

## **СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ: ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОЦЕНОК И КРИТЕРИЕВ<sup>1</sup>**

Щеглов А.Е., Лемешко Б.Ю.  
НГТУ, Новосибирск  
E-mail: tleha@ngs.ru

В эконометрической практике часто прибегают к описанию процессов в форме взаимосвязанных регрессионных уравнений. Такие модели получили название систем одновременных уравнений (СОУ).

Формально СОУ представляется в виде [1]:

$$GY_t = HX_t + E_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

где  $G$  – матрица коэффициентов при эндогенных переменных  $Y_t = (y_t^{(1)}, \dots, y_t^{(m)})^T$ ,  $H$  – матрица коэффициентов при предопределенных (экзогенных и лаговых эндогенных) переменных  $X_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(p)})^T$ , а  $E_t$  – вектор случайных составляющих, относительно которых делается предположение, что они имеют нулевое математическое ожидание, постоянную дисперсию, не коррелируют друг с другом и с предопределенными переменными.

Рассматриваемые в литературе методы и подходы, используемые для анализа СОУ, как правило, основываются на предположении нормальности случайных составляющих, что на практике не всегда выполняется.

Исследование статистических закономерностей аналитическими методами подчас является достаточно трудоемкой задачей. В то же время эти исследования относительно просто осуществляются с помощью методов компьютерного моделирования.

В связи с этим, целью настоящих исследований стала разработка программного обеспечения для моделирования СОУ и проведение на его основе исследований свойств оценок и критериев в зависимости от различных характеристик шума.

Разработанное приложение позволяет:

- задавать СОУ с произвольным числом эндогенных и экзогенных переменных, задавать произвольную длину лага, задавать какой-либо закон распределения случайных составляющих;
- генерировать значения эндогенных и экзогенных переменных;
- оценивать параметры с помощью одного из четырех методов: обычного метода наименьших квадратов (МНК), косвенного МНК, двухшагового МНК и трехшагового МНК;

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00059-а)

– генерировать выборку оценок параметров в соответствии с каким-либо методом оценивания;

– генерировать выборку значений статистик, используемых в статистических критериях.

В результате исследований были экспериментально проверены следующие теоретические положения относительно свойств оценок [1]: обычный МНК, в общем случае, дает смещенные и несостоятельные оценки; для рекурсивных систем обычный МНК дает состоятельные оценки; специальные методы (косвенный, двухшаговый, трехшаговый МНК) оценивания дают состоятельные оценки для любых СОУ при различных распределениях случайных составляющих.

Кроме того, было установлено, что распределения оценок параметров хорошо согласуются с нормальным законом распределения при различных распределениях ошибок, а в тех случаях, когда случайные составляющие имеют различные распределения, но одинаковые дисперсии, распределения оценок параметров при увеличении числа наблюдений стремятся к одному и тому же закону.

Были проведены исследования статистики, на которой основывается интервальный прогноз эндогенных переменных. Эта статистика имеет следующий вид [1, 2]:

$$\frac{n - p - m + 1}{(n - p)m} (\bar{Y}_{n+\tau} - Y_{n+\tau})^T \Sigma_{\varepsilon(\tau)}^{-1} (\bar{Y}_{n+\tau} - Y_{n+\tau})$$

где  $n$  – количество наблюдений,  $m$  – количество эндогенных переменных в модели,  $p$  – количество predetermined переменных в модели,  $\bar{Y}_{n+\tau}$  – спрогнозированные значения,  $Y_{n+\tau}$  – истинные значения,  $\Sigma_{\varepsilon(\tau)}$  – оценка ковариационной матрицы ошибок прогноза. При условии, что случайные составляющие имеют нормальное распределение и среди predetermined переменных нет лаговых эндогенных, эта статистика подчиняется распределению Фишера со степенями свободы  $m$  и  $n - p - m + 1$ .

Экспериментально было проверено, что статистика, на которой основывается интервальный прогноз эндогенных переменных, в классическом случае имеет распределение Фишера со степенями свободы  $m$  и  $n - p - m + 1$ .

В случае, когда ошибки подчиняются законам Лапласа или логистическому, эта же статистика имеет отличное от классического распределение, которое наилучшим образом описывается бета-распределением 2-го и 3-го рода и  $\Gamma$ -распределением.

Было установлено, что если в модели присутствуют лаговые эндогенные переменные и случайные составляющие распределены нормально, то при глубине прогноза 1 статистика, на которой основывается интервальный прогноз эндогенных переменных, хорошо согласуется с распределением Фишера со степенями свободы  $m$  и  $n - p - m + 1$ , как и в классическом случае. При большей глубине прогноза эта статистика хорошо согласуется с бета-распреде-

нием 2-го рода, причем при некоторых значениях параметров она хорошо согласуется с классическим распределением.

Был проведен анализ распределения статистики, на которой основывается интервальный прогноз эндогенных переменных, при малых объемах выборки в классическом случае. Было установлено, что при объеме выборки большем 60 статистика хорошо согласуется с распределением Фишера со степенями свободы  $m$  и  $n - p - m + 1$ . При меньших объемах выборки ее распределение отличается от классического.

Было сделано предположение, что применение  $t$ -статистики возможно в случае, когда СОУ является рекурсивной и для оценивания параметров применяется обычный МНК.

Был также проведен анализ распределения статистики критерия переопределения [3]. Пусть  $r_{jt}$  – экзогенные переменные, входящие в  $i$ -е уравнение, а  $s_{jt}$  – экзогенные переменные, не входящие в него. Тогда  $i$ -е уравнение примет вид  $g^T y_t = h^T r_t + \varepsilon_t$ . Критерий переопределения позволяет проверить гипотезу о том, что рассматриваемое структурное уравнение не содержит экзогенных переменных  $s_{jt}$ .

Статистика критерия переопределения имеет следующий вид:

$$n \left[ \frac{\bar{g}^T M_{yy} \bar{g} - \bar{h}^T M_{rr} \bar{h}}{\bar{g}^T M_{vv} \bar{g}} - 1 \right],$$

где  $v$  – ошибки приведенной формы,  $M_{zz} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n z_t z_t^T$ ,  $w_t = s_t - M_{sr} M_{rr}^{-1} r_t$ ,

$M_{vv} = M_{yy} - M_{yr} M_{rr}^{-1} M_{ry} - M_{yw} M_{ww}^{-1} M_{wy}$ ,  $\bar{g}, \bar{h}$  – оценки по двухшаговому МНК.

При справедливой гипотезе эта статистика асимптотически подчиняется  $\chi^2$ -распределению с  $p_{2i} - m_i + 1$  степенями свободы, где  $p_{2i}$  – количество экзогенных переменных, не входящих в  $i$ -е уравнение, а  $m_i$  – количество эндогенных переменных, входящих в  $i$ -е уравнение.

Экспериментально было установлено, что при разных распределениях случайных составляющих статистика критерия переопределения хорошо согласуется с  $\chi^2$ -распределением с  $p_{2i} - m_i + 1$  степенями свободы, т.е. критерий является непараметрическим. Также было установлено, что распределение этой статистики медленно сходится к предельному распределению: гипотеза о согласии не отвергается при объеме выборки  $n > 70$ .

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
2. Hooper J.W., Zellner A. The error of forecast for multivariate regression model // *Econometrica*, 1961, Vol. 29. – P.544-555.

3. Маленво Э. Статистические методы эконометрии // Пер. с франц. – М.: Статистика, 1976, вып. 2. – 325 с.