Материалы Российской НТК “Информатика и проблемы телекоммуникаций”, Новосибирск. 2007. – Т.1. – С.178-181.

ПОСТРОЕНИЕ НАИБОЛЕЕ МОЩНОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАДАННОЙ ПАРЫ АЛЬТЕРНАТИВ КРИТЕРИЯ ТИПА ХИ-КВАДРАТ[1]

Чаплина М.А., Лемешко Б.Ю.
НГТУ, Новосибирск
E-mail: ai-no-kasumi@yandex.ru

Для заданных проверяемой H_0 и конкурирующей H_1 гипотез мощность непараметрических критериев согласия является величиной постоянной и отличается для ситуаций проверки простой и сложных гипотез. В отличие от параметрических мощность критериев типа χ^2 зависит от способа разбиения области определения случайной величины на интервалы и от числа интервалов. Это означает, что относительно заданных H_0 и H_1 можно построить наиболее мощный критерий типа χ^2.

Цель работы заключалась: 1) в максимизации мощности критериев типа χ^2 для заданных H_0 и H_1 в зависимости от способа разбиения на интервалы и от числа интервалов; 2) в сравнении максимальной мощности с мощностью критерия при равновероятном группировании (РВГ) и асимптотическом оптимальном группировании (АОГ) [1], обеспечивающем максимальную мощность относительно близких альтернатив; 3) в сравнению с мощностью критерия в случае использования “интервалов Неймана-Пирсона”.

При использовании критериев согласия типа χ^2 область определения случайной величины разбивается на k интервалов граничными точками $x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k$. Статистика X_n^2 критерия Пирсона вычисляется в соответствии с соотношением:

$$X_n^2 = n\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i / n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}, \qquad (1)$$

где n_i – количество наблюдений, попавших в i-й интервал, $P_i(\theta)$ - вероятность попадания наблюдения в интервал, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – объем выборки, $\sum_{i=1}^{k} P_i(\theta) = 1$.

При справедливости простой гипотезы H_0 предельным распределением $G(X_n^2 | H_0)$ статистики X_n^2 является χ_{k-1}^2-распределение. Если по выборке оценивалось m параметров в результате минимизации статистики X_n^2, статистика подчиняется χ_{k-m-1}^2-распределению. При справедливости H_1 предельным рас-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00059-а)

пределением $G(X_n^2|H_1)$ статистики является нецентральное χ_r^2-распределение с тем же числом степеней свободы r и параметром нецентральности

$$\lambda = n\sum_{i=1}^{k}\frac{(P_i(\theta_1) - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}, \tag{2}$$

где $P_i(\theta_1)$ задает вероятность попадания в интервал при справедливости H_1.

Знание распределений $G(X_n^2|H_0)$ и $G(X_n^2|H_1)$ позволяет по заданной вероятности α ошибки 1-го рода определить вероятность β ошибки второго рода и мощность критерия $1-\beta$. Мощность критерия является неубывающей функцией параметра нецентральности λ. При заданных H_0 и H_1 мощность зависит от объема выборки n, числа интервалов группирования k, от способа группирования. Таким образом, задача максимизации мощности сводится к задаче вида:

$$\max_{x_{(0)}\le x_{(1)}\le..\le x_{(k)}}\lambda = \max_{x_{(0)}\le x_{(1)}\le..\le x_{(k)}}\left(n\sum_{i=1}^{k}\frac{(P_i(\theta_1) - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}\right). \tag{3}$$

Для решения этой задачи использовался метод вращающихся координат, для учета ограничений - метод штрафных функций. Задача решалась для различных близких альтернатив H_0, H_1 и для различных k. Были найдены точки оптимального группирования, использование которых позволяет максимизировать мощность критерия.

Было замечено, что для каждого конкретного случая H_0 и H_1 существует оптимальное число интервалов, зависящее от объема выборки и от заданных H_0 и H_1. Поэтому для обеспечения максимальной мощности критерия эту задачу необходимо решать для различных k.

Мощность критерия, соответствующая решению задачи (3), сравнивалась с мощностью критерия при АОГ и РВГ.

В [2] М.С. Никулиным высказано предположение о высокой мощности критерия в случае использования, так называемых, “интервалов Неймана-Пирсона”. В этом случае область разбивается на интервалы, которым соответствуют неравенства $f_1(x) < f_2(x)$ и $f_1(x) > f_2(x)$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$ - плотности распределений, соответствующие конкурирующим гипотезам. Далее все интервалы одного вида объединяются в один. Таким образом, получается всего 2 интервала, и статистика при проверке справедливой простой гипотезы подчиняется χ_1^2-распределению.

В таблице 1 для различных уровней значимости α и различных обхемов выборок n приведены значения мощности критерия χ^2 Пирсона для случая, когда H_0 соответствует нормальному, а H_1 – логистическому закону (при значениях параметров, обеспечивающих наибольшую близость H_1 к H_0) при проверке простой и сложной гипотез. Значения мощности при АОГ и РВГ взяты из работы [3]. Значения мощности в случае “интервалов Неймана-Пирсона” и интервалов, получающихся в результате решения задачи максимизации (3), получены в данной работе.

Таблица 1. Мощность критерия χ^2 Пирсона при различном группировании.

α	*Простая гипотеза*			*Сложная гипотеза*		
	n=100	*n=500*	*n=1000*	*n=200*	*n=500*	*n=1000*
k=15 и АОГ						
0.1	0.290	0.671	0.922	0.393	0.688	0.928
0.05	0.210	0.565	0.871	0.291	0.583	0.882
0.01	0.107	0.369	0.729	0.139	0.376	0.745
k=9 и АОГ						
0.1	0.204	0.589	0.880	0.323	0.624	0.898
0.05	0.129	0.464	0.806	0.219	0.504	0.834
0.01	0.050	0.249	0.608	0.085	0.283	0.654
k=9 и РВГ						
0.1	0.152	0.392	0.673	0.232	0.445	0.757
0.05	0.083	0.273	0.547	0.136	0.309	0.629
0.01	0.020	0.109	0.310	0.039	0.120	0.358
группирование по интервалам Неймана-Пирсона						
0.1	0.136	0.563	0.654	0.367	0.554	0.877
0.05	0.067	0.399	0.518	0.226	0.419	0.831
0.01	0.028	0.207	0.316	0.122	0.238	0.643
k=9 и группирование при оптимальном λ						
0.1	0.215	0.592	0.892	0.338	0.638	0.902
0.05	0.157	0.505	0.823	0.227	0.505	0.841
0.01	0.073	0.263	0.622	0.092	0.295	0.670

В результате проведенных исследований можно утверждать, что разбиение выборки на "интервалы Неймана-Пирсона" обеспечивает большую мощность по сравнению с РВГ и АОГ при небольшом числе интервалов. При проверке сложных гипотез критерий Никулина с применением АОГ по мощности превосходит критерий χ^2 Пирсона в случае “интервалов Неймана-Пирсона” уже при *k*=5. Разбиение на интервалы, соответствующие максимуму λ, обеспечивает критерию χ^2 Пирсона максимальную мощность для заданного числа интервалов *k*. Следовательно, выбирая оптимальное число интервалов и решая задачу (3), можно получить критерий с наибольшей мощностью.

1. Лемешко Б.Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия // Заводская лаборатория, 1998. Т. 64. – №1. – С.56-64.
2. Greenwood P.E., Nikulin M.S. A Guide to Chi-Squared Testing. – John Wiley & Sons, Inc. 1996. – 280 p.

3. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н. Мощность критериев согласия при близких альтернативах // Измерительная техника. 2007. № 2. – С.22-27.