

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ: ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОЦЕНОК И СТАТИСТИК¹

Щеглов А.Е., Лемешко Б.Ю.

НГТУ, Новосибирск

E-mail: tleha@ngs.ru

Модели в виде *систем одновременных уравнений* (СОУ) широко используются при решении различных прикладных задач, особенно при описании экономических процессов. В развитых в экономическом отношении странах, таких как США, Швеция, Франция, Германия, Голландия и др., подобные модели применяются как в исследовательских, так и в практических целях. С помощью СОУ можно описывать поведение процентных ставок, законы спроса и предложения, развитие экономики страны.

Формально СОУ представляется в виде [1]:

$$GY_t = HX_t + E_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

где G – матрица коэффициентов при эндогенных переменных $Y_t = (y_t^{(1)}, \dots, y_t^{(m)})^T$, H – матрица коэффициентов при предопределенных (экзогенных и лаговых эндогенных) переменных $X_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(p)})^T$, а E_t – вектор случайных составляющих, относительно которых делается предположение, что они имеют нулевое математическое ожидание, постоянную дисперсию, не коррелируют друг с другом и с предопределенными переменными.

Одним из основных этапов построения моделей в виде СОУ является оценивание неизвестных параметров по имеющимся статистическим данным. Затем построенная модель проверяется на адекватность с помощью различных статистических критериев и, в случае успеха, используется, например, для прогнозирования. Применяемые для этих целей методы и подходы, как правило, основываются на предположении, что случайные составляющие имеют нормальное распределение. Однако на практике это не всегда выполняется.

Исследование статистических закономерностей аналитическими методами представляет собой достаточно трудоемкую задачу. В то же время методика компьютерного моделирования дает более простой способ проведения таких исследований.

В связи с этим целью настоящей работы стало проведение исследований свойств оценок и статистик критериев, используемых при анализе моделей в виде СОУ, при нарушении предположений о нормальности случайных составляющих с применением методики компьютерного моделирования.

Исследования свойств оценок проводились на точно идентифицируемой системе и системах с разной степенью сверхидентифицируемости (степенью превышения числа исключенных из какого-либо уравнения предопределенных переменных числа включенных в него эндогенных переменных, уменьшенного

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00059-а)

на единицу). Оценки параметров этих моделей находились по обычному методу наименьших квадратов (OLS), двухшаговому методу наименьших квадратов (2SLS) и по методу максимального правдоподобия с ограниченной информацией (LIML). При этом случайные составляющие подчинялись нормальному, логистическому закону и закону Лапласа.

Для всех рассмотренных систем OLS дал оценки, имеющие неустранимое при $n \rightarrow \infty$ смещение (рис. 1), что подтверждает теоретические результаты [1].

Для точно идентифицируемой системы 2SLS и LIML дали одинаковые результаты [2]. Оценки параметров COY в данном случае состоятельны как при нормальном распределении случайных остатков, так и при других распределениях.

Результаты исследований 2SLS-оценок параметров сверхидентифицируемых систем в условиях малых объемов выборок n показали, что чем выше степень сверхидентифицируемости, тем более смещенными являются оценки. А LIML-оценки, в отличие от 2SLS-оценок, в данном случае практически не имеют смещения (рис. 1). С ростом n смещение 2SLS-оценок уменьшается.

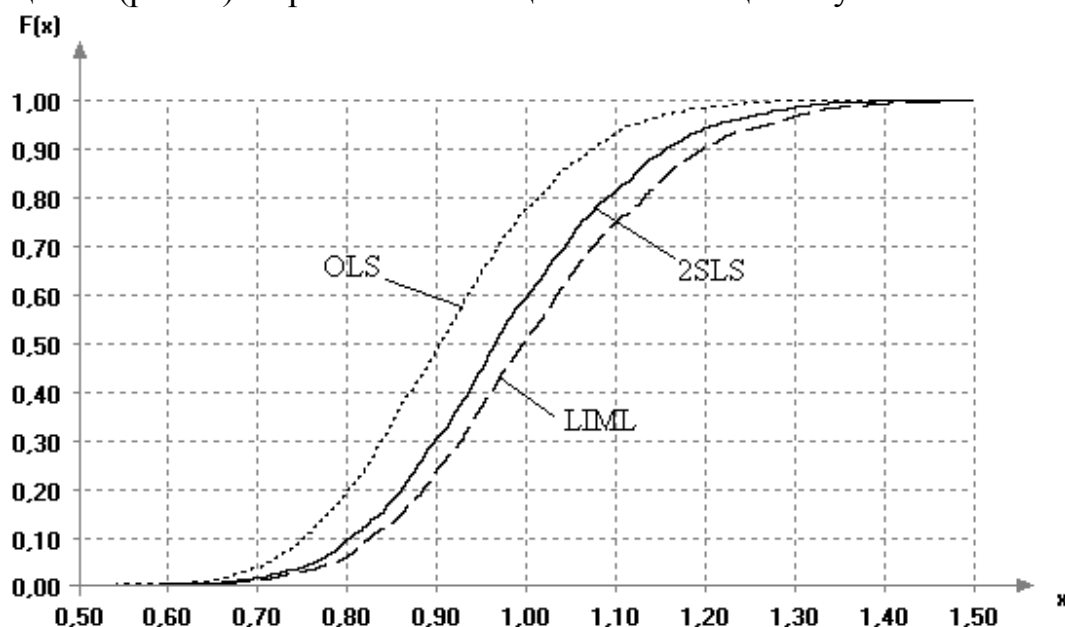


Рис. 1. Эмпирические распределения OLS-, 2SLS-, LIML-оценок для сверхидентифицируемой системы при $n = 15$

Также установлено, что выборки 2SLS и LIML оценок при разных распределениях шума практически не отличаются для любых систем. В связи с этим можно утверждать, что свойства оценок параметров COY по этим методам оценивания не зависят от распределения шума.

При $n \rightarrow \infty$ наблюдается хорошее согласие распределений OLS-, 2SLS-, LIML-оценок с нормальным законом. При этом наиболее быстро к нормальному закону сходятся OLS-оценки.

Также с помощью методики компьютерного моделирования исследованы свойства статистики Андерсона-Рубина [3]. Пусть m_i и p_i - число эндогенных и предопределенных переменных, входящих в i -е уравнение COY, $y^{(i)}$ - вектор

наблюдений за i -й эндогенной переменной размерности $n \times 1$, Y_i - матрица наблюдений за другими $m_i - 1$ эндогенными переменными размерности $n \times m_i - 1$, X_i - матрица наблюдений за predetermined переменными размерности $n \times p_i$, $e^{(i)}$ - вектор случайных составляющих размерности $n \times 1$, g, h - векторы параметров. Тогда i -е уравнение СОУ примет следующий вид:

$$y^{(i)} = Y_i g + X_i h + e^{(i)}.$$

Статистика Андерсона-Рубина позволяет проверить гипотезу $H_0 : g = g_0$ и имеет вид:

$$AR(g_0) = \frac{[SS_0(g_0) - SS_1(g_0)](n - p)}{SS_1(g_0)(p - p_i)} \sim F(p - p_i, n - p),$$

где $SS_0(g_0) = (y^{(i)} - Y_i g_0)^T M(X_i)(y^{(i)} - Y_i g_0)$, $M(A) = I - P(A)$, $P(A) = A(A^T A)^{-1} A^T$, $SS_1(g_0) = (y^{(i)} - Y_i g_0)^T M(X)(y^{(i)} - Y_i g_0)$.

В данной статистике не используются оценки параметров и ее можно применить даже для неидентифицируемой системы. Исследования проводились на разных моделях в виде СОУ (неидентифицируемые, точно идентифицируемые, сверхидентифицируемые) и при разных распределениях случайных составляющих (нормальное, Лапласа, логистическое). Анализ полученных в ходе моделирования выборок значений статистики Андерсона-Рубина позволяет сделать вывод, что ее распределение не зависит от распределения шума: наблюдается хорошее согласие с распределением Фишера $F(p - p_i, n - p)$ как при нормальном распределении случайных составляющих, так и при других.

В таблице 1 представлены значения мощности данного критерия для уравнения из точно идентифицируемой (далее Сис. 1) и сверхидентифицируемой (далее Сис. 2) системы с двумя эндогенными переменными при нулевой гипотезе $H_0 : g = 1$ против двух альтернатив $H_1^1 : g = 1.05$, $H_1^2 : g = 1.15$.

Таблица 1. Мощность критерия Андерсона-Рубина

Гипотеза	α	$n = 20$		$n = 50$		$n = 100$	
		Сис. 1	Сис. 2	Сис. 1	Сис. 2	Сис. 1	Сис. 2
H_1^1	0.1	0,116	0,108	0,16	0,1725	0,1795	0,2495
	0.05	0,064	0,057	0,0875	0,089	0,123	0,1485
	0.01	0,0085	0,0125	0,0235	0,018	0,0305	0,0495
H_1^2	0.1	0,251	0,2205	0,455	0,6525	0,6855	0,952
	0.05	0,165	0,127	0,3315	0,5065	0,565	0,9035
	0.01	0,028	0,031	0,162	0,2365	0,3115	0,741

Литература

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
2. <http://russell.vcharite.univ-mrs.fr/EIE/fchap18.pdf>

3. Dufour Jean-Marie. Identification, weak instruments and statistical inference in econometrics. Université de Montréal, 2003