Литература

1. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М., "Наука", 1964.
2. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. М., Физматгиз, 1963.
3. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. М., "Наука", 1971.
4. Уилкс С. Математическая статистика. М., "Наука", 1967.

В.И.Денисов, Г.Г.Зачепа,
Б.Ю.Лемешко

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОМ ГРУППИРОВАНИИ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ ОСНОВНОГО ПАРАМЕТРА ГАММА - РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

При построении оценки основного параметра гамма-распределения по группированным наблюдениям методом максимального правдоподобия асимптотическая эффективность оценки может быть повышена за счет подходящего выбора граничных точек $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, разбивающих положительную полуось на К интервалов группирования. Так как показателем асимптотической эффективности является максимальное значение информационного количества Фишера

$$J(\theta)=\frac{n}{\Gamma(\theta)}\sum_{i=1}^{k}\frac{\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} x^{\theta-1}e^{-x}\ln x\,dx-\psi(\theta)\int_{x_{i-1}}^{x_i} x^{\theta-1}e^{-x}dx\right]^2}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} x^{\theta-1}e^{-x}dx},$$

то естественным образом возникает задача оптимизации: определить максимум функционала $J^K(\theta)=J(\theta)\cdot n^{-1}$ на множестве $0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k=+\infty$ при фиксированном значении θ (следовательно, при известных $\Gamma(\theta)$ и $\psi(\theta)$). Эта задача оптимизации решалась методом сопряженных градиентов с использованием квадратичной интерполяции при поиске максимума в выбранном направлении. Для приведения задачи оптимизации к безусловной были использованы функции штрафа.

Оптимальные значения максимизируемого функционала и соответствующие X_i при фиксированных значениях θ приведены в табл.I.

В таблице использованы следующие обозначения:

J^K - оптимальное значение максимизируемого функционала при K интервалах группирования;

X_i^K - координата конца i -го интервала при K интервалах группирования;

J - табулированные значения информационного количества Фишера для одного наблюдения.

Анализ полученных результатов позволяет заметить, что увеличение числа интервалов приводит к увеличению оптимального значения $J(\theta)$, то есть

$$J^2_{опт}(\theta) < J^3_{опт}(\theta) < J^4_{опт}(\theta) < J^5_{опт}(\theta).$$

Наибольший эффект получается при переходе от двух интервалов к четырем. С ростом параметра θ ($\theta > 6$) преимущество перехода с двух интервалов группирования к трем или с четырех к пяти исчезает, так как

$$J^3_{опт}(\theta) \to J^2_{опт}(\theta) \quad \text{при} \quad \theta > 6;$$

$$J^5_{опт}(\theta) \to J^4_{опт}(\theta) \quad \text{при} \quad \theta > 6.$$

В то же время $J^4_{опт}(\theta)$ остается значительно большим, чем $J^2_{опт}(\theta)$. Зависимость $X_1^2(\theta)$ практически совпадает с $X_2^4(\theta)$. К кривым $X_1^2(\theta)$ и $X_2^4(\theta)$ с ростом θ ($\theta > 6$) асимптотически приближаются кривые $X_2^3(\theta)$ и $X_3^5(\theta)$, а зависимости $X_2^5(\theta)$ и $X_4^5(\theta)$ сходятся соответственно к $X_1^4(\theta)$ и $X_3^4(\theta)$.

Эффективность оценивания при оптимальном группировании можно охарактеризовать отношением $\frac{J(\theta)}{J^K_{опт}(\theta)}$, показывающим, во сколько раз должно быть увеличено число группированных наблюдений для достижения точности, сравнимой с точностью оценки по негруппированным данным.

Таблица I

θ	X_k	2 интервала		3 интервала			4 интервала				5 интервалов					
		X_1^2	J^2	X_1^3	X_2^3	J^3	X_1^4	X_2^4	X_3^4	J^4	X_1^5	X_2^5	X_3^5	X_4^5	J^5	J
0.25	8.45	0.021	8.69	0.001	0.0727	13.085	0.001	0.0364	0.697	13.450	0.001	0.0157	0.0997	0.6908	13.768	17.19745
1.25	10.35	0.581	0.745	0.247	1.069	0.9575	0.136	0.533	1.480	1.0481	0.0847	0.320	0.806	1.830	1.0953	1.19745
2.25	12.15	1.517	0.3496	0.786	2.203	0.402	0.627	1.465	2.921	0.4892	0.402	1.047	1.914	3.389	0.5104	0.55745
3.25	13.85	2.496	0.2265	0.981	2.932	0.2636	1.244	2.423	4.238	0.3159	0.962	1.840	2.991	4.791	0.3294	0.35902
4.25	15.45	3.485	0.1672	1.045	3.675	0.1793	1.946	3.408	5.5[illegible]	0.2329	1.263	2.443	3.845	5.912	0.2407	0.26524
5.25	16.95	4.477	0.1325	1.093	4.540	0.1357	2.690	4.398	6.756	0.1843	1.394	2.980	4.630	6.952	0.1879	0.2098[illegible]
6.25	18.45	5.473	0.1096	1.130	5.495	0.1103	3.463	5.392	7.974	0.1525	1.484	3.586	5.478	8.028	0.1538	0.[illegible]360
7.25	19.85	6.469	0.0935	1.143	6.472	0.0936	4.259	6.392	9.181	0.1302	1.551	4.300	6.410	9.182	0.130[illegible]	0.14800
8.25	21.35	7.464	0.0815	1.160	7.466	0.0815	5.070	7.391	10.371	0.1133	1.586	5.066	[illegible]375	10.352	0.1133	0.12897
9.25	22.65	8.471	0.0722	1.176	8.472	0.0722	5.893	8.389	11.546	0.1005	1.620	5.876	8.353	11.494	0.1004	0.11428

Значения этого отношения приведены в табл.2.

Таблица 2

	0.25	I.25	2.25	3.25	4.25	5.25	6.25	7.25	8.25	9.25
2	I.978	I.607	I.595	I.59	I.587	I.583	I.585	I.583	I.583	I.583
3	I.3I4	I.25	I.265	I.367	I.48	I.546	I.56	I.582	I.583	I.583
4	I.278	I.I42	I.I4	I.I4	I.I38	I.I37	I.I37	I.I37	I.I37	I.I37
5	I.25	I.093	I.092	I.092	I.I02	I.II5	I.I29	I.I34	I.I37	I.I37

Таблица I

И.В.Городинский, Ю.Г.Чесноков

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТЕЛЕГРАФНОГО СИГНАЛА ПРИ ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИИ В ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКЕ КВАЗИБЕЛЫМ ШУМОМ

При решении многих задач статистического моделирования широко используется телеграфный сигнал [I,2,3], имеющий постоянную амплитуду прямоугольных импульсов случайной длительности, появляющихся в случайные моменты времени. Такой сигнал имитирует квазибелый шум, имеющий по сравнению с идеальным белым шумом приблизительно равномерную спектральную плотность мощности не во всем частотном диапазоне, а лишь на некотором ограниченном участке.

При этом сигнал $\xi(t)$ имеет близкую к дельта-образной корреляционную функцию

$$R_\xi(\tau)=c^2\cdot e^{-2\lambda|\tau|} \qquad (I)$$

и спектральную плотность вида

$$S_\xi(\omega)=\frac{4c^2\lambda}{\omega^2+4\lambda^2}. \qquad (2)$$