в соответствии с оцененным параметром или параметрами выбирается из таблицы А.21 приложения. Критическое значение критерия S_α при заданном α может быть взято из таблицы А.22. Если значение параметра формы θ_0 не совпадает ни с одним из табличных, искомые значения $P\{S > S_K^*\}$ или квантили S_α определяются с использованием интерполяции.
4. Гипотеза о согласии не отвергается, если $P\{S > S_{\text{К}}^*\} = 1 - G(S_{\text{К}}^*|H_0) > \alpha$ (или $S_{\text{К}}^* < S_\alpha$).

2.2.5.2. Проверка сложной гипотезы о согласии с гамма-распределением по критерию типа Смирнова

Порядок проверки сложной гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим гамма-распределением с использованием критерия типа Смирнова осуществляется в соответствии с пп. 1-7 раздела 2.2.

Особенности применения критерия определяются следующим.

1. Оценка скалярного или векторного параметра гамма-распределения вычисляется методом максимального правдоподобия (21)-(23).
2. Значение статистики Смирнова S_m вычисляется по формуле (12) на основании формул (8)-(9).
3. Распределение $G(S_m|H_0)$ в соответствии с оцененным параметром или параметрами выбирается из таблицы А.23 приложения. Критическое значение критерия S_α при заданном α может быть взято из таблицы А.24. Если значение параметра формы θ_0 не совпадает ни с одним из табличных, искомые значения $P\{S > S_m^*\}$ или критические значения критерия S_α при заданном α определяются с использованием интерполяции.
4. Гипотеза о согласии не отвергается, если $P\{S > S_m^*\} = 1 - G(S_m^*|H_0) > \alpha$ (или $S_m^* < S_\alpha$).

2.2.5.3. Проверка сложной гипотезы о согласии с гамма-распределением по критерию типа ω^2 Мизеса

Порядок проверки сложной гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим гамма-распределением по критерию типа ω^2 Мизеса осуществляется в соответствии с пп.1-7 раздела 2.2.

Особенности применения критерия определяются следующим.

1. Оценка скалярного или векторного параметра гамма-распределения вычисляется методом максимального правдоподобия на основании формул (21)-(23).
2. Значение статистики Крамера-Мизеса-Смирнова S_ω вычисляется по формуле (16).
3. Распределение $G(S_\omega | H_0)$ в соответствии с оцененным параметром или параметрами выбирается из таблицы А.25 приложения. Критическое значение критерия S_α при заданном α может быть взято из таблицы А.26. Если значение параметра формы θ_0 не совпадает ни с одним из табличных, искомые значения $P\{S > S_\omega^*\}$ или критические значения критерия S_α при заданном α определяются с использованием интерполяции.
4. Гипотеза о согласии не отвергается, если $P\{S > S_\omega^*\} = 1 - G(S_\omega^* | H_0) > \alpha$ (или $S_\omega^* < S_\alpha$).

2.2.5.4. Проверка сложной гипотезы о согласии с гамма-распределением по критерию типа Ω^2 Мизеса

Порядок проверки сложной гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим гамма-распределением по критерию типа Ω^2 Мизеса осуществляется в соответствии с пп. 1-7 раздела 2.2.

Особенности применения критерия определяются следующим.

1. Оценка скалярного или векторного параметра гамма-распределения вычисляется методом максимального правдоподобия на основании формул (21)-(23).
2. Значение статистики Андерсона-Дарлинга S_Ω вычисляется по формуле (19).
3. Распределение $G(S_\Omega | H_0)$ в соответствии с оцененным параметром или параметрами выбирается из таблицы А.27 приложения. Критическое значение критерия S_α при заданном α может быть взято из таблицы А.28. Если значение параметра формы θ_0 не совпадает ни с одним из табличных, искомые значения $P\{S > S_\Omega^*\}$ или критические значения критерия S_α при заданном α определяются с использованием интерполяции.
4. Гипотеза о согласии не отвергается, если $P\{S > S_\Omega^*\} = 1 - G(S_\Omega^* | H_0) > \alpha$ (или $S_\Omega^* < S_\alpha$).

2.2.6. Проверка сложных гипотез о согласии с распределениями Джонсона

Проверка сложных гипотез о согласии опытного распределения с теоретическими распределениями Джонсона по критериям типа Колмогорова, типа

ω^2 и Ω^2 Мизеса при использовании метода максимального правдоподобия осуществляется в соответствии с разделами 2.2.1, 2.2.3 и 2.2.4 соответственно.

Модели предельных распределений соответствующих статистик выбираются из таблицы А.29 приложения для распределения *Sb*-Джонсона, из таблицы А.30 для распределения *Sl*-Джонсона, из таблицы А.31 для распределения *Su*-Джонсона.

Процентные точки распределений статистики типа Колмогорова представлены в таблице А.32, статистики типа ω^2 Мизеса – в таблице А.33, статистики типа Ω^2 Мизеса – в таблице А.34.

2.2.7. Перечень распределений, для которых регламентирована проверка сложных гипотез с использованием рекомендаций

Данные рекомендации определяют порядок проверки сложных гипотез о согласии с законами распределения, перечень которых приведен в таблице 1.

Таблица 1

№ п/п	Распределение случайной величины	Функция плотности
1	Экспоненциальное, $x \geq 0$	$\frac{1}{\theta_0} e^{-x/\theta_0}$
2	Полунормальное, $x \geq 0$	$\frac{2}{\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\theta_0^2}$
3	Рэлея, $x \geq 0$	$\frac{x}{\theta_0^2} e^{-x^2/2\theta_0^2}$
4	Максвелла, $x \geq 0$	$\frac{2x^2}{\theta_0^3\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\theta_0^2}$
5	Лапласа, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{2\theta_0} e^{-\lvert x-\theta_1 \rvert/\theta_0}$
6	Нормальное, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}}$
7	Логнормальное, $x \in (0, \infty)$	$\frac{1}{x\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x-\theta_1)^2/2\theta_0^2}$
8	Коши, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{\theta_0}{\pi[\theta_0^2+(x-\theta_1)^2]}$

9	Логистическое, $x \in (-\infty, \infty)$	$\dfrac{\pi}{\theta_0\sqrt{3}}\exp\left\{-\dfrac{\pi(x-\theta_1)}{\theta_0\sqrt{3}}\right\} \Bigg/ \left[1+\exp\left\{-\dfrac{\pi(x-\theta_1)}{\theta_0\sqrt{3}}\right\}\right]^2$
10	Наибольшего значения, $x \in (-\infty, \infty)$	$\dfrac{1}{\theta_0}\exp\left\{-\dfrac{x-\theta_1}{\theta_0}-\exp\left(-\dfrac{x-\theta_1}{\theta_0}\right)\right\}$
11	Наименьшего значения, $x \in (-\infty, \infty)$	$\dfrac{1}{\theta_0}\exp\left\{\dfrac{x-\theta_1}{\theta_0}-\exp\left(\dfrac{x-\theta_1}{\theta_0}\right)\right\}$
12	Вейбулла, $x \in (0, \infty)$	$\dfrac{\theta_0 x^{\theta_0-1}}{\theta_1^{\theta_0}}\exp\left\{-\left(\dfrac{x}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right\}$
13	Гамма-распределение, $x \in (\theta_2, \infty)$	$\dfrac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)}(x-\theta_2)^{\theta_0-1}e^{-(x-\theta_2)/\theta_1}$
14	*Sb*-Джонсона, $x \in [\theta_3, \theta_2+\theta_3]$	$\dfrac{\theta_1\theta_2}{(x-\theta_3)(\theta_2+\theta_3-x)}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\theta_0-\theta_1\ln\dfrac{x-\theta_3}{\theta_2+\theta_3-x}\right]^2\right\}$
15	*Sl*-Джонсона, $x \in [\theta_3, \infty)$	$\dfrac{\theta_1}{(x-\theta_3)}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\theta_0+\theta_1\ln\dfrac{x-\theta_3}{\theta_2}\right]^2\right\}$
16	*Su*-Джонсона, $x \in (-\infty, \infty)$	$\dfrac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(x-\theta_3)^2+\theta_2^2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\theta_0+\theta_1\ln\left\{\dfrac{x-\theta_3}{\theta_2}+\sqrt{\left(\dfrac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^2+1}\right\}\right]^2\right\}$

Список распределений, приведенный в таблице 1, достаточно ограничен. Он включает законы распределения, наиболее часто используемые в приложениях в качестве моделей законов реальных случайных величин. Более широкий набор параметрических моделей законов распределений предлагается в справочнике [35]. В случае необходимости проверки сложной гипотезы относительно закона, не вошедшего в представленный в данном параграфе перечень, для построения распределения статистики $G(S|H_0)$, соответствующего проверяемой гипотезе H_0, рекомендуется воспользоваться методикой компьютерного анализа, изложенной в п. 1.3.2.

2.2.8. Законы распределения, используемые для аппроксимации предельных распределений статистик непараметрических критериев при проверке сложных гипотез

Эмпирические законы распределения статистик непараметрических критериев согласия наиболее хорошо описываются одним из следующих законов распределения: *логарифмически нормальным*, *гамма-распределением*, распределением *Sl-Джонсона* или распределением *Su-Джонсона*.

В таблицах приложения А, содержащих рекомендуемые для использования при проверке сложных гипотез распределения $G(S|H_0)$, через $\ln N(\theta_1,\theta_0)$ обозначено логарифмически нормальное распределение с функцией плотности

$$f(x)=\frac{1}{x\theta_0\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln x-\theta_1)^2/2\theta_0^2},$$

через $\gamma(\theta_0,\theta_1,\theta_2)$ - гамма-распределение с функцией плотности

$$f(x)=\frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)}\left(x-\theta_2\right)^{\theta_0-1}e^{-(x-\theta_2)/\theta_1},$$

через $Sl(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ - распределение *Sl*-Джонсона с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_1}{\left(x-\theta_3\right)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0+\theta_1\ln\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right]^2\right\},$$

через $Su(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ - распределение *Su*-Джонсона с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\left(x-\theta_3\right)^2+\theta_2^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0+\theta_1\ln\left\{\frac{x-\theta_3}{\theta_2}+\sqrt{\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^2+1}\right\}\right]^2\right\}.$$

Таблицы А.7-А.34 приложения построены в результате применения методики компьютерного анализа статистических закономерностей, описанной в параграфе 1.3.2.

Процентные точки, представленные в таблицах, соответствуют построенным моделям распределений статистик. В некоторых частных случаях эти значения уточнялись в результате аппроксимации “хвостов” эмпирических распределений, полученных в результате моделирования.

Таблицы А.1-А.6, используемые при проверке простых гипотез и содержащие значения функций распределения классических статистик непараметрических критериев согласия и значения процентных точек, заимствованы в [3].

2.2.9. Примеры применения критериев согласия при простых и сложных гипотезах

Пример 1. Проверяется простая гипотеза о принадлежности выборки экспоненциальному закону. Упорядоченная выборка объемом 100 наблюдений имеет вид:

0,0041	0,0051	0,0058	0,0074	0,0082
0,0110	0,0160	0,0191	0,0263	0,0279
0,0294	0,0323	0,0411	0,0452	0,0688
0,0741	0,0805	0,0809	0,1026	0,1124
0,1220	0,1226	0,1233	0,1317	0,1323
0,1368	0,1379	0,1475	0,1515	0,1598
0,1710	0,1789	0,2010	0,2014	0,2072

0,2102	0,2194	0,2205	0,2297	0,2300
0,2302	0,2373	0,2375	0,2397	0,2415
0,2492	0,2869	0,2908	0,2976	0,3058
0,3060	0,3073	0,3096	0,3278	0,3553
0,3620	0,3679	0,3833	0,3921	0,3985
0,4078	0,4080	0,4119	0,4169	0,4208
0,4568	0,4707	0,4880	0,4942	0,5214
0,5277	0,5878	0,6146	0,6180	0,6263
0,6415	0,6757	0,7156	0,7157	0,7207
0,7351	0,7485	0,7535	0,7541	0,7728
0,8875	0,9021	0,9581	0,9868	1,0440
1,2226	1,2402	1,2641	1,3034	1,3328
1,3553	1,4006	1,5586	1,6296	2,5018

Проверяемая гипотеза имеет вид $H_0:\ f(x) = \dfrac{1}{\theta_0} e^{-x/\theta_0}$ при значении параметра $\theta_0 = 0{,}5$.

А) Критерий Колмогорова

В соответствии с п.2.1.1 вычисляем значение статистики Колмогорова по формуле (6): $S_{\text{К}}^* = 0{,}8269$. При этом значении статистики вычисляем вероятность $P\{S > S_{\text{К}}^*\} = 1 - K(S_{\text{К}}^*)$=0,5011.

Б) Критерий Смирнова

В соответствии с п.2.1.2 вычисляем значение статистики Смирнова по формуле (12): S_m^*=2,7349. При этом значении статистики вычисляем вероятность $P\{S_m > S_m^*\} = e^{-S_m^*/2}$=0,2548.

В) Критерий ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.1.3 вычисляем значение статистики ω^2 Мизеса по формуле (16): S_ω^*=0,1272. При этом значении статистики вычисляем вероятность $P\{S_\omega > S_\omega^*\} = 1 - a1(S_\omega^*)$=0,4673.

Г) Критерий Ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.1.4 вычисляем значение статистики Ω^2 Мизеса по формуле (16): $S_\Omega^* = 0{,}8985$. При таком значении статистики вычисляем вероятность $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\} = 1 - a2(S_\Omega^*)$=0,4151.

Как видим, при задании уровня значимости α<0,2548 (для критерия Смирнова) нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы по всем критериям согласия.

Пример 2. Проверяется сложная гипотеза о принадлежности выборки из примера 1 экспоненциальному закону $H_0:\ f(x) \in \left\{ \dfrac{1}{\theta_0} e^{-x/\theta_0},\ \theta_0 \in (0, \infty) \right\}$. Вычисленная по выборке оценка максимального правдоподобия параметра $\hat{\theta}_0$=0,4465.

А) Критерий типа Колмогорова

В соответствии с п.2.2.1 вычисляем значение статистики типа Колмогорова по формуле (6): $S_{\text{К}}^* = 0{,}5188$. Из приложения А.7 видим, что распределение статистики критерия хорошо аппроксимируется логарифмически нормальным распределением $f(x) = \frac{1}{x\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \theta_1)^2/2\theta_0^2}$ с параметрами $\theta_0 = 0{,}2545;\ \theta_1 = -0{,}3422$. При найденном значении статистики по логарифмически нормальному закону вычисляем вероятность $P\{S > S_{\text{К}}^*\}$=0,8914.

Б) Критерий типа Смирнова

В соответствии с п.2.2.2 вычисляем значение статистики типа Смирнова по формуле (12): $S_m^* = 1{,}0767$. Из приложения А.11 видим, что распределение статистики критерия аппроксимируется логарифмически нормальным распределением с параметрами $\theta_0 = 0{,}6951;\ \theta_1 = 0{,}226$. При найденном значении статистики вычисляем вероятность $P\{S_m > S_m^*\}$=0,5866.

В) Критерий типа ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.2.3 вычисляем значение статистики типа ω^2 Мизеса по формуле (16): S_ω^*=0,035. Из приложения А.13 видим, что распределение статистики критерия аппроксимируется распределением *Su*-Джонсона с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(x-\theta_3)^2 + \theta_2^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0 + \theta_1 \ln\left\{\frac{x-\theta_3}{\theta_2} + \sqrt{\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^2 + 1}\right\}\right]^2\right\}$$

и параметрами $\theta_0 = -1{,}8734;\ \theta_1$=1,2118; $\theta_2 = 0{,}0223;\ \theta_3 = 0{,}024$. При найденном значении статистики по распределению *Su*-Джонсона вычисляем вероятность $P\{S_\omega > S_\omega^*\}$=0,9027.

Г) Критерий типа Ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.2.4 вычисляем значение статистики Ω^2 Мизеса по формуле (16): S_Ω^*=0,386. Из приложения А.17 видим, что распределение статистики критерия аппроксимируется распределением *Su*-Джонсона с параметрами $\theta_0 = -2{,}8653;\ \theta_1$ =1,422; $\theta_2 = 0{,}105;\ \theta_3 = 0{,}1128$. При найденном значении статистики по распределению *Su*-Джонсона вычисляем вероятность $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\}$=0,6808.

По всем критериям согласие выборки с экспоненциальным законом очень хорошее.

Пример 3. Проверяется простая гипотеза о принадлежности выборки нормальному закону. Упорядоченная выборка объемом 100 наблюдений имеет вид:

-0,6679	-0,4652	0,0056	0,0078	0,0167
0,0362	0,1189	0,1556	0,1831	0,2037
0,2829	0,2852	0,3388	0,4264	0,4733
0,4999	0,5093	0,5181	0,5227	0,5281
0,5506	0,5679	0,5849	0,5872	0,6027
0,6052	0,6124	0,6342	0,6616	0,6669
0,6712	0,7245	0,7386	0,7567	0,7992
0,8045	0,8083	0,8151	0,8216	0,8422
0,8472	0,8502	0,8678	0,8699	0,8902
0,8918	0,9037	0,9443	0,9529	0,9535
0,9548	0,9557	0,9632	0,9767	0,9956
0,9992	1,0233	1,0257	1,0574	1,0621
1,0658	1,0706	1,0724	1,1059	1,1172
1,1447	1,1500	1,1595	1,1836	1,1875
1,1887	1,2143	1,2360	1,2589	1,2754
1,2998	1,3192	1,3288	1,3587	1,3818
1,3998	1,4088	1,4314	1,4337	1,4822
1,4832	1,4958	1,4968	1,5213	1,5249
1,5896	1,6087	1,6425	1,6554	1,6687
1,8223	1,8569	1,8886	2,0460	2,2956

Проверяемая гипотеза имеет вид H_0: $f(x) = \dfrac{1}{\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}}$ при значении параметра $\theta_0 = 0{,}5$; $\theta_1 = 1$.

А) Критерий Колмогорова

В соответствии с п.2.1.1 вычисляем значение статистики Колмогорова по формуле (6): $S_\text{К}^* = 0{,}7410$. При этом значении статистики вычисляем вероятность $P\{S > S_\text{К}^*\} = 1 - K(S_\text{К}^*)$=0,5741.

Б) Критерий Смирнова

В соответствии с п.2.1.2 вычисляем значение статистики Смирнова по формуле (12): $S_m^* = 2{,}1964$. При этом значении статистики вычисляем вероятность $P\{S_m > S_m^*\} = e^{-S_m^*/2}$=0,3335.

В) Критерий ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.1.3 вычисляем значение статистики ω^2 Мизеса по формуле (16): $S_\omega^* = 0{,}1148$. При этом значении статистики вычисляем вероятность $P\{S_\omega > S_\omega^*\} = 1 - a1(S_\omega^*)$=0,5169.

Г) Критерий Ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.1.4 вычисляем значение статистики Ω^2 Мизеса по формуле (16): $S_\Omega^* = 0{,}7577$. При таком значении статистики вычисляем вероятность $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\} = 1 - a2(S_\Omega^*)$ =0,5126.

Как видим, при задании уровня значимости α<0,3335 (для критерия Смирнова) нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы по всем критериям согласия.

Пример 4. Проверяется сложная гипотеза о принадлежности выборки из примера 3 нормальному закону распределения. Проверяемая гипотеза имеет вид H_0: $f(x) \in \left\{ \frac{1}{\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta_1)^2/2\theta_0^2}, \theta_0 \in (0,\infty), \theta_1 \in (-\infty,\infty) \right\}$. Вычисленные по выборке оценки максимального правдоподобия параметров $\hat{\theta}_0 = 0{,}4465$; $\hat{\theta}_1 = 0{,}9369$.

А) Критерий типа Колмогорова

В соответствии с п.2.2.1 вычисляем значение статистики типа Колмогорова по формуле (6): $S_\text{К}^* = 0.5741$. Из приложения А.7 находим, что распределение статистики критерия при вычислении оценок максимального правдоподобия двух параметров нормального закона аппроксимируется гамма-распределением $f(x) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)}\left(x-\theta_2\right)^{\theta_0-1} e^{-(x-\theta_2)/\theta_1}$ с параметрами $\theta_0 = 4{,}9014$; $\theta_1 = 0{,}0691$; $\theta_2 = 0{,}2951$. При найденном значении статистики по гамма-распределению вычисляем вероятность $P\{S > S_\text{К}^*\}$=0,6034.

Б) Критерий типа Смирнова

В соответствии с п.2.2.2 вычисляем значение статистики типа Смирнова по формуле (12): $S_m^* = 0{,}4016$. Из приложения А.11 видим, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров нормального закона подчиняется логарифмически нормальному распределению с параметрами $\theta_0 = 0{,}5436$; $\theta_1 = 0{,}1164$. При найденном значении статистики вычисляем по логарифмически нормальному закону вероятность $P\{S_m > S_m^*\}$=0,9708.

В) Критерий типа ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.2.3 вычисляем значение статистики типа ω^2 Мизеса по формуле (16): $S_\omega^* = 0{,}0338$. Из приложения А.13 определяем, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров нормального закона подчиняется логарифмически нормальному распределению с параметрами $\theta_0 = 0{,}5330$; $\theta_1 = -2{,}9794$. При найденном значении статистики вычисляем по логарифмически нормальному закону вероятность $P\{S_\omega > S_\omega^*\}$=0.7779.

Г) Критерий типа Ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.2.4 вычисляем значение статистики Ω^2 Мизеса по формуле (16): $S_\Omega^* = 0{,}2394$. Из приложения А.17 определяем, что распределение статистики критерия подчиняется распределению *Su*-Джонсона с параметрами $\theta_0 = -2{,}7057$; $\theta_1 = 1{,}7154$; $\theta_2 = 0{,}1043$; $\theta_3 = 0{,}0925$. При найденном значении статистики по распределению *Su*-Джонсона вычисляем вероятность $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\}$=0,7719.

По всем критериям согласие выборки с нормальным законом очень хорошее.

Пример 5. Проверяется сложная гипотеза о принадлежности выборки двухпараметрическому распределению Вейбулла. Упорядоченная выборка объемом 200 наблюдений имеет вид:

0,0999	0,1089	0,1134	0,1160	0,1242
0,1332	0,1356	0,1442	0,1575	0,1819
0,1853	0,1922	0,2071	0,2141	0,2184
0,2244	0,2475	0,2485	0,2551	0,2572
0,2634	0,2642	0,2647	0,2659	0,2668
0,2726	0,2768	0,2796	0,2824	0,2844
0,2858	0,2897	0,2918	0,2957	0,3090
0,3151	0,3151	0,3152	0,3181	0,3187
0,3208	0,3241	0,3305	0,3380	0,3396
0,3398	0,3405	0,3417	0,3441	0,3533
0,3547	0,3548	0,3663	0,3671	0,3734
0,3781	0,3870	0,3918	0,3940	0,3980
0,3988	0,4032	0,4070	0,4110	0,4219
0,4234	0,4236	0,4257	0,4282	0,4305
0,4320	0,4535	0,4599	0,4611	0,4632
0,4739	0,4821	0,4862	0,4885	0,4899
0,5089	0,5106	0,5285	0,5338	0,5361
0,5374	0,5399	0,5505	0,5537	0,5685
0,5716	0,5717	0,5730	0,5821	0,5834
0,5999	0,6010	0,6054	0,6097	0,6120
0,6142	0,6151	0,6252	0,6259	0,6315
0,6354	0,6377	0,6423	0,6520	0,6553
0,6758	0,6853	0,6862	0,6943	0,6987
0,7095	0,7114	0,7140	0,7157	0,7355
0,7479	0,7624	0,7738	0,7748	0,7820
0,7849	0,7915	0,8013	0,8099	0,8111
0,8184	0,8234	0,8250	0,8260	0,8284
0,8295	0,8473	0,8478	0,8480	0,8493
0,8620	0,8706	0,8713	0,8834	0,8846
0,9073	0,9076	0,9128	0,9272	0,9500
0,9589	0,9608	0,9890	0,9922	1,0176
1,0184	1,0287	1,0368	1,0533	1,0538
1,1193	1,1245	1,1245	1,1346	1,1399
1,1485	1,1574	1,1591	1,1669	1,1701
1,2342	1,2618	1,2679	1,3034	1,3503
1,4257	1,4258	1,4501	1,4617	1,4632
1,4785	1,5091	1,5188	1,5752	1,6154

1,6333	1,6355	1,7139	1,7503	1,7684
1,9291	2,0316	2,0937	2,0948	2,3901
2,5209	2,8097	3,0380	3,0530	6,1251

Проверяем H_0: $f(x) \in \left\{ \frac{\theta_0 x^{\theta_0 - 1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp\left\{ -\left(x/\theta_1 \right)^{\theta_0} \right\},\ \theta_0 \in (0, \infty),\ \theta_1 \in (0, \infty) \right\}$. Вычисленные по выборке оценки максимального правдоподобия параметров $\hat{\theta}_0 = 1{,}3734$; $\hat{\theta}_1 = 0{,}8539$.

А) Критерий типа Колмогорова

В соответствии с п.2.2.1 вычисляем значение статистики типа Колмогорова по формуле (6): $S_K^* = 1{,}2402$. Из приложения А.7 находим, что распределение статистики критерия при вычислении оценок максимального правдоподобия двух параметров распределения Вейбулла аппроксимируется гамма-распределением с параметрами $\theta_0 = 4{,}9738$; $\theta_1 = 0{,}066$; $\theta_2 = 0{,}3049$. При найденном значении статистики в соответствии с гамма-распределением вычисляем вероятность $P\{S > S_K^*\}$=0,00154. Следовательно, при задании уровня значимости $\alpha > 0{,}00154$ мы должны отклонить проверяемую гипотезу.

Б) Критерий типа Смирнова

В соответствии с п.2.2.2 вычисляем значение статистики типа Смирнова по формуле (12): $S_m^* = 4{,}6028$. Из приложения А.11 видим, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров распределения Вейбулла подчиняется логарифмически нормальному распределению с параметрами $\theta_0 = 0{,}1501$; $\theta_1 = 0{,}5108$. При найденном значении статистики вычисляем в соответствии с логарифмически нормальным законом вероятность $P\{S_m > S_m^*\}$=0,00352.

В) Критерий типа ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.2.3 вычисляем значение статистики типа ω^2 Мизеса по формуле (16): $S_\omega^* = 0{,}347$. Из приложения А.13 определяем, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров распределения Вейбулла подчиняется логарифмически нормальному распределению с параметрами $\theta_0 = 0{,}5379$; $\theta_1 = -2{,}9541$. При найденном значении статистики вычисляем в соответствии с логарифмически нормальным законом вероятность $P\{S_\omega > S_\omega^*\}$=0,00021.

Г) Критерий типа Ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.2.4 вычисляем значение статистики Ω^2 Мизеса по формуле (16): $S_\Omega^* = 2{,}553$. Из приложения А.17 определяем, что при вычислении ОМП двух параметров распределения Вейбулла распределение статистики критерия хорошо приближается распределением *Su*-Джонсона с параметрами $\theta_0 = -2{,}4622$; $\theta_1 = 1{,}6473$; $\theta_2 = 0{,}1075$; $\theta_3 = 0{,}1149$. При найденном значении статистики вычисляем по распределению Su-Джонсона вероятность $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\}$=0,000066.

Таким образом, по всем критериям выборка плохо согласуется с распределением Вейбулла и проверяемая гипотеза должна быть отклонена.

Пример 6. Проверяется сложная гипотеза о принадлежности выборки гамма-распределению с параметром формы $\theta_0 = 2$, параметром сдвига $\theta_2 = 0$. Упорядоченная выборка объемом 100 наблюдений имеет вид:

0,1006	0,2156	0,2311	0,2925	0,3410
0,3512	0,4028	0,5132	0,5340	0,5409
0,6100	0,6187	0,6204	0,6324	0,6559
0,6743	0,7131	0,7394	0,7779	0,7911
0,7919	0,8068	0,8117	0,8839	0,8996
0,9040	0,9167	0,9210	0,9441	0,9487
1,0274	1,0285	1,0316	1,1102	1,1249
1,1302	1,1497	1,2345	1,2530	1,2903
1,3136	1,3303	1,3360	1,3405	1,3804
1,4050	1,4117	1,4331	1,4617	1,4991
1,5852	1,6111	1,6175	1,6299	1,6798
1,7159	1,7287	1,7756	1,8505	1,8872
1,8928	1,9605	2,0299	2,1560	2,2548
2,2769	2,2901	2,3020	2,4111	2,4679
2,5302	2,5342	2,6717	2,6789	2,6797
2,8988	2,9230	2,9414	2,9558	3,0030
3,0531	3,1134	3,2002	3,2757	3,3716
3,4342	3,4632	3,5365	3,5753	3,7399
3,9758	4,1776	4,3462	4,3627	4,5000
4,5506	4,7544	4,7859	5,6662	8,2201

Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0:\ f(x) \in \left\{ \frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)} (x-\theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-(x-\theta_2)/\theta_1},\ \theta_0 = 2,\ \theta_1 \in (0,\infty), \theta_2 = 0 \right\}.$$

Вычисленная по выборке оценка максимального правдоподобия параметра масштаба $\hat{\theta}_1 = 1{,}02818$.

А) Критерий типа Колмогорова

В соответствии с п.2.2.5.1 вычисляем значение статистики типа Колмогорова по формуле (6): $S_К^* = 0{,}4917$. Из приложения А.21 находим, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП масштабного параметра гамма-распределения подчиняется распределению Su-Джонсона с параметрами $\theta_0 = -2{,}2691;\ \theta_1 = 2{,}2383;\ \theta_2 = 0{,}2323;\ \theta_3 = 0{,}3958$. При найденном значении статистики по распределению Su-Джонсона вычисляем вероятность $P\{S > S_К^*\}$=0,9146. Следовательно, согласие очень хорошее и мы должны принять проверяемую гипотезу.

Б) Критерий типа Смирнова

В соответствии с п.2.2.5.2 вычисляем значение статистики типа Смирнова по формуле (12): $S_m^* = 0{,}9419$. Из приложения А.23 видим, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметра масштаба гамма-распределения подчиняется распределению *Su*-Джонсона с параметрами $\theta_0 = -2{,}5372$; $\theta_1 = 1{,}3749$; $\theta_2 = 0{,}3464$; $\theta_3 = 0{,}2162$. При найденном значении статистики по распределению *Su*-Джонсона вычисляем вероятность $P\{S_m > S_m^*\}$=0,6897, значение которой указывает на хорошее согласие.

В) Критерий типа ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.2.5.3 вычисляем значение статистики типа ω^2 Мизеса по формуле (16): $S_\omega^* = 0{,}0475$. Из приложения А.25 определяем, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметра масштаба гамма-распределения подчиняется распределению *Su*-Джонсона с параметрами $\theta_0 = -1{,}6042$; $\theta_1 = 1{,}1125$; $\theta_2 = 0{,}0027$; $\theta_3 = 0{,}0281$. При найденном значении статистики по распределению *Su*-Джонсона вычисляем вероятность $P\{S_\omega > S_\omega^*\}$=0,7498.

Г) Критерий типа Ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.2.5.4 вычисляем значение статистики Ω^2 Мизеса по формуле (16): $S_\Omega^* = 0{,}2675$. Из приложения А.27 определяем, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметра масштаба гамма-распределения подчиняется распределению *Su*-Джонсона с параметрами $\theta_0 = -2{,}4667$, $\theta_1 = 1{,}418$, $\theta_2 = 0{,}1207$, $\theta_3 = 0{,}1416$. При найденном значении статистики по данному распределению *Su*-Джонсона вычисляем вероятность $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\}$=0,8798.

Таким образом, по всем критериям выборка хорошо согласуется с гамма-распределением и проверяемая гипотеза должна быть принята.

Пример 7. Проверяется сложная гипотеза о принадлежности выборки гамма-распределению с параметром сдвига $\theta_2 = 0$. Упорядоченная выборка объемом 100 наблюдений имеет вид:

0,0002	0,0004	0,0009	0,0019	0,0020
0,0025	0,0028	0,0030	0,0031	0,0040
0,0044	0,0054	0,0057	0,0068	0,0076
0,0081	0,0084	0,0090	0,0101	0,0119
0,0130	0,0162	0,0190	0,0201	0,0206
0,0237	0,0293	0,0312	0,0427	0,0431
0,0441	0,0452	0,0481	0,0492	0,0498
0,0517	0,0517	0,0552	0,0558	0,0638
0,0671	0,0714	0,0806	0,0815	0,0965
0,0987	0,1005	0,1055	0,1255	0,1307
0,1312	0,1324	0,1353	0,1411	0,1446
0,1524	0,1594	0,1678	0,1754	0,1767

0,1799	0,1838	0,1994	0,2116	0,2159
0,2162	0,2238	0,2242	0,2329	0,2545
0,2782	0,2900	0,2929	0,2967	0,3006
0,3084	0,3200	0,3262	0,3286	0,3473
0,3488	0,3608	0,3905	0,3961	0,4132
0,4294	0,4385	0,4557	0,4629	0,4699
0,5041	0,5096	0,6121	0,6146	0,6415
0,7359	0,9762	1,1460	1,1494	1,6170

Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0:\ f(x) \in \left\{ \frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)} (x-\theta_2)^{\theta_0-1} e^{-(x-\theta_2)/\theta_1},\ \theta_0 =\in (0,\infty),\ \theta_1 \in (0,\infty), \theta_2 = 0 \right\}.$$

Вычисленные по выборке ОМП параметров формы и масштаба соответственно равны $\hat{\theta}_0 = 0{,}5812$; $\hat{\theta}_1 = 2{,}7391$. В таблицах А.21–А.28 приложения ближайшее значение параметра формы $\theta_0 = 0{,}5$.

А) Критерий типа Колмогорова

В соответствии с п.2.2.5.1 вычисляем значение статистики типа Колмогорова по формуле (6): $S_К^* = 0{,}6272$. Из приложения А.21 находим, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметров формы и масштаба гамма-распределения при $\theta_0 = 0{,}5$ подчиняется распределению *Su*-Джонсона с параметрами $\theta_0 = -2{,}8715$; $\theta_1 = 2{,}5280$; $\theta_2 = 0{,}2325$; $\theta_3 = 0{,}3296$. При найденном значении статистики по данному распределению *Su*-Джонсона вычисляем вероятность $P\{S > S_К^*\}$=0,5699. Так как оценка параметра формы больше 0,5, то при $\hat{\theta}_0 = 0{,}5812$ $P\{S > S_К^*\}$>0,5699. Следовательно, мы должны принять проверяемую гипотезу.

Б) Критерий типа Смирнова

В соответствии с п.2.2.5.2 вычисляем значение статистики типа Смирнова по формуле (12): $S_m^* = 1{,}1526$. Из приложения А.23 видим, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметров формы и масштаба гамма-распределения при $\theta_0 = 0{,}5$ подчиняется распределению *Su*-Джонсона с параметрами $\theta_0 = -2{,}4027$; $\theta_1 = 1{,}3861$; $\theta_2 = 0{,}3389$; $\theta_3 = 0{,}2290$. При найденном значении статистики по данному распределению *Su*-Джонсона определяем, что вероятность $P\{S_m > S_m^*\}$>0,5031.

В) Критерий типа ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.2.5.3 вычисляем значение статистики типа ω^2 Мизеса по формуле (16): $S_\omega^* = 0{,}0561$. Из приложения А.25 определяем, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметров формы и масштаба гамма-распределения при $\theta_0 = 0{,}5$ подчиняется распределению *Su*-

Джонсона с параметрами $\theta_0 = -1{,}5811$; $\theta_1 = 1{,}1193$; $\theta_2 = 0{,}0164$; $\theta_3 = 0{,}0243$. При найденном значении статистики по данному распределению *Su*-Джонсона определяем, что вероятность $P\{S_\omega > S_\omega^*\}$>0,4985.

Г) Критерий типа Ω^2 Мизеса

В соответствии с п.2.2.5.4 вычисляем значение статистики Ω^2 Мизеса по формуле (16): $S_\Omega^* = 0{,}3746$. Из приложения А.27 определяем, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметров формы и масштаба гамма-распределения при $\theta_0 = 0{,}5$ подчиняется распределению *Su*-Джонсона с параметрами $\theta_0 = -2{,}6917$; $\theta_1 = 1{,}6334$; $\theta_2 = 0{,}0970$; $\theta_3 = 0{,}1067$. При найденном значении статистики по данному распределению *Su*-Джонсона определяем, что вероятность $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\}$>0,4400.

Таким образом, по всем критериям выборка хорошо согласуется с гамма-распределением и проверяемая гипотеза должна быть принята.

Литература

1. *Денисов В.И., Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим: Методические рекомендации. Часть I. Критерии типа χ^2. – Новосибирск: Изд–во НГТУ, 1998. – С. 126.
2. *Kolmogoroff A.N.* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. // G. Ist. Ital. attuar., – 1933. – Vol. 4., – № 1. – P. 83-91.
3. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
4. *Anderson T.W., Darling D.A.* Asymptotic theory of certain “Goodness of fit” criteria based on stochastic processes. – AMS, 1952, 23. – P. 193-212.
5. *Орлов А.И.* Распространенная ошибка при использовании критериев Колмогорова и омега–квадрат // Заводская лаборатория. – 1985. – Т. 51. – №1. – С. 60-62.
6. *Бондарев Б.В.* О проверке сложных статистических гипотез // Заводская лаборатория. – 1986. – Т. 52. – № 10. – С. 62-63.
7. *Кулинская Е.В., Саввушкина Н.Е.* О некоторых ошибках в реализации и применении непараметрических методов в пакете для IBM PC // Заводская лаборатория. – 1990. – Т. 56. – № 5. – С. 96-99.
8. *Kac M., Kiefer J., Wolfowitz J.* On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods // Ann. Math. Stat. – 1955. – V.26. – P.189-211.
9. *Durbin J.* Kolmogoriv–Smirnov test when parameters are estimated // Lect. Notes Math. – 1976. – V. 566. – P. 33–44.
10. *Мартынов Г.В.* Критерии омега–квадрат. – М.: Наука, 1978. – 80 с.
11. *Pearson E.S., Hartley H.O.* Biometrica tables for Statistics. V.2. – Cambridge: University Press, 1972. – 634 p.

12. *Stephens M.A.* Use of Kolmogorov–Smirnov, Cramer – von Mises and related statistics – vithout extensive table // J. R. Stat. Soc. – 1970. – B. 32. – P. 115-122.
13. *Stephens M.A.* EDF statistics for goodness of fit and some comparisons // J. Am. Statist. Assoc. – 1974. – V.69. – P. 730-737.
14. *Chandra M., Singpurwalla N.D., Stephens M.A.* Statistics for Test of Fit for the Extrem–Value and Weibull Distribution // J. Am. Statist. Assoc. – 1981. – V.76. – P. 375.
15. *Тюрин Ю.Н.* О предельном распределении статистик Колмогорова–Смирнова для сложной гипотезы // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1984. – Т. 48. – № 6. – С. 1314-1343.
16. *Тюрин Ю.Н., Саввушкина Н.Е.* Критерии согласия для распределения Вейбулла–Гнеденко. // Изв. АН СССР. Сер. Техн. Кибернетика. – 1984. – № 3. – С. 109-112.
17. *Тюрин Ю.Н.* Исследования по непараметрической статистике (непараметрические методы и линейная модель): Автореф. дисс. … д–ра физ.–мат. наук. – М., 1985. – 33 с. – (МГУ).
18. *Саввушкина Н.Е.* Критерий Колмогорова–Смирнова для логистического и гамма–распределения // Сб. тр. ВНИИ систем. исслед. – 1990, № 8.
19. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.* Анализ данных на компьютере. // М.: ИНФРА–М, Финансы и статистика, 1995. – 384 с.
20. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* Прикладные аспекты использования критериев согласия в случае проверки сложных гипотез // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 11. – С. 3-17.
21. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* О распределениях статистик непараметрических критериев согласия при оценивании по выборкам параметров наблюдаемых законов // Заводская лаборатория. – 1998. – Т. 64. – № 3. – С. 61-72.
22. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* Исследование допредельных распределений статистик критериев согласия при проверке сложных гипотез // Тр. IV международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения”. – Новосибирск. – 1998. – Т. 3. – С. 12-16.
23. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* О зависимости предельных распределений статистик χ^2 Пирсона и отношения правдоподобия от способа группирования данных // Заводская лаборатория. – 1998. – Т. 64. – № 5. – С.56-63.
24. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* Статистический анализ одномерных наблюдений по частично группированным данным // Изв. вузов. Физика. – Томск. – 1995. – № 9. – С. 39–45.
25. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* Статистический анализ смесей распределений по частично группированным данным // Сб. научных трудов НГТУ. – Новосибирск: Изд–во НГТУ. – 1995. – №1. – С. 25-31.
26. *Орлов А.И.* Методы оценки близости допредельных и предельных распределений статистик // Заводская лаборатория. – 1998. – Т. 64. – № 5. – С. 64-67.
27. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование. – М.: Наука,

1982. – 296 с.
28. *Орлов А.И.* Неустойчивость параметрических методов отбраковки резко выделяющихся наблюдений // Заводская лаборатория. – 1992. – Т. 58. – № 7. – С. 40-42.
29. *Денисов В.И., Лемешко Б.Ю., Цой Е.Б.* Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов: В 2 ч. / Новосиб. гос. техн. ун–т. – Новосибирск, 1993. – 346 с.
30. *Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.* Вопросы обработки выборок одномерных случайных величин // Научный вестник НГТУ. – Новосибирск, 1996. – № 2. – С. 3-24.
31. *Лемешко Б.Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений – это обеспечение максимальной мощности критериев // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 8. – С. 3–14.
32. *Лемешко Б.Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия // Заводская лаборатория. – 1998. – Т. 64. – №1. – С. 56-64.
33. *Rao C.R.* Criteria of estimation in large samples // – Sankhua, 1962. – V. 25. – P. 189-206.
34. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применения. – М.: Наука, 1968. – 548 с.
35. *Губарев В.В.* Вероятностные модели: Справочник. В 2–х ч. / Новосиб. электротехн. ин–т. – Новосибирск, 1992. – 422 с.

Приложение А
(рекомендуемое)

ТАБЛИЦЫ

РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ПРИ ПРОСТЫХ И СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗАХ

Таблица А.1

Функция распределения статистики Колмогорова $K(S)$ при проверке простой гипотезы										
S	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,2	0,000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000004
0,3	0,000009	000021	000046	000091	000171	000303	000511	000826	001285	001929
0,4	0,002808	003972	005476	007377	009730	012589	016005	020022	024682	030017
0,5	0,036055	042814	050306	058534	067497	077183	087577	098656	110394	122760
0,6	0,135718	149229	163255	177752	192677	207987	223637	239582	255780	272188
0,7	0,288765	305471	322265	339114	355981	372833	389640	406372	423002	439505
0,8	0,455858	472039	488028	503809	519365	534682	549745	564545	579071	593315
0,9	0,607269	620928	634285	647337	660081	672515	684836	696445	707941	719126
1,0	0,730000	740566	750825	760781	770436	779794	788860	797637	806130	814343
1,1	0,822282	829951	837356	844502	851395	858040	864443	870610	876546	882258
1,2	0,887750	893030	898102	903973	907648	912134	916435	920557	924506	928288
1,3	0,931908	935371	938682	941847	944871	947758	950514	953144	955651	958041
1,4	0,960318	962487	964551	966515	968383	970159	971846	973448	974969	976413
1,5	0,977782	979080	980310	981475	982579	983623	984610	985544	986427	987261
1,6	0,988048	988791	989492	990154	990777	991364	991917	992438	992928	993389
1,7	0,993823	994230	994612	994972	995309	995625	995922	996200	996460	996704
1,8	0,996932	997146	997346	997533	997707	997870	998023	998165	998297	998421
1,9	0,998536	998644	998744	998837	998924	999004	999079	999149	999213	999273
2,0	0,999329	999381	999429	999473	999514	999553	999588	999620	999651	999679
2,1	0,999705	999728	999750	999771	999790	999807	999823	999837	999851	999863
2,2	0,999874	999886	999895	999904	999912	999920	999927	999933	999939	999944
2,3	0,999949	999954	999958	999961	999965	999968	999971	999974	999976	999978
2,4	0,999980	999982	999984	999985	999987	999988	999989	999990	999991	999992

Таблица А.2

Процентные точки распределения статистики Колмогорова при проверке простой гипотезы					
Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
$K(S)$	1,1379	1,2238	1,3581	1,4802	1,6276

Таблица А.3

Функция распределения статистики ω^2 Мизеса $a1(S)$ при проверке простой гипотезы										
S	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,00000	00001	00300	02568	06685	12372	18602	24844	30815	36386
0,1	0,41513	46196	50457	54329	57846	61042	63951	66600	69019	71229
0,2	0,73253	75109	76814	78383	79829	81163	82396	83536	84593	85573
0,3	0,86483	87329	88115	88848	89531	90167	90762	91317	91836	92321
0,4	0,92775	93201	93599	93972	94323	94651	94960	95249	95521	95777
0,5	0,96017	96242	96455	96655	96843	97020	97186	97343	97491	97630
0,6	0,97762	97886	98002	98112	98216	98314	98406	98493	98575	98653
0,7	0,98726	98795	98861	98922	98981	99036	99088	99137	99183	99227
0,8	0,99268	99308	99345	99380	99413	99444	99474	99502	99528	99553
0,9	0,99577	99599	99621	99641	99660	99678	99695	99711	99726	99740
1,0	0,99754	99764	99776	99787	99799	99812	99820	99828	99837	99847
1,1	0,99856	99862	99869	99876	99883	99890	99895	99900	99905	99910
1,2	0,99916	99919	99923	99927	99931	99935	99938	99941	99944	99947
1,3	0,99950	99953	99955	99957	99959	99962	99964	99965	99967	99969
1,4	0,99971	99972	99973	99975	99976	99978	99978	99979	99980	99980

Таблица А.4

Процентные точки распределения статистики ω^2 Мизеса при проверке простой гипотезы					
Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
$a1(S)$	0,2841	0,3473	0,4614	0,5806	0,7434

Таблица А.5

Функция распределения статистики Ω^2 Мизеса (Андерсона-Дарлинга) $a2(S)$ при проверке простой гипотезы										
S	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00001
0,1	0,00003	00008	00020	00043	00081	00141	00228	00349	00508	00710
0,2	0,00959	01256	01605	02005	02457	02961	03514	04115	04762	05453
0,3	0,06184	06954	07759	08596	09463	10356	11273	12211	13168	14140
0,4	0,15127	16124	17132	18146	19166	20190	21217	22244	23271	24296
0,5	0,25319	26337	27351	28359	29360	30355	31342	32320	33290	34250
0,6	0,35200	36141	37071	37991	38900	39798	40684	41560	42424	43277
0,7	0,44118	44947	45765	46572	47367	48150	48922	49683	50432	51170
0,8	0,51897	52613	53318	54012	54695	55368	56030	56682	57324	57956
0,9	0,58577	59189	59791	60383	60966	61540	62104	62660	63206	63744
1,0	0,64273	64794	65306	65811	66307	66795	67275	67748	68213	68670
1,1	0,69120	69563	69999	70428	70851	71266	71675	72077	72473	72863
1,2	0,73247	73624	73996	74361	74721	75075	75424	75767	76105	76438
1,3	0,76765	77088	77405	77717	78025	78328	78626	78919	79209	79493
1,4	0,79773	80049	80321	80589	80852	81112	81368	81620	81868	82112
1,5	0,82352	82589	82823	83053	83279	83503	83723	83939	84153	84363
1,6	0,84570	84774	84975	85173	85369	85561	85751	85938	86122	86303
1,7	0,86482	86659	86832	87004	87173	87339	87503	87665	87824	87981
1,8	0,88136	88289	88439	88588	88734	88878	89021	89161	89299	89435
1,9	0,89570	89703	89833	89962	90089	90215	90338	90460	90581	90699
2,0	0,90816	90932	91046	91158	91269	91378	91486	91592	91697	91800
2,1	0,91902	92003	92102	92200	92297	92392	92486	92579	92671	92761

Продолжение таблицы А.5

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,2	0,92851	92939	93025	93111	93196	93279	93361	93443	93523	93602
2,3	0,93680	93757	93833	93908	93983	94056	94128	94199	94269	94339
2,4	0,94407	94475	94542	94608	94673	94737	94800	94863	94925	94986
2,5	0,95046	95105	95164	95222	95279	95336	95391	95446	95501	95554
2,6	0,95607	95660	95711	95762	95813	95862	95912	95960	96008	96055
2,7	0,96102	96148	96194	96239	96283	96327	96370	96413	96455	96497
2,8	0,96538	96579	96619	96659	96698	96737	96775	96813	96850	96887
2,9	0,96923	96959	96995	97030	97064	97099	97132	97166	97199	97231
3,0	0,97263	97295	97327	97358	97388	97419	97449	97478	97507	97536
3,1	0,97565	97593	97621	97648	97675	97702	97729	97755	97781	97806
3,2	0,97831	97856	97881	97905	97929	97953	97977	98000	98023	98046
3,3	0,98068	98090	98112	98134	98155	98176	98197	98217	98238	98258
3,4	0,98278	98297	98317	98336	98355	98374	98392	98410	98429	98447
3,5	0,98464	98482	98499	98516	98533	98549	98566	98582	98598	98614
3,6	0,98630	98645	98660	98676	98691	98705	98720	98734	98749	98763
3,7	0,98777	98791	98804	98818	98831	98844	98857	98870	98883	98895
3,8	0,98908	98920	98932	98944	98956	98968	98979	98991	99002	99013
3,9	0,99024	99035	99046	99057	99067	99078	99088	99098	99108	99118
4,0	0,99128	99221	99303	99377	99442	99501	99553	99600	99642	99679
5,0	0,99713	99742	99769	99793	99814	99834	99851	99866	99880	99892
6,0	0,99903	99913	99922	99930	99937	99944	99949	99954	99959	99963
7,0	0,99967	99970	99973	99976	99978	99981	99983	99984	99986	99987
8,0	0,99989	99990	99991	99992	99993	99993	99994	99995	99995	99996
9,0	0,99996									

Таблица А.6

Процентные точки распределения статистики Ω^2 Мизеса (Андерсона-Дарлинга) при проверке простой гипотезы					
Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
$a2(S)$	1,6212	1,9330	2,4924	3,0775	3,8781

Таблица А.7

Аппроксимация предельных распределений статистики Колмогорова при использовании метода максимального правдоподобия				
№ п/п	Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
1	Экспоненциальное	lnN(-0,3422; 0,2545)		
2	Полунормальное	γ(4,1332; 0,1076; 0,3205)		
3	Рэлея	lnN(-0,3388; 0,2621)		
4	Максвелла	lnN(-0,3461; 0,2579)		
5	Лапласа	γ(4,0038; 0,1269; 0,3163)	γ(4,6474; 0,0870; 0,3091) lnN(-0,3690; 0,2499)	γ(4,4525; 0,0761; 0,3252) lnN(-0,4358; 0,2276)
6	Нормальное	γ (4,1492; 0,1259; 0,3142)	lnN(-0,4138; 0,2289)	γ(4,9014; 0,0691; 0,2951) lnN(-0,4825; 0,2296)
7	Логнормальное	γ(4,3376; 0,1265; 0,2890)	Su(-2,0328; 2,3642; 0,2622; 0,4072)	Su(-1,8093; 1,9041; 0,1861; 0,4174)
8	Коши	Su(-3,3278; 2,2529; 0,2185; 0,2858)	γ(4,8247; 0,0874; 0,2935)	lnN(-0,5302; 0,2427)
9	Логистическое	γ(3,5345; 0,1385; 0,339)	Su(-2,8534; 3,0657; 0,2872; 0,3199)	lnN(-0,5611; 0,2082)
10	Наибольшего значения	γ(3,4689; 0,1384; 0,3543)	γ(4,1008; 0,0997; 0,3269)	γ(4,9738; 0,0660; 0,3049)
11	Наименьшего значения	γ(3,4689; 0,1384; 0,3543)	γ(4,1008; 0,0997; 0,3269)	γ(4,9738; 0,0660; 0,3049)
12	Вейбулла	γ(3,4689; 0,1384; 0,3543) **	γ(4,1008; 0,0997; 0,3269) *	γ(4,9738; 0,0660; 0,3049)

** - оценивался параметр формы распределения Вейбулла;

* - оценивался параметр масштаба распределения Вейбулла.

Таблица А.8

Процентные точки распределения статистики Колмогорова при использовании метода максимального правдоподобия							
№ п/п	Распределение случайной величины	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
1	Экспоненциальное	масштабный	0,9246	0,9841	1,0794	1,1695	1,2838
2	Полунормальное	масштабный	0,9857	1,0584	1,1752	1,2853	1,4241
3	Рэлея	масштабный	0,9338	0,9954	1,0944	1,1881	1,3072
4	Максвелла	масштабный	0,9242	0,9845	1,0812	1,1728	1,2890
5	Лапласа	масштабный	1,0800	1,1647	1,3009	1,4296	1,5918
		сдвиг	0,9015	0,9612	1,0547	1,1426	1,2538
		два параметра	0,8216	0,8710	0,9497	1,0248	1,1206
6	Нормальное	масштабный	1,0951	1,1803	1,3171	1,4462	1,6087
		сдвиг	0,8381	0,8865	0,9634	1,0354	1,1260
		два параметра	0,7895	0,8333	0,9042	0,9723	1,0599
7	Логнормальное	масштабный	1,1037	1,1907	1,3303	1,4618	1,6272
		сдвиг	0,8516	0,9076	1,0006	1,0927	1,2151
		два параметра	0,8113	0,8708	0,9731	1,0782	1,2234
8	Коши	масштабный	1,0281	1,1169	1,2669	1,4176	1,6209
		сдвиг	0,9096	0,9722	1,0723	1,1663	1,2842
		два параметра	0,7568	0,8032	0,8772	0,9469	1,0350
9	Логистическое	масштабный	1,0895	1,1777	1,3201	1,4552	1,6262
		сдвиг	0,7903	0,8359	0,9096	0,9803	1,0713
		два параметра	0,7080	0,7451	0,8036	0,8581	0,9261
10	Наибольшего значения	масштабный	1,0925	1,1800	1,3215	1,4557	1,6257
		сдвиг	0,9391	1,0062	1,1141	1,2159	1,3442
		два параметра	0,7825	0,8304	0,9069	0,9786	1,0684
11	Наименьшего значения	масштабный	1,0925	1,1800	1,3215	1,4557	1,6257
		сдвиг	0,9391	1,0062	1,1141	1,2159	1,3442
		два параметра	0,7825	0,8304	0,9069	0,9786	1,0684
12	Вейбулла	формы	1,0925	1,1800	1,3215	1,4557	1,6257
		масштаба	0,9391	1,0062	1,1141	1,2159	1,3442
		два параметра	0,7825	0,8304	0,9069	0,9786	1,0684

Таблица А.9

Аппроксимация предельных распределений минимума статистики Колмогорова (при использовании MD-оценок, минимизирующих статистику S_K)				
№ п/п	Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
1	Экспоненциальное	γ(4,4983; 0,0621; 0,2891)		
2	Полунормальное	γ(4,2884; 0,0705; 0,3072)		
3	Рэлея	γ(4,8579; 0,0639; 0,2900)		
4	Максвелла	γ(5,3106; 0,0581; 0,2865)		
5	Лапласа	γ(3,0431; 0,1355; 0,3182)	γ(5,0103; 0,0602; 0,2968) lnN(-0,5358; 0,2122)	Su(-2,1079; 2,4629; 0,1661; 0,3340) lnN(-0,6970; 0,1952)
6	Нормальное	γ(3,2458; 0,1343; 0,3072)	lnN(-0,5469; 0,2152)	lnN(-0,7236; 0,1837)
7	Логнормальное	γ(3,2458; 0,1343; 0,3072)	lnN(-0,5469; 0,2152)	lnN(-0,7236; 0,1837)
8	Коши	γ(3,4398; 0,1255; 0,3022)	lnN(-0,5182; 0,2268)	Su(-1,6929; 2,5234; 0,1892; 0,3607) lnN(-0,6946; 0,1938)
9	Логистическое	Su(-2,6522; 1,8288; 0,1738; 0,3384) γ(3,6342; 0,1284; 0,2772)	Su(-3,8497; 3,2770; 0,2136; 0,2607) lnN(-0,5511; 0,2045)	lnN(-0,7389; 0,1771) Su(-2,5093; 3,1277; 0,1932; 0,3041)
10	Наибольшего значения	γ(3,5424; 0,1203; 0,2975)	Su(-1,9028; 2,3972; 0,2227; 0,389)	Su(-1,3144; 2,2480; 0,1616;0,3858) lnN(-0,7174; 0,1841)
11	Наименьшего значения	γ(3,5424; 0,1203; 0,2975)	Su(-1,9028; 2,3972; 0,2227; 0,389)	Su(-1,3144; 2,2480; 0,1616;0,3858) lnN(-0,7174; 0,1841)
12	Вейбулла	γ(3,5424; 0,1203; 0,2975) **	Su(-1,9028; 2,3972; 0,2227; 0,389) *	Su(-1,3144; 2,2480; 0,1616;0,3858) lnN(-0,7174; 0,1841)

** - оценивался параметр формы распределения Вейбулла;

* - оценивался параметр масштаба распределения Вейбулла.

Таблица А.10

Процентные точки распределения минимума статистики Колмогорова (при использовании MD-оценок, минимизирующих статистику $S_К$)							
№ п/п	Распределение случайной величины	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
1	Экспоненциальное	масштабный	0,7016	0,7449	0,8143	0,8796	0,9617
2	Полунормальное	масштабный	0,7569	0,8052	0,8826	0,9557	1,0476
3	Рэлея	масштабный	0,7429	0,7888	0,8622	0,9310	1,0174
4	Максвелла	масштабный	0,7308	0,7740	0,8429	0,9073	0,9879
5	Лапласа	масштабный	0,9660	1,0477	1,1803	1,3067	1,4674
		сдвиг	0,7353	0,7791	0,8490	0,9145	0,9967
		два параметра	0,6085	0,6419	0,6970	0,7512	0,8229
6	Нормальное	масштабный	0,9847	1,0676	1,2018	1,3295	1,4915
		сдвиг	0,7234	0,7625	0,8245	0,8824	0,9548
		два параметра	0,5867	0,6137	0,6561	0,6952	0,7436
7	***Логнормальное***	масштабный	0,9847	1,0676	1,2018	1,3295	1,4915
		сдвиг	0,7234	0,7625	0,8245	0,8824	0,9548
		два параметра	0,5867	0,6137	0,6561	0,6952	0,7436
8	Коши	масштабный	0,9669	1,0460	1,1739	1,2953	1,4491
		сдвиг	0,7534	0,7965	0,8649	0,9290	1,0095
		два параметра	0,6076	0,6391	0,6906	0,7408	0,8067
9	Логистическое	масштабный	0,9971	1,0807	1,2336	1,3532	1,4876
		сдвиг	0,7110	0,7496	0,8119	0,8714	0,9477
		два параметра	0,5739	0,5993	0,6392	0,6758	0,7212
10	Наибольшего значения	масштабный	0,9505	1,0272	1,1510	1,2684	1,4170
		сдвиг	0,7358	0,7798	0,8528	0,9246	1,0199
		два параметра	0,5874	0,6168	0,6656	0,7138	0,7780
11	Наименьшего значения	масштабный	0,9505	1,0272	1,1510	1,2684	1,4170
		сдвиг	0,7358	0,7798	0,8528	0,9246	1,0199
		два параметра	0,5874	0,6168	0,6656	0,7138	0,7780
12	Вейбулла	формы	0,9505	1,0272	1,1510	1,2684	1,4170
		масштаба	0,7358	0,7798	0,8528	0,9246	1,0199
		два параметра	0,5874	0,6168	0,6656	0,7138	0,7780

Таблица А.11

Аппроксимация предельных распределений статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия				
№ п/п	Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
1	Экспоненциальное	lnN(0,2260; 0,6951)		
2	Полунормальное	lnN(0,2050; 0,7718)		
3	Рэлея	lnN(0,2248; 0,7248)		
4	Максвелла	lnN(0,2462; 0,6779)		
5	Лапласа	γ(0, 8539; 1,9952; 0,0000)	γ(1,7941; 0,8324; 0,0149)	γ(1,7071; ,7234; 0,0170)
6	Нормальное	γ(0,8700; 2,0786; 0,0004)	γ(2,6428; 0,5089; 0,2056) lnN(0,2992; 0,5298)	lnN(0,1164; 0,5436)
7	Логнормальное	γ(0,8231; 2,1973; 0,0001)	Su(-2,5588; 1,6251; 0,4763; 0,2134)	Su(-2,2909; 1,3491; 0,3115; 0,3134)
8	Коши	γ(0,8839; 1,7507; 0,0019)	γ(1,4108;1,0209; 0,0004)	γ(1,3546; 0,7565; 0,0005)
9	Логистическое	γ(0,8376; 2,1815; 0,0001)	Su(-2,9441; 1,7404; 0,3783; 0,3082)	lnN(0,0831; 0,4473)
10	Наибольшего значения	γ(0,8856; 2,0700; 0,0002)	lnN(0,2414; 0,7017)	lnN(0,1501; 0,5108)
11	Наименьшего значения	γ(0,8856; 0,4831; 0,0002)	lnN(0,2414; 0,7017)	lnN(0,1501; 0,5108)
12	Вейбулла	γ(0,8856; 0,4831; 0,0002) **	lnN(0,2414; 0,7017) *	lnN(0,1501; 0,5108)

** - оценивался параметр формы распределения Вейбулла;

* - оценивался параметр масштаба распределения Вейбулла.

Таблица А.12

Процентные точки распределения статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия							
№ п/п	Распределение случайной величины	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
1	Экспоненциальное	масштабный	2,5765	3,0551	3,9327	4,8958	6,3157
2	Полунормальное	масштабный	2,7317	3,3006	4,3688	5,5717	7,3926
3	Рэлея	масштабный	2,6538	3,1698	4,1247	5,1830	6,7594
4	Максвелла	масштабный	2,5826	3,0495	3,9011	4,8301	6,1918
5	Лапласа	масштабный	3,3122	4,0778	5,3989	6,7310	8,5032
		сдвиг	2,5343	2,9829	3,8007	4,6556	5,8229
		два параметра	2,1134	2,4340	3,0160	3,6227	4,4495
6	Нормальное	масштабный	3,5063	4,3091	5,6929	7,0868	8,9396
		сдвиг	2,3656	2,6880	3,2205	3,7406	4,4163
		два параметра	1,9860	2,2855	2,8102	3,3438	4,0581
7	Логнормальное	масштабный	3,5354	4,3677	5,8074	7,2619	9,1998
		сдвиг	2,3633	2,7212	3,3595	4,0397	5,0141
		два параметра	2,1348	2,5025	3,1850	3,9446	5,0813
8	Коши	масштабный	2,9947	3,6746	4,8455	6,0239	7,5894
		сдвиг	2,5803	3,0471	3,8305	4,6011	5,6065
		два параметра	1,8488	2,1898	2,7633	3,3284	4,0668
9	Логистическое	масштабный	3,5929	4,4877	6,0215	7,2637	8,7397
		сдвиг	2,1515	2,4357	2,9366	3,4632	4,2073
		два параметра	1,7275	1,9277	2,2679	2,6112	3,0761
10	Наибольшего значения	масштабный	3,5448	4,3493	5,7346	7,1286	8,9804
		сдвиг	2,5565	3,0364	3,9180	4,8877	6,3205
		два параметра	1,9729	2,2361	2,692	3,1621	3,8129
11	Наименьшего значения	масштабный	3,5448	4,3493	5,7346	7,1286	8,9804
		сдвиг	2,5565	3,0364	3,9180	4,8877	6,3205
		два параметра	1,9729	2,2361	2,692	3,1621	3,8129
12	Вейбулла	формы	3,5448	4,3493	5,7346	7,1286	8,9804
		масштаба	2,5565	3,0364	3,9180	4,8877	6,3205
		два параметра	1,9729	2,2361	2,692	3,1621	3,8129

Таблица А.13

№ п/п	Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Аппроксимация предельных распределений статистики ω^2 Мизеса при использовании метода максимального правдоподобия				
1	Экспоненциальное	Su(-1,8734; 1,2118; 0,0223; 0,0240)		
2	Полунормальное	Sl(0,9735; 1,1966; 0,1531; 0,0116)		
3	Рэлея	Su(-1,5302; 1,0371; 0,0202; 0,0299)		
4	Максвелла	Su(-2,0089; 1,2557; 0,0213; 0,0213)		
5	Лапласа	Sl(1, 0274; 1, 0675; 0,2305; 0,0120)	Su(-2,0821; 1,2979; 0,0196; 0,0200)	Su(-1,6085; 1,2139; 0,0171; 0,0247)
6	Нормальное	Sl(1,2532; 1,0088; 0,3066; 0,0130)	lnN(-2,7500; 0,5649)	lnN(-2,9794; 0,5330)
7	Логнормальное	Sl(1,0341; 1,1919; 0,2491; 0,0035)	lnN(-2,7271; 0,6092)	Su(-1,6292; 1,1541; 0,0144; 0,0234)
8	Коши	Sl(1,0341; 1,1137; 0,2313; 0,0041)	Sl(1,1230; 1,2964; 0,1383; 0,0105)	Sl(1,2420; 1,2833; 0,1135; 0,0064)
9	Логистическое	Sl(1,0289; 1,0666; 0,2385; 0,0110)	Sl(1,3982; 1,3804; 0,1205; 0,0102)	lnN(-3,1416; 0,4989)
10	Наибольшего значения	Sl(1,0294; 1,0781; 0,2381; 0,0120)	lnN(-2,5818; 0,6410)	lnN(-2,9541; 0,5379)
11	Наименьшего значения	Sl(1,0294; 1,0781; 0,2381; 0,0120)	lnN(-2,5818; 0,6410)	lnN(-2,9541; 0,5379)
12	Вейбулла	Sl(1,0294; 1,0781; 0,2381; 0,0120) **	lnN(-2,5818; 0,6410) *	lnN(-2,9541; 0,5379)

** - оценивался параметр формы распределения Вейбулла;

* - оценивался параметр масштаба распределения Вейбулла.

Таблица А.14

Процентные точки распределения статистики ω^2 Мизеса при использовании метода максимального правдоподобия							
№ п/п	Распределение случайной величины	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
1	Экспоненциальное	масштабный	0,1461	0,1738	0,2267	0,2872	0,3804
2	Полунормальное	масштабный	0,1730	0,2097	0,2799	0,3607	0,4858
3	***Рэлея***	масштабный	0,1490	0,1812	0,2452	0,3219	0,4458
4	Максвелла	масштабный	0,1408	0,1669	0,2162	0,2720	0,3573
5	Лапласа	масштабный	0,2672	0,3447	0,4572	0,5570	0,6608
		сдвиг	0,1276	0,1504	0,1932	0,2418	0,3173
		два параметра	0,0998	0,1171	0,1504	0,1893	0,2529
6	Нормальное	масштабный	0,2470	0,3035	0,4128	0,5397	0,7382
		сдвиг	0,1148	0,1319	0,1619	0,1934	0,2379
		два параметра	0,0883	0,1006	0,1221	0,1445	0,1756
7	Логнормальное	масштабный	0,2531	0,3101	0,4193	0,5452	0,7401
		сдвиг	0,1230	0,1428	0,1782	0,2159	0,2699
		два параметра	0,0952	0,1125	0,1458	0,1845	0,2449
8	Коши	масштабный	0,2359	0,2929	0,4044	0,5353	0,7422
		сдвиг	0,1399	0,1668	0,2173	0,2743	0,3604
		два параметра	0,1031	0,1235	0,1618	0,2050	0,2706
9	Логистическое	масштабный	0,2612	0,3257	0,4368	0,5392	0,7617
		сдвиг	0,1029	0,1209	0,1543	0,1912	0,2462
		два параметра	0,0725	0,0819	0,0982	0,1149	0,1379
10	Наибольшего значения	масштабный	0,2628	0,3226	0,4266	0,5461	0,7174
		сдвиг	0,1470	0,1720	0,2171	0,2657	0,3360
		два параметра	0,0910	0,1039	0,1263	0,1496	0,1822
11	Наименьшего значения	масштабный	0,2628	0,3226	0,4266	0,5461	0,7174
		сдвиг	0,1470	0,1720	0,2171	0,2657	0,3360
		два параметра	0,0910	0,1039	0,1263	0,1496	0,1822
12	Вейбулла	формы	0,2628	0,3226	0,4266	0,5461	0,7174
		масштаба	0,1470	0,1720	0,2171	0,2657	0,3360
		два параметра	0,0910	0,1039	0,1263	0,1496	0,1822

Таблица А.15

Аппроксимация предельных распределений минимума статистики ω^2 Мизеса (при использовании MD-оценок, минимизирующих статистику S_ω)				
№ п/п	Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
1	Экспоненциальное	Su(-1,9324; 1,1610; 0,0134; 0,0203)		
2	Полунормальное	Su(-1,5024; 1,0991; 0,0173; 0,0256)		
3	Рэлея	Su(-1,4705; 1,1006; 0,0164; 0,0259)		
4	Максвелла	Su(-1,7706; 1,2978; 0,0188; 0,0220)		
5	Лапласа	Sl(1,0117; 0,9485; 0,2162; 0,0137)	lnN(-2,8601; 0,5471)	lnN(-3,2853; 0,4666)
6	Нормальное	Sl(1,0477; 0,9883; 0,2356; 0,0112)	lnN(-2,8649; 0,5668)	lnN(-3,2715; 0,4645)
7	Логнормальное	Sl(1,0477; 0,9883; 0,2356; 0,0112)	lnN(-2,8649; 0,5668)	lnN(-3,2715; 0,4645)
8	Коши	Sl(1,2759; 1,0437; 0,2825; 0,0089)	lnN(-2,8577; 0,5739)	lnN(-3,2603; 0,4874)
9	Логистическое	Sl(1,0898; 1,0225; 0,2399; 0,0096)	lnN(-2,8831; 0,5367)	lnN(-3,2915; 0,4592)
10	Наибольшего значения	Sl(1,0771; 1,0388; 0,2065; 0,0109)	Su(-1,5348; 1,1226; 0,0166; 0,0252)	Su(-1,5326; 1,4446; 0,0147; 0,0188) lnN(-3,2627; 0,4680)
11	Наименьшего значения	Sl(1,0771; 1,0388; 0,2065; 0,0109)	Su(-1,5348; 1,1226; 0,0166; 0,0252)	Su(-1,5326; 1,4446; 0,0147; 0,0188) lnN(-3,2627; 0,4680)
12	Вейбулла	Sl(1,0771; 1,0388; 0,2065; 0,0109) **	Su(-1,5348; 1,1226; 0,0166; 0,0252) *	Su(-1,5326; 1,4446; 0,0147; 0,0188) lnN(-3,2627; 0,4680)

** - оценивался параметр формы распределения Вейбулла;

* - оценивался параметр масштаба распределения Вейбулла.

Таблица А.16

Процентные точки распределения минимума статистики ω^2 Мизеса (при использовании MD-оценок, минимизирующих статистику S_ω)

№ п/п	Распределение случайной величины	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
1	Экспоненциальное	масштабный	0,1062	0,1266	0,1659	0,2115	0,2826
2	Полунормальное	масштабный	0,1119	0,1338	0,1767	0,2271	0,3071
3	Рэлея	масштабный	0,1051	0,1252	0,1645	0,2107	0,2839
4	Максвелла	масштабный	0,1027	0,1198	0,1520	0,1880	0,2425
5	Лапласа	масштабный	0,2471	0,2994	0,4079	0,5035	0,6253
		сдвиг	0,1010	0,1154	0,1408	0,1673	0,2045
		два параметра	0,0607	0,0681	0,0806	0,0934	0,1108
6	Нормальное	масштабный	0,2558	0,3120	0,4253	0,5524	0,6935
		сдвиг	0,1025	0,1178	0,1448	0,1731	0,2130
		два параметра	0,0614	0,0688	0,0815	0,0943	0,1118
7	***Логнормальное***	масштабный	0,2558	0,3120	0,4253	0,5524	0,6935
		сдвиг	0,1025	0,1178	0,1448	0,1731	0,2130
		два параметра	0,0614	0,0688	0,0815	0,0943	0,1118
8	Коши	масштабный	0,2376	0,2950	0,3924	0,5001	0,6886
		сдвиг	0,1040	0,1198	0,1475	0,1768	0,2181
		два параметра	0,0636	0,0717	0,0856	0,0998	0,1193
9	Логистическое	масштабный	0,22605	0,3302	0,4450	0,57715	0,6941
		сдвиг	0,0976	0,1113	0,1353	0,1602	0,1950
		два параметра	0,0599	0,0670	0,0792	0,0915	0,1083
10	Наибольшего значения	масштабный	0,2095	0,2623	0,3676	0,4940	0,6983
		сдвиг	0,1064	0,1265	0,1657	0,2115	0,2836
		два параметра	0,0611	0,0693	0,0843	0,1006	0,1246
11	Наименьшего значения	масштабный	0,2095	0,2623	0,3676	0,4940	0,6983
		сдвиг	0,1064	0,1265	0,1657	0,2115	0,2836
		два параметра	0,0611	0,0693	0,0843	0,1006	0,1246
12	Вейбулла	формы	0,2095	0,2623	0,3676	0,4940	0,6983
		масштаба	0,1064	0,1265	0,1657	0,2115	0,2836
		два параметра	0,0611	0,0693	0,0843	0,1006	0,1246

Таблица А.17

Аппроксимация предельных распределений статистики Ω^2 Мизеса при использовании метода максимального правдоподобия				
№ п/п	Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
1	Экспоненциальное	Su(-2,8653; 1,4220; 0,1050; 0,1128)		
2	Полунормальное	Su(-2,5603; 1,3116; 0,1147; 0,1330)		
3	Рэлея	Su(-2,5610; 1,4003; 0,1174; 0,1337)		
4	Максвелла	Su(-2,6064; 1,4426; 0,1190; 0,1285)		
5	Лапласа	Sl(0, 3224; 1,1638; 0,6852; 0,1040)	Su(-2,5528; 1,4006; 0,1216; 0,1358)	Su(-2,8942; 1,4897; 0,0846; 0,1131)
6	Нормальное	Su(-3,1163; 1,1787; 0,0742; 0,1200)	Su(-3,1202; 1,5233; 0,0874; 0,1087)	Su(-2,7057; 1,7154; 0,1043; 0,0925)
7	Логнормальное	Su(-2,4168; 1,1296; 0,1151; 0,1560)	lnN(-0,8052; 0,5123)	Su(-2,3966; 1,5967; 0,1012; 0,1179)
8	Коши	Su(-2,4935; 1,0789; 0,0923; 0,1458)	Su(-2,8420; 1,3528; 0,1010; 0,1221)	Su(-2,3195; 1,1812; 0,0769;0,1217)
9	Логистическое	Sl(0,3065; 1,1628; 0,7002; 0,0930)	Su(-3,5408; 1,6041; 0,0773; 0,0829)	lnN(-1,1452; 0,4426)
10	Наибольшего значения	Su(-2,5427; 1,1057; 0,0960; 0,1569)	Su(-2,5550; 1,3714; 0,1152; 0,1289)	Su(-2,4622; 1,6473; 0,1075; 0,1149)
11	Наименьшего значения	Su(-2,5427; 1,1057; 0,0960; 0,1569)	Su(-2,5550; 1,3714; 0,1152; 0,1289)	Su(-2,4622; 1,6473; 0,1075; 0,1149)
12	Вейбулла	Su(-2,5427; 1,1057; 0,0960; 0,1569) **	Su(-2,5550; 1,3714; 0,1152; 0,1289) *	Su(-2,4622; 1,6473; 0,1075; 0,1149)

** - оценивался параметр формы распределения Вейбулла;

* - оценивался параметр масштаба распределения Вейбулла.

Таблица А.18

Процентные точки распределения статистики Ω^2 Мизеса при использовании метода максимального правдоподобия							
№ п/п	Распределение случайной величины	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
1	Экспоненциальное	масштабный	0,9256	1,0797	1,3626	1,6736	2,1333
2	Полунормальное	масштабный	1,0195	1,2030	1,5463	1,9312	2,5117
3	Рэлея	масштабный	0,8954	1,0427	1,3140	1,6132	2,0569
4	Максвелла	масштабный	0,8671	1,0055	1,2587	1,5360	1,9442
5	Лапласа	масштабный	1,4627	1,7923	2,3158	2,8202	3,5035
		сдвиг	0,9196	1,0712	1,3504	1,6586	2,1165
		два параметра	0,7019	0,8082	1,0015	1,2116	1,5188
6	Нормальное	масштабный	1,4126	1,7309	2,2533	2,8654	3,8453
		сдвиг	0,7750	0,8923	1,1045	1,3341	1,6681
		два параметра	0,5486	0,6204	0,7471	0,8806	1,0698
7	Логнормальное	масштабный	1,4126	1,7309	2,2533	2,8654	3,8453
		сдвиг	0,7602	0,8619	1,0382	1,2200	1,4719
		два параметра	0,5464	0,6194	0,7498	0,8893	1,0897
8	Коши	масштабный	1,3917	1,7432	2,2967	2,866	3,5085
		сдвиг	1,0072	1,1841	1,5125	1,8781	2,4251
		два параметра	0,7783	0,9307	1,2231	1,5606	2,0845
9	Логистическое	масштабный	1,4097	1,7755	2,2268	2,8759	3,7694
		сдвиг	0,7512	0,8622	1,0611	1,2741	1,5803
		два параметра	0,5033	0,5610	0,6589	0,7575	0,8909
10	Наибольшего значения	масштабный	1,4056	1,7163	2,2631	2,8443	3,6757
		сдвиг	0,9149	1,0703	1,3577	1,6764	2,1514
		два параметра	0,5580	0,6310	0,7608	0,8987	1,0956
11	Наименьшего значения	масштабный	1,4056	1,7163	2,2631	2,8443	3,6757
		сдвиг	0,9149	1,0703	1,3577	1,6764	2,1514
		два параметра	0,5580	0,6310	0,7608	0,8987	1,0956
12	Вейбулла	формы	1,4056	1,7163	2,2631	2,8443	3,6757
		масштаба	0,9149	1,0703	1,3577	1,6764	2,1514
		два параметра	0,5580	0,6310	0,7608	0,8987	1,0956

Таблица А.19

Аппроксимация предельных распределений минимума статистики Ω^2 Мизеса (при использовании MD-оценок, минимизирующих статистику S_Ω)				
№ п/п	Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
1	Экспоненциальное	Su(-2,6741; 1,4068; 0,0958; 0,1230)		
2	Полунормальное	Su(-2,6752; 1,3763; 0,0952; 0,1280)		
3	Рэлея	Su(-2,2734; 1,3473; 0,1101; 0,1496)		
4	Максвелла	Su(-2,2759; 1,3988; 0,1171; 0,1514)		
5	Лапласа	Su(-2,3884; 1,0811; 0,0948; 0,1548)	Su(-2,7267; 1,4972; 0,1044; 0,1239)	Su(-2,4334; 1,6104; 0,0902; 0,1123)
6	Нормальное	Su(-2,4180; 1,0702; 0,0957; 0,1464)	Su(-2,7639; 1,5393; 0,1102; 0,1115)	Su(-2,5746; 1,7505; 0,0979; 0,1043) lnN(-1,1651; 0,4271)
7	Логнормальное	Su(-2,4180; 1,0702; 0,0957; 0,1464)	Su(-2,7639; 1,5393; 0,1102; 0,1115)	Su(-2,5746; 1,7505; 0,0979; 0,1043) llnN(-1,1651; 0,4271)
8	Коши	Su(-2,5043; 1,1355; 0,1035;0,1384)	Su(-2,7029; 1,5179; 0,1188; 0,1100)	Su(-2,1046; 1,4364; 0,0929; 0,1301) lnN(-1,1043; 0,4692)
9	Логистическое	Sl(0,3223; 1,1159; 0,6836; 0,0953) Su(-2,3007; 1,0135; 0,0906; 0,1593)	Su(-2,6212; 1,4318; 0,0932; 0,1370)	Su(-3,0152; 1,7751; 0,0800; 0,0898)
10	Наибольшего значения	Su(-2,4454; 1,1083; 0,0968; 0,1459)	Su(-2,6557; 1,4282; 0,1024; 0,1254)	Su(-2,1580; 1,5446; 0,0941; 0,1279)
11	Наименьшего значения	Su(-2,4454; 1,1083; 0,0968; 0,1459)	Su(-2,6557; 1,4282; 0,1024; 0,1254)	Su(-2,1580; 1,5446; 0,0941; 0,1279)
12	Вейбулла	Su(-2,4454; 1,1083; 0,0968; 0,1459) **	Su(-2,6557; 1,4282; 0,1024; 0,1254) *	Su(-2,1580; 1,5446; 0,0941; 0,1279)

** - при оценивании параметра формы распределения Вейбулла;

* - при оценивании параметра масштаба распределения Вейбулла.

Таблица А.20.

Процентные точки распределения минимума статистики Ω^2 Мизеса (при использовании MD-оценок, минимизирующих статистику S_Ω)							
№ п/п	Распределение случайной величины	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
1	Экспоненциальное	масштабный	0,7892	0,9172	1,1527	1,4122	1,7967
2	Полунормальное	масштабный	0,8308	0,9690	1,2245	1,5075	1,9292
3	Рэлея	масштабный	0,7871	0,9160	1,1553	1,4218	1,8206
4	Максвелла	масштабный	0,7710	0,8916	1,1135	1,3582	1,7211
5	Лапласа	масштабный	1,3751	1,6440	2,1787	2,6035	3,3197
		сдвиг	0,7642	0,8795	1,0888	1,3160	1,6476
		два параметра	0,4960	0,5607	0,6763	0,7996	0,9765
6	Нормальное	масштабный	1,3994	1,7302	2,2526	2,8345	3,5978
		сдвиг	0,7575	0,8705	1,0745	1,2945	1,6137
		два параметра	0,4832	0,5419	0,6451	0,7534	0,9061
7	Логнормальное	масштабный	1,3994	1,7302	2,2526	2,8345	3,5978
		сдвиг	0,7575	0,8705	1,0745	1,2945	1,6137
		два параметра	0,4832	0,5419	0,6451	0,7534	0,9061
8	Коши	масштабный	1,3487	1,6287	2,0930	2,7014	3,4728
		сдвиг	0,8026	0,9257	1,1483	1,3893	1,7399
		два параметра	0,5386	0,6164	0,7586	0,9142	1,1435
9	Логистическое	масштабный	1,3917	1,7101	2,3316	3,0612	4,2139
		сдвиг	0,7329	0,8454	1,0516	1,2778	1,6115
		два параметра	0,4778	0,5363	0,6392	0,7470	0,8986
10	Наибольшего значения	масштабный	1,2638	1,5415	2,0840	2,7220	3,7319
		сдвиг	0,8007	0,9285	1,1628	1,4200	1,7997
		два параметра	0,4941	0,5590	0,6757	0,8014	0,9832
11	Наименьшего значения	масштабный	1,2638	1,5415	2,0840	2,7220	3,7319
		сдвиг	0,8007	0,9285	1,1628	1,4200	1,7997
		два параметра	0,4941	0,5590	0,6757	0,8014	0,9832
12	Вейбулла	формы	1,2638	1,5415	2,0840	2,7220	3,7319
		масштаба	0,8007	0,9285	1,1628	1,4200	1,7997
		два параметра	0,4941	0,5590	0,6757	0,8014	0,9832

Таблица А.21

Аппроксимация предельных распределений статистики Колмогорова при использовании метода максимального правдоподобия и проверке согласия с гамма-распределением				
№ п/п	Значение параметра формы	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра формы	При оценивании двух параметров
1	**0,3**	Su(-3,1261; 2,4210; 0,2564; 0,3176)	Su(-2,5800; 2,3573; 0,2522; 0,3652)	Su(-2,4004; 2,2110; 0,2222; 0,3679)
2	**0,5**	γ(3,8019; 0,1122; 0,3426)	Su(-2,5116; 2,4317; 0,2624; 0,3737)	Su(-2,8715; 2,5280; 0,2325; 0,3296)
3	**1,0**	γ(4,4861; 0,0961; 0,3093)	γ(4,4582; 0,0888; 0,3178)	Su(-2,4192; 2,2314; 0,2037; 0,3707)
4	**2,0**	Su(-2,2691; 2,2383; 0,2323; 0,3958)	Su(-3,0644; 2,6833; 0,2531; 0,3159)	Su(-2,2110; 2,1457; 0,1988; 0,3872)
5	**3,0**	Su(-2,4869; 2,4779; 0,2655; 0,3742)	Su(-2,5510; 2,4430; 0,2430; 0,3640)	Su(-2,1298; 2,1802; 0,2103; 0,3897)
6	**4,0**	Su(-2,4229; 2,4457; 0,2627; 0,3696)	Su(-2,0448; 2,2821; 0,2494; 0,4140)	Su (-2,4946; 2,2762; 0,2023; 0,3589)
7	**5,0**	Su(-2,4152; 2,3901; 0,2475; 0,3818)	Su(-2,2143; 2,2844; 0,2367; 0,3932)	Su (-2,0501; 2,1119; 0,2016; 0,3985)

Таблица А.22

Процентные точки распределения статистики Колмогорова при использовании метода максимального правдоподобия и проверке гипотезы о согласии с гамма-распределением							
№ п/п	Значение параметра формы	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
1	**0,3**	масштабный	1,0101	1,0885	1,2196	1,3497	1,5231
		формы	0,9228	0,9895	1,1012	1,2120	1,3602
		два параметра	0,8702	0,9343	1,0424	1,1508	1,2970
2	**0,5**	масштабный	0,9890	1,0625	1,1808	1,2927	1,4341
		формы	0,9076	0,9704	1,0748	1,1780	1,3151
		два параметра	0,8503	0,9081	1,0040	1,0984	1,2233
3	**1,0**	масштабный	0,9461	1,0131	1,1204	1,2214	1,3483
		формы	0,9031	0,9649	1,0638	1,1569	1,2740
		два параметра	0,8283	0,8862	0,9836	1,0813	1,2128
4	**2,0**	масштабный	0,9115	0,9694	1,0620	1,1466	1,2859
		формы	0,8719	0,9301	1,0260	1,1196	1,2425
		два параметра	0,8168	0,8738	0,9703	1,0674	1,1989
5	**3,0**	масштабный	0,8924	0,9527	1,0525	1,1509	1,2812
		формы	0,8636	0,9220	1,0190	1,1148	1,2421
		два параметра	0,8144	0,8704	0,9650	1,0598	1,1879
6	**4,0**	масштабный	0,8781	0,9381	1,0377	1,1361	1,2665
		формы	0,8628	0,9207	1,0174	1,1136	1,2423
		два параметра	0,8146	0,8711	0,9659	1,0606	1,1877
7	**5,0**	масштабный	0,8771	0,9366	1,0357	1,1338	1,2645
		формы	0,8558	0,9143	1,0123	1,1099	1,2408
		два параметра	0,8098	0,8659	0,9608	1,0565	1,1865

Таблица А.23

Аппроксимация предельных распределений статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия и проверке согласия с гамма-распределением				
№ п/п	Значение параметра формы	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра формы	При оценивании двух параметров
1	**0,3**	Su(-3,1901; 1,1381; 0,1399; 0,0081)	Su(-2,8117; 1,3517; 0,2973; 0,1474)	Su(-2,4288; 1,2878; 0,2749; 0,2074)
2	**0,5**	Su(-2,8625; 1,1796; 0,2003; 0,079)	Su(-2,8816; 1,4625; 0,3377; 0,1280)	Su(-2,4027; 1,3861; 0,3389; 0,2290) lnN(-0,1506;0,6511)
3	**1,0**	LnN(0,2062; 0,7337) Su(-2,5635; 1,2797; 0,2922; 0,1584)	Su(-2,5861; 1,4818; 0,4130; 0,174)	Su(-2,2666; 1,3824; 0,3515; 0,2731)
4	**2,0**	Su(-2,5372; 1,3749; 0,3464; 0,2162)	Su(-2,3222; 1,4442; 0,4335; 0,2845)	u(-2,2109; 1,3527; 0,3317; 0,3149)
5	**3,0**	Su(-2,3014; 1,3875; 0,3991; 0,2750)	Su(-2,3895; 1,4817; 0,4344; 0,2824)	Su(-2,4295; 1,4110; 0,3163; 0,2784)
6	**4,0**	Su(-2,3759; 1,4418; 0,4149; 0,2480)	Su(-2,2574; 1,4921; 0,4694; 0,3216)	Su(-2,4153; 1,4306; 0,3318; 0,2604)
7	**5,0**	Su(-2,4574; 1,4599; 0,3976; 0,2712)	Su(-2,2611; 1,4644; 0,4393; 0,3231)	Su(-2,1345; 1,3945; 0,3655; 0,3263)

Таблица А.24

Процентные точки распределения статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия и проверке гипотезы о согласии с гамма-распределением							
№ п/п	Значение параметра формы	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
1	**0,3**	масштабный	2,8746	3,5643	4,9025	6,4644	8,9168
		формы	2,7006	3,2114	4,1601	5,2162	6,7967
		два параметра	2,2246	2,6511	3,4520	4,3543	5,7217
2	**0,5**	масштабный	2,8051	3,4363	4,6490	6,0496	8,2255
		формы	2,5766	3,0273	3,8498	4,7480	6,0664
		два параметра	2,2406	2,6348	3,3620	4,1659	5,3609
3	**1,0**	масштабный	2,6291	3,1471	4,1084	5,1770	6,7737
		формы	2,5364	2,9673	3,7509	4,6036	5,8510
		два параметра	2,1738	2,5483	3,2393	4,0035	5,1400
4	**2,0**	масштабный	2,5334	2,9902	3,8349	4,7709	6,1652
		формы	2,4813	2,8949	3,6506	4,4775	5,6940
		два параметра	2,1292	2,4951	3,1737	3,9281	5,0563
5	**3,0**	масштабный	2,4691	2,8995	3,6930	4,5698	5,8727
		формы	2,4538	2,8516	3,5745	4,3608	5,5106
		два параметра	2,1092	2,4613	3,1083	3,8204	4,8743
6	**4,0**	масштабный	2,4404	2,8534	3,6084	4,4348	5,6514
		формы	2,4299	2,8149	3,5130	4,2708	5,3768
		два параметра	2,0978	2,4463	3,0847	3,7850	4,8178
7	**5,0**	масштабный	2,4296	2,8303	3,5611	4,3589	5,5299
		Формы	2,3877	2,7717	3,4709	4,2333	5,3511
		два параметра	2,0833	2,4276	3,0613	3,7602	4,7972

Таблица А.25

Аппроксимация предельных распределений статистики ω^2 Мизеса при использовании метода максимального правдоподобия и проверке согласия с гамма-распределением				
№ п/п	Значение параметра формы	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра формы	При оценивании двух параметров
1	**0,3**	Su(-1,6653; 0,9957; 0,0213; 0,0286)	Su(-1,4885; 1,0365; 0,0196; 0,0305)	Su(-1,4703; 1,0481; 0,0167; 0,0258)
2	**0,5**	Su(-2,1013; 1,0964; 0,0172; 0,0233)	Su(-1,7133; 1,1339; 0,0203; 0,0267) lnN(-2,6112; 0,6152)	Su(-1,5811; 1,1193; 0,0164; 0,0243) lnN(-2,8269; 0,5922)
3	**1,0**	Su(-1,8467; 1,0824; 0,0179; 0,0250)	Su(-1,5966; 1,0899; 0,0191; 0,0281)	Su(-1,5388; 1,0487; 0,0131; 0,0249) lnN(-2,8658; 0,5850)
4	**2,0**	Su(-1,6042; 1,1125; 0,0207; 0,0281) lnN(-2,6123; 0,6231)	Su (-1,6693; 1,1076; 0,0181; 0,0264) lnN(-2,6844; 0,6119)	Su(-1,3082; 1,0059; 0,0146; 0,0269)
5	**3,0**	Su(-2,1337; 1,1654; 0,015; 0,0217)	Su(-1,5872; 1,0916; 0,0181; 0,0272)	Su(-1,4044; 1,0562; 0,0148; 0,0261)
6	**4,0**	Su (-1,5813; 1,1339; 0,0206; 0,0273) lnN(-2,6668; 0,6097)	Su (-1,5748; 1,1003; 0,0183; 0,0275) lnN(-2,6947; 0,6012)	Su (-1,4222; 1,0519; 0,0143; 0,0260)
7	**5,0**	Su (-1,6144; 1,1468; 0,0202; 0,0265) lnN(-2,6732; 0,6052)	Su (-1,7641; 1,1417; 0,0172; 0,0238) lnN(-2,7198; 0,6001)	Su (-1,2912; 1,0213; 0,0144; 0,0274)

Таблица А.26

Процентные точки распределения статистики ω^2 Мизеса при использовании метода максимального правдоподобия и проверке гипотезы о согласии с гамма-распределением							
№ п/п	Значение параметра формы	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
1	**0,3**	масштабный	0,1885	0,2335	0,3241	0,4344	0,6151
		формы	0,1416	0,1717	0,2314	0,3031	0,4190
		два параметра	0,1163	0,1405	0,1885	0,2458	0,3381
2	**0,5**	масштабный	0,1733	0,2110	0,2851	0,3724	0,5110
		формы	0,1405	0,1684	0,2224	0,2853	0,3843
		два параметра	0,1085	0,1295	0,1702	0,2179	0,2932
3	**1,0**	масштабный	0,1528	0,1856	0,2499	0,3262	0,4477
		формы	0,1342	0,1613	0,2145	0,2773	0,3771
		два параметра	0,1017	0,1220	0,1623	0,2107	0,2888
4	**2,0**	масштабный	0,1383	0,1658	0,2195	0,2825	0,3821
		формы	0,1297	0,1557	0,2063	0,2658	0,3599
		два параметра	0,1007	0,1209	0,1609	0,2088	0,2859
5	**3,0**	масштабный	0,1351	0,1618	0,2133	0,2730	0,3660
		формы	0,1265	0,1519	0,2015	0,2601	0,3533
		два параметра	0,1000	0,1196	0,1584	0,2047	0,2790
6	**4,0**	масштабный	0,1299	0,1551	0,2039	0,2608	0,3502
		формы	0,1248	0,1495	0,1977	0,2544	0,3444
		два параметра	0,0993	0,1189	0,1576	0,2038	0,2781
7	**5,0**	масштабный	0,1274	0,1519	0,1991	0,2541	0,3400
		формы	0,1230	0,1471	0,1937	0,2479	0,3329
		два параметра	0,0970	0,1162	0,1546	0,2008	0,2759

Таблица А.27

Аппроксимация предельных распределений статистики Ω^2 Мизеса при использовании метода максимального правдоподобия и проверке согласия с гамма-распределением				
№ п/п	Значение параметра формы	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра формы	При оценивании двух параметров
1	**0,3**	Su(-2,4570; 1,2601; 0,1187; 0,1380)	Su(-2,8799; 1,4942; 0,1088; 0,1149)	Su(-2,4649; 1,5188; 0,1035; 0,1141)
2	**0,5**	Su(-2,5752; 1,3505; 0,1078; 0,1355)	Su(-2,6867; 1,4854; 0,1155 0,1193)	Su (-2,6917; 1,6334; 0,0970; 0,1067)
3	**1,0**	Su(-2,5752; 1,3505; 0,1078; 0,1355)	Su(-2,6867; 1,4854; 0,1155 0,1193)	Su (-2,6917; 1,6334; 0,0970; 0,1067)
4	**2,0**	Su(-2,4667; 1,4180; 0,1207; 0,1416)	Su(-2,7782; 1,4780; 0,1041; 0,1181)	Su(-2,5083; 1,6002; 0,0992; 0,1150)
5	**3,0**	Su(-2,7121; 1,4220; 0,1007; 0,1321)	Su(-2,6425; 1,4834; 0,1132; 0,1224)	Su(-2,4614; 1,6592; 0,1106; 0,1125)
6	**4,0**	Su(-2,6722; 1,4316; 0,1036; 0,1315)	Su(-3,1020; 1,5114; 0,0884; 0,1041)	Su(-2,9531; 1,7024; 0,0902; 0,0935)
7	**5,0**	Su(-2,7351; 1,4967; 0,1109; 0,1187)	Su(-2,6935; 1,5149; 0,1123; 0,1184)	Su (-3,0056; 1,7207; 0,0895; 0,0912)

Таблица А.28

Процентные точки распределения статистики Ω^2 Мизеса при использовании метода максимального правдоподобия и проверке гипотезы о согласии с гамма-распределением							
№ п/п	Значение параметра формы	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
2	**0,3**	масштабный	1,0837	1,2882	1,6743	2,1120	2,7791
		формы	0,8589	0,9929	1,2362	1,5006	1,8867
		два параметра	0,6279	0,7195	0,8852	1,0645	1,3251
1	**0,5**	масштабный	1,0067	1,1869	1,5242	1,9028	2,4744
		формы	0,8501	0,9811	1,2190	1,4777	1,8556
		два параметра	0,5987	0,6822	0,8322	0,9932	1,2257
2	**1,0**	масштабный	0,9134	1,0696	1,3597	1,6825	2,1656
		формы	0,8230	0,9508	1,1832	1,4359	1,8055
		два параметра	0,5771	0,6547	0,7931	0,9405	1,1515
3	**2,0**	масштабный	0,8507	0,9863	1,2352	1,5088	1,9133
		формы	0,8014	0,9259	1,1527	1,3997	1,7613
		два параметра	0,5641	0,6401	0,7760	0,9214	1,1302
4	**3,0**	масштабный	0,8313	0,9641	1,2079	1,4758	1,8716
		формы	0,7935	0,9157	1,1378	1,3795	1,7330
		два параметра	0,5611	0,6345	0,7648	0,9030	1,1001
5	**4,0**	масштабный	0,8185	0,9481	1,1857	1,4464	1,8309
		формы	0,7846	0,9054	1,1243	1,3616	1,7074
		два параметра	0,5590	0,6324	0,7622	0,8993	1,0938
6	**5,0**	масштабный	0,8036	0,9269	1,1508	1,3940	1,7489
		формы	0,7723	0,8887	1,0995	1,3277	1,6598
		два параметра	0,5557	0,6281	0,7558	0,8905	1,0813

Таблица А.29

Модели предельных распределений статистик непараметрических критериев при проверке гипотез о согласии с распределением *Sb*-Джонсона			
Оценива-емые параметры	Распределения статистики Колмогорова	Распределения статистики ω^2 Мизеса	Распределения статистики Ω^2 Мизеса
θ_0	lnN(-0,4138; 0,2289)	lnN(-2,7500; 0,5649)	Su(-2,7925, 1,5513, 0,1138, 0,1165)
θ_1	lnN(-0,2220; 0,3031)	Sl (0,9845; 1,1812; 0,2354; 0,0053)	Su(-3,2608, 1,2469, 0,0836, 0,0883)
θ_0, θ_1	γ(5,2261; 0,0663; 0,2886)	Su(-2,5137; 1,5524; 0,0159; 0,0118)	Su(-2,1210; 1,5490; 0,1113; 0,1325)

Таблица А,30

Модели предельных распределений статистик непараметрических критериев при проверке гипотез о согласии с распределением *Sl*-Джонсона			
Оценива-емый параметр	Распределения статистики Колмогорова	Распределения статистики ω^2 Мизеса	Распределения статистики Ω^2 Мизеса
θ_0	lnN(-0,4138; 0,2289)	lnN(-2,7500; 0,5649)	Su(-2,7925, 1,5513, 0,1138, 0,1165)
θ_1	lnN(-0,2220; 0,3031)	Sl (0,9845; 1,1812; 0,2354; 0,0053)	Su(-3,2608, 1,2469, 0,0836, 0,0883)
θ_2	lnN(-0,4138; 0,2289)	lnN(-2,7500; 0,5649)	Su(-2,7925, 1,5513, 0,1138, 0,1165)
θ_0, θ_1	γ(5,1416; 0,0672; 0,2886)	Su(-1,8744; 1,2526; 0,0142; 0,0198)	Su(-2,3550; 1,5797; 0,1050; 0,1179)
θ_0, θ_2	lnN(-0,4226; 0,2266)	lnN(-2,7644; 0,5569)	Su(-3,0997; 1,5568; 0,0937; 0,1023)
θ_1, θ_2	γ(5,1416; 0,0672; 0,2886)	Su(-1,8744; 1,2526; 0,0142; 0,0198)	Su(-2,3550; 1,5797; 0,1050; 0,1179)
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	lnN(-0,4733; 0,2271)	lnN(-2,9537; 0,5251)	Su(-1,9900; 1,5211; 0,1145; 0,1445)

Таблица А.31

Модели предельных распределений статистик непараметрических критериев при проверке гипотез о согласии с распределением *Su*-Джонсона			
Оценива-емые параметры	Распределения статистики Колмогорова	Распределения статистики ω^2 Мизеса	Распределения статистики Ω^2 Мизеса
θ_0	lnN(-0,4138; 0,2289)	lnN(-2,7500; 0,5649)	Su(-2,7925, 1,5513, 0,1138, 0,1165)
θ_1	lnN(-0,2220; 0,3031)	Sl (0,9845; 1,1812; 0,2354; 0,0053)	Su(-3,2608, 1,2469, 0,0836, 0,0883)
θ_2	lnN(-0,2594; 0,2990)	Sl (1,0352; 1,1218; 0,2284; 0,0070)	Su(-3,0091; 1,1753; 0,0787; 0,1050)
θ_3	lnN(-0,4316; 0,2341)	Su(-1,7738; 1,2418; 0,0173; 0,0232)	Su(-2,7823; 1,5327; 0,1140; 0,1125)
θ_0, θ_1	γ(5,2263; 0,0658; 0,2886)	Su(-1,7649; 1,2854; 0,0151; 0,0208)	Su(-2,3262; 1,5422; 0,0964; 0,1235)
θ_0, θ_2	Su(-2,5586; 2,4112; 0,1908; 0,3411)	lnN(-3,1024; 0,5069)	Su(-2,1247; 1,4688; 0,0863; 0,1339)
θ_0, θ_3	Su(-2,3187; 2,2729; 0,1888; 0,3607)	Su(-1,4187; 1,0120; 0,0117; 0,0232)	Su(-2,2356; 1,2901; 0,0799; 0,1327)
θ_1, θ_2	lnN(-0,2836; 0,3039)	Sl(1,0334; 1,1037; 0,2220; 0,0060)	Su (-3,1039; 1,1372; 0,062; 0,0950)
θ_1, θ_3	lnN(-0,5199; 0,2184)	lnN(-3,0545; 0,5152)	Sl(0,6951; 1,4454; 0,4295; 0,0818)
θ_2, θ_3	Su(-2,5904; 2,5548; 0,1859; 0,3300)	Su(-1,6883; 1,2861; 0,0121; 0,0187)	Su(-2,1944; 1,3600; 0,0804; 0,1262)
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	Su(-2,1848; 2,1100; 0,1651; 0,3611)	Su(-1,2247; 1,0971; 0,0120; 0,0228)	Su(-2,2549; 1,4569; 0,0715; 0,1163)
θ_0, θ_1, θ_3	γ(4,8573; 0,0568; 0,2890)	lnN(-3,2677; 0,4767)	lnN(-1,3166; 0,4065)
$\theta_0, \theta_2, \theta_3$	lnN(-0,6615; 0,1929)	γ(2,6159; 0,0097; 0,0098)	lnN(-1,4121; 0,3753)
θ_1, θ_2, θ_3	lnN(-0,6101; 0,2020)	Su(-1,5455; 1,2383; 0,0108; 0,0186)	Su(-2,2203; 1,3198; 0,0646; 0,1203)
$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$	lnN(-0,7128; 0,1923)	lnN(-3,5836; 0,4154)	γ(3,6074; 0,0429; 0,0629)

Таблица А.32

Процентные точки распределения статистики Колмогорова при использовании метода максимального правдоподобия							
№ п/п	Распределение случайной величины	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
1	*Sb*-Джонсона	θ_0	0,8381	0,8865	0,9634	1,0354	1,1260
		θ_1	1,0965	1,1811	1,3186	1,4507	1,6211
		θ_0, θ_1	0,7889	0,8379	0,9161	0,9892	1,0808
2	*Sl*-Джонсона	θ_0	0,8381	0,8865	0,9634	1,0354	1,1260
		θ_1	1,0965	1,1811	1,3186	1,4507	1,6211
		θ_2	0,8381	0,8865	0,9634	1,0354	1,1260
		θ_0, θ_1	0,7887	0,8381	0,9168	0,9906	1,0829
		θ_0, θ_2	0,8288	0,8762	0,9513	1,0218	1,1102
		θ_1, θ_2	0,7887	0,8381	0,9168	0,9906	1,0829
		θ_0, θ_1, θ_2	0,7883	0,8334	0,9051	0,9722	1,0566
3	*Su*-Джонсона	θ_0	0,8381	0,8865	0,9634	1,0354	1,1260
		θ_1	1,0965	1,1811	1,3186	1,4507	1,6211
		θ_2	1,0518	1,1318	1,2616	1,3863	1,5468
		θ_3	0,8278	0,8767	0,9545	1,0276	1,1196
		θ_0, θ_1	0,7852	0,8338	0,9113	0,9840	1,0749
		θ_0, θ_2	0,7433	0,7907	0,8697	0,9479	1,0520
		θ_0, θ_3	0,7522	0,8015	0,8841	0,9665	1,0771
		θ_1, θ_2	1,0319	1,1117	1,2414	1,3662	1,5271
		θ_1, θ_3	0,7456	0,7866	0,8516	0,9122	0,9882
		θ_2, θ_3	0,6919	0,7327	0,8000	0,8661	0,9533
		θ_0, θ_1, θ_2	0,7231	0,7719	0,8546	0,9381	1,0516
		θ_0, θ_1, θ_3	0,6917	0,7325	0,7977	0,8590	0,9357
		θ_0, θ_2, θ_3	0,6303	0,6608	0,7088	0,7532	0,8084
		θ_1, θ_2, θ_3	0,6698	0,7038	0,7574	0,8072	0,8692
		θ_0, θ_1, θ_2, θ_3	0,5984	0,6273	0,6727	0,7147	0,7669

Таблица А.33

Процентные точки распределения статистики ω^2 Мизеса при использовании метода максимального правдоподобия							
№ п/п	Распределение случайной величины	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
1	*Sb*-Джонсона	θ_0	0,1148	0,1319	0,1619	0,1934	0,2379
		θ_1	0,2513	0,3080	0,4170	0,5429	0,7384
		θ_0, θ_1	0,0893	0,1028	0,1271	0,1532	0,1911
2	*Sl*-Джонсона	θ_0	0,1148	0,1319	0,1619	0,1934	0,2379
		θ_1	0,2513	0,3080	0,4170	0,5429	0,7384
		θ_2	0,1148	0,1319	0,1619	0,1934	0,2379
		θ_0, θ_1	0,0916	0,1074	0,1373	0,1711	0,2227
		θ_0, θ_2	0,1122	0,1286	0,1575	0,1877	0,2302
		θ_1, θ_2	0,0916	0,1074	0,1373	0,1711	0,2227
		θ_0, θ_1, θ_2	0,0899	0,1022	0,1237	0,1459	0,1769
3	*Su*-Джонсона	θ_0	0,1148	0,1319	0,1619	0,1934	0,2379
		θ_1	0,2513	0,3080	0,4170	0,5429	0,7384
		θ_2	0,2357	0,2915	0,4003	0,5278	0,7290
		θ_3	0,1054	0,1238	0,1584	0,1977	0,2578
		θ_0, θ_1	0,0867	0,1009	0,1274	0,1573	0,2026
		θ_0, θ_2	0,0760	0,0861	0,1035	0,1214	0,1461
		θ_0, θ_3	0,0889	0,1071	0,1437	0,1878	0,2598
		θ_1, θ_2	0,2286	0,2840	0,3923	0,5200	0,7223
		θ_1, θ_3	0,0804	0,0912	0,1100	0,1294	0,1563
		θ_2, θ_3	0,0683	0,0790	0,0990	0,1216	0,1557
		θ_0, θ_1, θ_2	0,0692	0,0811	0,1044	0,1318	0,1753
		θ_0, θ_1, θ_3	0,0624	0,0702	0,0834	0,0970	0,1155
		θ_0, θ_2, θ_3	0,0507	0,0562	0,0652	0,0739	0,0849
		θ_1, θ_2, θ_3	0,0614	0,0710	0,0892	0,1099	0,1415
		θ_0, θ_1, θ_2, θ_3	0,0427	0,0473	0,0550	0,0627	0,0730

Таблица А.34

Процентные точки распределения статистики Ω^2 Мизеса при использовании метода максимального правдоподобия							
№ п/п	Распределение случайной величины	Оцениваемые параметры	Верхние процентные точки				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
1	*Sb*-Джонсона	θ_0	0,7832	0,8988	1,1072	1,3317	1,6567
		θ_1	1,3989	1,6841	2,2245	2,8391	3,7791
		θ_0, θ_1	0,5525	0,6269	0,7605	0,9041	1,1119
2	*Sl*-Джонсона	θ_0	0,7832	0,8988	1,1072	1,3317	1,6567
		θ_1	1,3989	1,6841	2,2245	2,8391	3,7791
		θ_2	0,7832	0,8988	1,1072	1,3317	1,6567
		θ_0, θ_1	0,5611	0,6374	0,7741	0,9207	1,1318
		θ_0, θ_2	0,7667	0,8810	1,0870	1,3088	1,6298
		θ_1, θ_2	0,5611	0,6374	0,7741	0,9207	1,1318
		θ_0, θ_1, θ_2	0,5553	0,6297	0,7638	0,9086	1,1187
3	*Su*-Джонсона	θ_0	0,7832	0,8988	1,1072	1,3317	1,6567
		θ_1	1,3989	1,6841	2,2245	2,8391	3,7791
		θ_2	1,3336	1,6190	2,1680	2,8028	3,7900
		θ_3	0,7963	0,9164	1,1334	1,3677	1,7079
		θ_0, θ_1	0,5446	0,6189	0,7527	0,8969	1,1057
		θ_0, θ_2	0,5001	0,5683	0,6924	0,8274	1,0253
		θ_0, θ_3	0,6342	0,7403	0,9395	1,1637	1,5032
		θ_1, θ_2	1,2760	1,5604	2,1124	2,7568	3,7689
		θ_1, θ_3	0,6257	0,7262	0,9104	1,1122	1,4095
		θ_2, θ_3	0,5549	0,6409	0,8003	0,9771	1,2412
		θ_0, θ_1, θ_2	0,4549	0,5182	0,6336	0,7595	0,9445
		θ_0, θ_1, θ_3	0,4085	0,4513	0,5231	0,5946	0,6901
		θ_0, θ_2, θ_3	0,3595	0,3941	0,4517	0,5084	0,5833
		θ_1, θ_2, θ_3	0,4985	0,5767	0,7226	0,8859	1,1316
		θ_0, θ_1, θ_2, θ_3	0,2994	0,3269	0,3713	0,4135	0,4667