Материалы Российской НТК “Информатика и проблемы телекоммуникаций”, Новосибирск. 2007. – Т.1. – С.162-164.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И СИСТЕМ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН МЕТОДАМИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ[1]

Огурцов Д.В., Лемешко Б.Ю.
НГТУ, Новосибирск
E-mail: dogurtsov@gmail.com

Определение закона распределения функций случайных величин и систем независимых случайных величин с использованием чисто аналитического подхода удается достаточно редко. Более перспективным для построения приближенной модели интересующего нас закона распределения является использование компьютерного моделирования [1].

Поэтому цель данной работы состояла в разработке программного обеспечения, позволяющего моделировать различные функции от случайных величин и от систем независимых случайных величин, и в дальнейшем построении для смоделированных закономерностей приближенных математических моделей законов.

Разработанное программное обеспечение позволяет:

- моделировать различные законы распределения с заданными параметрами;
- получать выборки функций случайной величины или систем независимых случайных величин. Вид функции от независимых случайных величин может быть “произвольным” и задается пользователем в режиме диалога.

Тестирование разработанной системы проводилось на функциях случайных величин, для которых известны результирующие законы распределения. В этом случае осуществлялась проверка простой гипотезы о согласии эмпирического распределения функции, полученного в результате моделирования, с известным теоретическим законом [2].

Например, в случае моделирования закона распределения функции $y = 2x_1 - 5x_2 + 12x_3 + x_4 - 6x_5$, при $x_1 \in N(0,1), x_2 \in N(10,1), x_3 \in N(0,0.5)$, $x_4 \in N(5.2,0.8), x_5 \in N(1,1)$, теоретическим распределением которой является нормальный закон $y \in N(-50.8, \sqrt{101.64})$, достигнутый уровень значимости по критерию Колмогорова составил величину 0.87240. Визуально же (см. рис. 1) эмпирическое и теоретическое распределения практически совпадают.

Когда аналитическое решение неизвестно или найти закон распределения функции очень сложно, то по смоделированной выборке может проводиться идентификация закона распределения.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00059-а)

Например, для функции $y = x_1 + x_2 - x_3 x_4$, при $x_1 \in N(5.2, 0.8)$, x_2, x_3 с плотностью $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$, $x_4 \in Rav(0,1)$ достаточно хорошей моделью (см. рис.2) оказалось распределение с плотностью $f(t) = \frac{1.9094}{2 \cdot 1.4747 \cdot \Gamma(1/1.9094)} \cdot e^{-(|t-5.5889|/1.4747)^{1.9094}}$. Достигнутый уровень значимости по критерию Колмогорова составил величину 0.069531.

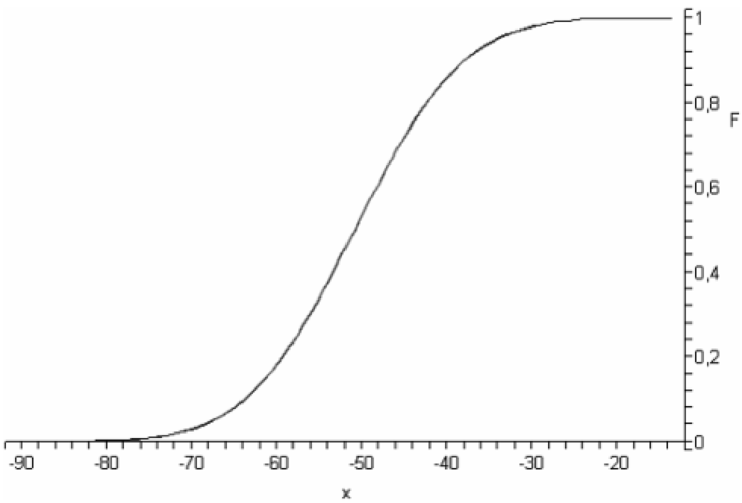

Рис. 1. Эмпирическое и теоретическое распределения функции в примере 1, объем выборки $n = 10000$

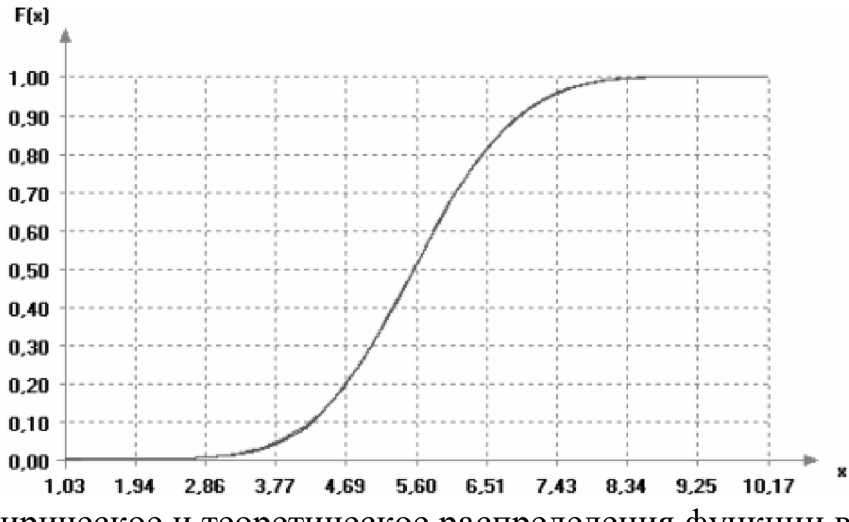

Рис. 2. Эмпирическое и теоретическое распределения функции в примере 2, объем выборки $n = 10000$

Было проведено исследование распределения отношения двух нормальных случайных величин $\frac{x_1}{x_2}$, где $x_1 \in N(m_1, \sigma_1), x_2 \in N(m_2, \sigma_2)$. При одних значениях параметров $m_1, \sigma_1, m_2, \sigma_2$ получается распределение Коши, при других закон хорошо приближается нормальным, при третьих имеем аналитически неизвестное распределение, которое можно удовлетворительно описать только смесью параметрических моделей законов. В [3] найдены условия, при выполнении которых результат сводится к одному из возможных случаев.

Например, для функции $y = \frac{x_1}{x_2}$, при $x_1 \in N(3{,}10), x_2 \in N(7{,}0.5)$ достаточно хорошей моделью является нормальное распределение $N(0.44{,}1.44)$. Достигнутый уровень значимости по критерию Колмогорова составил величину 0.158.

Для функции $y = \frac{x_1}{x_2}$, при $x_1 \in N(7{,}0.5), x_2 \in N(1{,}3)$ получается неизвестное распределение (см. рис. 3), которое хорошо описывается смесью законов.

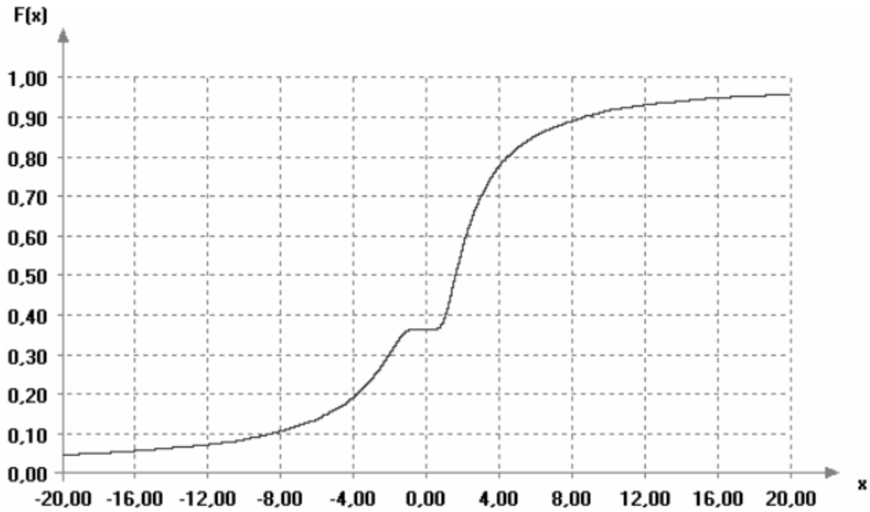

Рис. 3. Эмпирическое распределения функции в примере 4, объем выборки $n = 10000$.

Исследования показали, что программное обеспечение позволяет достаточно точно моделировать функции от систем независимых случайных величин.

Литература

1. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
2. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим: Методические рекомендации. Часть II. Непараметрические критерии. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999. – 85 с.
3. Marsaglia G. Ratios of Normal Variables // Journal of Statistical Software, May 2006, Volume 16, Issue 4. URL http://www.jstatsoft.org/v16/i04/